

岩石类材料的分叉分析及其工程应用

The analysis of discontinuous bifurcation of rocklike materials and its engineering application

杨强, 陈新, 周维垣
(清华大学水利系, 北京 100084)

摘要: 根据 Ottosen 用特征值方法得到的非关联弹塑性材料发生不连续分叉的临界硬化模量和局部化方向的解析解, 给出了岩石类材料常用的 Mohr-Coulomb 和 Drucker-Prager 准则的临界硬化模量和局部化方向, 并对二者单轴受压时的局部化方向进行了比较。对平面应变混凝土压板进行分叉分析, 得到其不同位移荷载步下的局部化区的形成过程和最终破坏模式。并对某拱坝进行弹塑性分叉分析, 计算结果表明坝踵处最先发生应变局部化, 是拱坝的薄弱部位。

关键词: 分叉; 临界硬化模量; 临界局部化方向; 应变局部化

中图分类号: TU 452 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2001)04-0403-04

作者简介: 杨强, 男, 1964 年生。1988 年在清华大学获硕士学位, 1996 年在奥地利 Innsbruck 大学获博士学位, 现为清华大学水利系副教授。主要从事水工结构及岩石力学方面的研究工作。

YANG Qiang, CHEN Xin, ZHOU Wei-yuan

(Department of Hydraulic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Based on Ottosen's discontinuous bifurcation solutions in elastoplasticity, the critical bifurcation directions and their corresponding hardening modulus for rocklike materials are derived. The two critical bifurcation directions on Mohr-Coulomb and Drucker-Prager criterion under uniaxial compression for different φ , ν are compared to each other. In addition to the traditional FEM, the bifurcation analysis is performed in a thin plate under compression and in an arch dam, and the computed localized elements show there is a shear failure zone in the plate and in the dam heel where the compressive stress is the maximum.

Key words: bifurcation; the critical hardening modulus; the critical bifurcation directions; strain localization

1 引言*

Hill 和 Hutchinson^[1] 及 Rudnick 和 Rice^[2] 最早将分叉理论用于分析剪切带的形成, 并通过特征值分析给出了弹塑性材料发生分叉时的临界硬化模量和局部化方向理论解。Ottosen 和 Runesson^[3] 则对体积应变为非关联流动而偏量应变为关联流动弹塑性材料给出了分叉分析的解析解。国内也有些学者在这方面进行了研究, 如刘夕才^[4] 用分叉理论来解释岩土工程的失稳, 尹光志^[5] 对岩石在平面应变条件下剪切带进行了分叉分析。

剪切带的特征是, 原先连续分布的变形模式被一种急剧不连续的位移梯度所取代。这类不连续性一般仅局限在一些宽度很窄的带域内并随之萌生裂纹。现有的实验观察也表明, 带内外材料的微观结构状况确有明显不同, 带内材料所受损伤程度比带外严重。对于混凝土和岩石这类脆性材料, 应变局部化现象的发生也是由材料内部微裂纹和微孔穴的扩展引起的。

由于分叉发生的条件是特征刚度矩阵奇异, 因此在有限元分析中, 一些文献^[6] 采用数值方法, 通过对每一增量步计算特征刚度矩阵来判断单元是否满足分叉条件, 计算量很大。文献[3]对特征刚度矩阵进行特征

值分析, 给出了分叉分析的解析解, 使得分叉分析便于应用到有限元计算中。

应变局部化的出现意味着材料失去稳定性, 是岩土工程失稳与破坏的起因与前兆, 也与许多岩土工程破坏与失稳的最终宏观形式密切相关。在拱坝的稳定分析计算中, 目前的有限元程序只能给出发生塑性流动的单元, 绘出塑性区。对拱坝进行分叉分析, 计算出其应变局部化区的形成与演化, 得到其超载破坏形式, 对拱坝失稳的预测和防止具有重要的工程意义。

2 分叉问题特征值方法的解析解

本节根据文献[3]对分叉问题的特征值分析, 对于体积应变为非关联流动而偏量应变为关联流动的弹塑性材料, 给出其分叉条件的解析解。

弹塑性材料的增量本构关系为

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (1a)$$

$$D_{ijkl} = D_{ijkl}^e - \frac{1}{A} D_{ijst}^e g_{sf}^{mn} D_{mnkl}^e \quad (1b)$$

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(598789005)

收稿日期: 2000-12-13

$$f_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \alpha_{ij}} \quad (2a)$$

$$g_{ij} = \frac{\partial G}{\partial \alpha_{ij}} \quad (2b)$$

$$A = H + f_{ij} D_{ijkl}^e g_{kl} \quad (2c)$$

式中 F 为屈服函数; G 为塑性势函数; H 为塑性硬化模量。

发生分叉的条件是特征刚度张量 $Q_{il} = n_j D_{ijkl} n_k$ 奇异, n_i 为局部化面的单位法向量。通过特征值分析, 得到可能发生局部化时相应的硬化模量:

$$H = -f_{ij} D_{ijkl}^e g_{kl} + n_j D_{ijst}^e g_{st} P_{mn}^e f_{mn} D_{mnkl}^e n_k \quad (3)$$

临界硬化模量为

$$H_{cr} = \max_{n_i} H(n_i) \quad (4)$$

使硬化模量取得最大值的方向即为临界局部化方向。将 f_{ij} 和 g_{ij} 分解为体积的和偏量的两部分: f_v, g_v 和 $\bar{f}_{ij}, \bar{g}_{ij}$, 若体积应变服从非关联流动法则, 偏量应变服从关联流动法则, 则 f_{ij} 和 g_{ij} 将具有相同的主方向。选

局部坐标系与 f_{ij} 和 g_{ij} 的主方向重合, 则得到此类材料发生局部化时的临界硬化模量和临界方向, 列于表 1 ~ 3。

其中, $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ 和 $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$ 为相应的偏量主值, 且 $\bar{f}_1 \geq \bar{f}_2 \geq \bar{f}_3$, ϕ, ϕ 为材料常数, 定义为

$$\phi = \frac{1}{2(1-\nu)} \quad (5a)$$

$$\phi = \frac{1+\nu}{6(1-\nu)} \quad (5b)$$

C_{13} 和 C_{31} 定义如下:

$$C_{13} = \bar{f}_1 + (1-2\phi)\bar{f}_3 + \phi(f_v + g_v) \quad (6a)$$

$$C_{31} = \bar{f}_3 + (1-2\phi)\bar{f}_1 + \phi(f_v + g_v) \quad (6b)$$

由于对工程材料有 $0 \leq \nu \leq 0.5$, 由式(6)可看出, 对于具有膨胀行为的摩擦型材料, $f_v > 0, g_v \geq 0$, 有 $C_{13} \geq 0$ 。对于具有收缩行为的帽盖模型, $f_v \leq 0, g_v \leq 0$, 有 $C_{31} \leq 0$ 。需要指出的是, 对于非关联流动, 局部化有可能出现在临界硬化模量为正的硬化区。

表 1 $C_{13} \geq 0$ 且 $C_{31} \leq 0$ 时的 H_{cr} 和 n_i

Table 1 Value of H_{cr} and n_i when $C_{13} \geq 0$ and $C_{31} \leq 0$

条件	临界硬化模量 H_{cr}	临界方向 n_i
$\bar{f}_1 > \bar{f}_2 > \bar{f}_3$	$\frac{H_{cr}}{4G} = \frac{1+\nu}{2} \left \frac{(f_v - g_v)^2}{18(1-\nu)} - \left[\bar{f}_2 + \frac{f_v + g_v}{6} \right]^2 \right $	$n_1^2 = C_{13}/[2\phi(\bar{f}_1 - \bar{f}_3)], n_2 = 0, n_3^2 = -C_{31}/[2\phi(\bar{f}_1 - \bar{f}_3)]$
$\bar{f}_1 = \bar{f}_2 > \bar{f}_3$	同上	$n_1^2 + n_2^2 = C_{13}/[2\phi(\bar{f}_1 - \bar{f}_3)], n_3^2 = -C_{31}/[2\phi(\bar{f}_1 - \bar{f}_3)]$
$\bar{f}_1 > \bar{f}_2 = \bar{f}_3$	同上	$n_1^2 = C_{13}/[2\phi(\bar{f}_1 - \bar{f}_3)], n_2^2 + n_3^2 = -C_{31}/[2\phi(\bar{f}_1 - \bar{f}_3)]$
$\bar{f}_1 = \bar{f}_2 = \bar{f}_3 = 0$	$\frac{H_{cr}}{4G} = -\frac{(1+\nu)}{9(1-\nu)} f_v g_v$	$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

表 2 $C_{13} \geq 0$ 且 $C_{31} \geq 0$ 时的 H_{cr} 和 n_i

Table 2 Value of H_{cr} and n_i when $C_{13} \geq 0$ and $C_{31} \geq 0$

条件	临界硬化模量 H_{cr}	临界方向 n_i
$\bar{f}_1 > \bar{f}_2 > \bar{f}_3$	$\frac{H_{cr}}{4G} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \left \frac{(\bar{f}_2 - \bar{f}_3)^2}{2(1+\nu)} + \bar{f}_2 \bar{f}_3 + \frac{f_v + g_v}{6} (\bar{f}_2 + \bar{f}_3) + \frac{1}{9} f_v g_v \right $	$n_1^2 = 1, n_2 = n_3 = 0$
$\bar{f}_1 = \bar{f}_2 > \bar{f}_3$	同上	$n_1^2 + n_2^2 = 1, n_3 = 0$
$\bar{f}_1 > \bar{f}_2 = \bar{f}_3$	同上	$n_1^2 = 1, n_2 = n_3 = 0$
$\bar{f}_1 = \bar{f}_2 = \bar{f}_3 = 0$	$\frac{H_{cr}}{4G} = -\frac{(1+\nu)}{9(1-\nu)} f_v g_v$	$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

表 3 $C_{13} \leq 0$ 且 $C_{31} \leq 0$ 时的 H_{cr} 和 n_i

Table 3 Value of H_{cr} and n_i when $C_{13} \leq 0$ and $C_{31} \leq 0$

条件	临界硬化模量 H_{cr}	临界方向 n_i
$\bar{f}_1 > \bar{f}_2 > \bar{f}_3$	$\frac{H_{cr}}{4G} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \left \frac{(\bar{f}_1 - \bar{f}_2)^2}{2(1+\nu)} + \bar{f}_1 \bar{f}_2 + \frac{f_v + g_v}{6} (\bar{f}_1 + \bar{f}_2) + \frac{1}{9} f_v g_v \right $	$n_1 = n_2 = 0, n_3^2 = 1$
$\bar{f}_1 > \bar{f}_2 = \bar{f}_3$	同上	$n_1 = 0, n_2^2 + n_3^2 = 1$
$\bar{f}_1 = \bar{f}_2 = \bar{f}_3 = 0$	$\frac{H_{cr}}{4G} = -\frac{(1+\nu)}{9(1-\nu)} f_v g_v$	$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

3 岩石类材料的临界硬化模量和局部化方向

下面对岩土材料常用的 Drucker-Prager 和 Mohr-Coulomb 准则给出其三维情形的临界硬化模量和局部化方向:

3.1 Mohr-Coulomb 准则

对关联流动的 Mohr-Coulomb 准则(以下简称 M-C 准则),其屈服函数为

$$F = G = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\sin\varphi - c\cos\varphi = 0 \quad (7)$$

式中 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (拉应力为正); φ 是摩擦角, c 是粘聚力。

由上式得到

$$f_v = g_v = \sin\varphi \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_1 &= \frac{1}{2} \left| 1 + \frac{1}{3} \sin\varphi \right| \\ \bar{f}_2 &= -\frac{1}{3} \sin\varphi \\ \bar{f}_3 &= \frac{1}{2} \left| -1 + \frac{1}{3} \sin\varphi \right| \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

由于 $-1 < \sin\varphi < 1$, 满足 $\bar{f}_1 > \bar{f}_2 > \bar{f}_3$, 由式(5)和式(6)得到: $C_{13} = \frac{1+\sin\varphi}{2(1-\nu)}$, $C_{31} = -\frac{1-\sin\varphi}{2(1-\nu)}$ 。对工程材料 $0 \leq \nu \leq 0.5$, 从而 $C_{13} > 0$ 且 $C_{31} < 0$, 由表 1 可得

$$H_{cr} = 0 \quad (10a)$$

$$n_1^2 = \frac{C_{13}}{2\phi(\bar{f}_1 - \bar{f}_3)}, n_2 = 0, n_3^2 = -\frac{C_{31}}{2\phi(\bar{f}_1 - \bar{f}_3)} \quad (10b)$$

从而局部化面法向在 $\sigma_1\sigma_3$ 平面内, 其与 σ_3 轴的夹角 θ_{cr} 为

$$\tan^2\theta_{cr} = \frac{n_1^2}{n_3^2} = \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = \tan^2\left|45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right| \quad (11)$$

这一结果进一步证明了 Mohr 的经典假设: 当到达理想塑性状态, 将形成与最大主应力 σ_1 作用面交角为 $\pm(45^\circ + \varphi/2)$ 的滑移面。

3.2 Drucker-Prager 准则

对关联流动的 Drucker-Prager 准则(以下简称 D-P 准则),其屈服函数为

$$F = G = \frac{\alpha}{3}I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (12)$$

如果在平面应变条件下, 使 Drucker-Prager 屈服面在偏平面内的圆与 Mohr-Coulomb 屈服面在偏平面内的库伦六边形的内顶点重合, 则:

$$\alpha = \frac{3\tan\varphi}{\sqrt{9+12\tan^2\varphi}}, k = \frac{3c}{\sqrt{9+12\tan^2\varphi}} \quad (13)$$

对 Drucker-Prager 准则:

$$f_{ij} = g_{ij} = \frac{\alpha}{3}\delta_{ij} + S_{ij}/2\sqrt{J_2} \quad (14)$$

$$f_v = g_v \approx \alpha > 0 (\text{从而 } C_{13} \geq 0) \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_i &= N_i/2, i = 1, 2, 3 \\ N_i &= S_i/\sqrt{J_2} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

临界硬化模量 H_{cr} 和局部化方向 n_i 为 ① $N_1 = N_2 = N_3$ 时, $H_{cr}/4G = -(1+\nu)\alpha^2/[9(1-\nu)]$, n_i 为任意值; ② $C_{31} \leq 0$ 时, $H_{cr}/4G = -(1+\nu)(N_2/2 + \alpha/3)^2/2$, 其

局部化方向 n_i 见表 1; ③ $C_{31} \geq 0$ 时, $\frac{H_{cr}}{4G} = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \left| \frac{(N_2 - N_3)^2}{8(1+\nu)} + \frac{1}{4}N_2N_3 + \frac{\alpha}{6}(N_2 + N_3) + \frac{1}{9}\alpha^2 \right|$, 其局部化方向 n_i 见表 2。

3.3 M-C 准则与 D-P 准则单轴压缩时局部化方向的比较

单轴压缩时, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma$, 对 D-P 准则有 $N_1 = N_2 = 1/\sqrt{3}, N_3 = -2/\sqrt{3}$ 。从而 $2N_1 + (2-3\nu)N_2 - N_3 = \sqrt{3}(2-\nu)$, $2(1+\nu)\alpha \leq \sqrt{3}(1+\nu)$, 有 $C_{31} \leq 0$, 由表 1 可得到

$$\left. \begin{aligned} n_1^2 + n_2^2 &= C_{13}/[2\phi(\bar{f}_1 - \bar{f}_3)] \\ n_3^2 &= -C_{31}/[2\phi(\bar{f}_1 - \bar{f}_3)] \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{13} &= \frac{(1+\nu)}{2\sqrt{3}(1-\nu)} \left| 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\alpha \right| \\ C_{31} &= -\frac{(1+\nu)}{2\sqrt{3}(1-\nu)} \left| \frac{2-\nu}{1+\nu} - \frac{2}{\sqrt{3}}\alpha \right| \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

为了与 M-C 准则进行比较, 取 $n_2 = 0$, 从而局部化面法向在 $\sigma_1\sigma_3$ 平面内与 σ_3 轴的夹角 θ_{cr} 为

$$\tan^2\theta_{cr} = \frac{n_1^2}{n_3^2} = (\sqrt{3} + 2\alpha)/\left|\sqrt{3}\left|\frac{2-\nu}{1+\nu}\right| - 2\alpha\right| \quad (19)$$

对不同的 φ, ν 的值, 单轴压缩时 D-P 准则与 M-C 准则发生局部化时的临界角 θ_{cr} 列于表 4。由表 4 可以看出, 当 $\nu = 0.5$ 时, D-P 准则与 M-C 准则计算的临界局部化角 θ_{cr} 较接近。

表 4 单轴压缩时临界局部化角 θ_{cr} (°)

Table 4 Critical bifurcation directions θ_{cr} under uniaxial compression

φ	D-P 准则						M-C 准则
	$\nu=0.0$	$\nu=0.1$	$\nu=0.2$	$\nu=0.3$	$\nu=0.4$	$\nu=0.5$	
10	39.2	41.5	43.8	46.1	48.4	50.7	50
20	42.8	45.5	48.1	50.8	53.5	56.3	55
30	46.0	49.0	52.0	55.1	58.4	61.8	60
40	48.7	52.0	55.4	59.0	62.8	67.0	65
50	50.9	54.5	58.2	62.2	66.7	71.9	70
60	52.6	56.4	60.5	64.9	70.0	76.7	75
70	53.8	57.8	62.1	66.9	72.7	81.2	80
80	54.5	58.6	63.1	68.1	74.4	85.6	85

4 计算实例

在拱坝的弹塑性有限元分析中, 现有的程序只能给出发生塑性流动的单元, 绘出塑性区。而对于其中塑性变形较大的单元, 当单元高斯点的硬化模量超过临界硬化模量时, 满足分叉条件, 单元将发生应变局部化, 形成局部化区。为了进一步对结构进行破坏分析, 得到结构进入塑性后的局部化区, 本文将上面的分叉分析应用到三维弹塑性有限元计算中, 在本组三维非线性有限元分析程序 TFINE 的基础上进行开发, 增加了分叉分析部分。程序采用关联流动的 Drucker-Prager 准则, 混凝土的单轴受压应力-应变曲线取为二次抛物线。

本文对平面应变问题的混凝土压板试件进行了弹塑性分叉分析, 试件尺寸为 $100\text{ mm} \times 200\text{ mm} \times 4\text{ mm}$, 网格为 $20 \times 40 \times 8$ 。下边界固定, 上边界施加位移荷载。在试件左下角处设一个缺陷单元, 其弹模为其它单元的一半。对不同的位移荷载步, 计算出的单元局部化形态如图 1(a)~(d) 所示, 可以看出根据关联流动的 Drucker-Prager 准则计算出的破坏属于典型的剪切破坏。

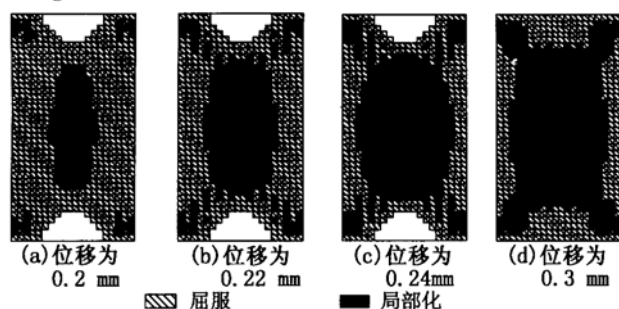


图 1 受压薄板在不同位移荷载下的局部化单元

Fig. 1 Localized elements in a thin plate under compression in different displacement load steps

本文还对某拱坝进行了弹塑性分叉分析, 计算区域包括坝体和基础。计算工况为自重+温度+渗流+5倍水载。局部化区主要出现在坝体。图 2(a)、(b) 绘出了坝体上、下游面发生局部化的单元, 拱冠梁的局部化单元见图 2(c)。可以发现, 局部化发生在拱坝压应力较大的坝踵及下游底部的坝肩。

5 结 语

根据文献[3]得到的发生不连续分叉的临界硬化模量和局部化方向的解析解, 普遍适用于体积应变为非关联流动而偏量应变为关联流动的弹塑性材料。本文虽然只给出了岩石类材料常用的 Mohr-Coulomb 和 Drucker-Prager 准则的临界硬化模量和局部化方向, 但对于其它岩土类材料的屈服准则, 也可用同样的方

法得到其发生分叉时的临界硬化模量和局部化方向。

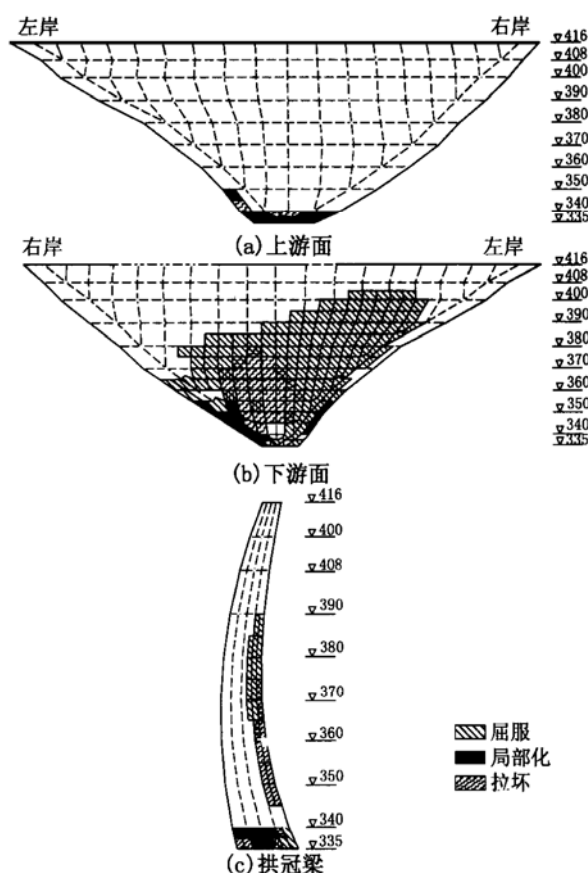


图 2 某拱坝弹塑性分叉分析

Fig. 2 Elastoplastic bifurcation analysis of an arch dam

本文的弹塑性分叉分析程序, 计算区域包括结构和基础, 并可在基础中模拟断层。为了简单起见, 屈服准则统一采用了 Drucker-Prager 准则。在计算中还可对不同的材料, 采用其它准则, 以改善计算精度。

参考文献:

- [1] Hill R, Hutchinson J W. Bifurcation phenomena in the plane tension test[J]. J Mech Phys Solids, 1975, 23: 239~ 264.
- [2] Rudnicki J W, Rice J R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials[J]. J Mech Phys Solids, 1975, 23: 371~ 394.
- [3] Ottosen N S, Runesson K. Properties of discontinuous bifurcation solutions in elastoplasticity[J]. Int J Solids Struct, 1991, 27 (4): 401~ 421.
- [4] 刘夕才. 岩土变形局部化失稳的分叉分析[A]. 谢和平. 非线性力学理论与实践[M]. 北京: 中国矿业大学出版社, 1997. 113~ 121.
- [5] 尹光志, 鲜学福, 王宏图. 岩石在平面应变条件下剪切带的分叉分析[J]. 煤炭学报, 1999, 24(4): 364~ 367.
- [6] Ortiz M, Leroy Y, Needleman A. A finite element method for localized failure analysis[J]. Comput Meths Appl Mech Eng, 1987, 61: 189~ 214.