

岩土本构理论的几个基本问题研究

Study of several basic problems in constitutive theory of geomaterials

刘元雪

(后勤工程学院 土木工程系, 重庆 400041)

摘要: 从岩土基本力学性质出发, 证明了 Drucker 塑性公设、经典塑性力学原理不适用于岩土材料。对岩土本构理论的几个基本问题进行了研究。通过严格的理论分析, 证明了基于经典塑性理论的单屈服面模型无论是否采用相关联流动法则都是不适用于岩土材料的; 岩土屈服面不唯一, 屈服面重数与塑性应变增量自由度一致, 岩土屈服面存在不外凸情况; 相关联流动法则不适用于岩土材料。

关键词: 本构关系; 岩土材料; 经典塑性理论; Drucker 公设; 屈服面; 流动法则

中图分类号: TU 45

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2001)01-0045-04

作者简介: 刘元雪, 男, 1969年生, 博士, 副教授。主要从事岩土本构关系、岩土测试技术的教学与研究工作。

LIU Yuanxue

(Department of Civil Engineering, Logistical Engineering University, Chongqing 400041, China)

Abstract: Based on the basic mechanical properties of geomaterials, it is proved that Drucker postulate and the classical mechanics of plasticity are not suitable for geomaterials. The basic problems of constitutive theory of geomaterials are discussed. Based on strict theoretic analysis, the following have been verified: the single yield surface model which is based on classic theory of plasticity would be unsuitable to geomaterials whether the associated flow rule is applied or not; the yield surface of geomaterials would not be unique, and its number will be same as that of the freedoms of plastic strain increment; and the yield surface might not be convex; and the associated flow rule is unsuitable to geomaterials.

Key words: constitutive relation; geomaterials; classical plastic theory; Drucker Postulate; yield surface; flow rule

的任意附加应力循环中附加应力做的功非负, 即

1 引言*

早期的岩土材料本构模型一般是基于传统塑性理论而建立的, 如著名的剑桥模型^[1]。但大量的岩土实验与工程实践表明, 基于传统塑性力学的岩土本构模型无法反映岩土材料的一些基本的力学特性: 岩土材料的塑性应变增量方向与应力状态不具有唯一性关系, 而与应力增量相关^[2,3]; 主应力轴旋转会导致土体明显的塑性变形^[4,5,6,7]; 采用单屈服面无法合理地反映岩土材料的剪胀(缩)特性^[8]。针对上述问题, 岩土界的学者做了大量工作, 提出了一些所谓不服从经典塑性理论的本构模型、双屈服面模型^[9,10]、多重屈服面模型^[11]及采用非关联流动法则^[12,13]来修正过大的剪胀现象。传统塑性理论是基于塑性公设的, 认为材料塑性变形应符合单屈服面相关联流动^[14]。国内力学界在塑性公设角度作了一些重要工作。黄速建^[15]发现 Drucker 公设与 Iliushin 公设都是独立于热力学定律之外的假设, 并非所有材料都必须满足这两个公设。殷有泉^[16]认为岩土材料的非关联塑性流动特性可归因于岩土材料的弹塑性耦合现象。

本文拟从岩土基本变形机制出发, 探求塑性公设的实用性、经典塑性力学原理不适用于岩土材料变形机制的根源及对岩土本构理论的几个重要问题进行研究。

2 Drucker 公设不适用于岩土材料的证明

Drucker 公设表述为材料的物质微元在应力空间

$$W_D = \oint_{\sigma} (\sigma - \sigma_0) d\varepsilon \geq 0$$

在一个附加应力循环中, 弹性变形部分的功为零, 忽略弹性加载阶段和卸载阶段的塑性变形, 这样只需计算塑性加载阶段的塑性变形所导致的功就可以了, 则:

$$W_D = \int_{\sigma}^{\sigma+\Delta\sigma} (\sigma - \sigma_0) d\varepsilon^p = (\sigma - \sigma_0) d\varepsilon^p + \frac{1}{2} d\sigma \cdot d\varepsilon^p \quad (1)$$

当 σ_0 不与 σ 重合时, 式(1)中右边第二项可以忽略不计, 则

$$W_D = (\sigma - \sigma_0) d\varepsilon^p \quad (2)$$

岩土弹塑性模型常常是在 p (球应力) - q (广义剪应力) 平面上表述的, 即可表述为

$$d\varepsilon^p = E dp + B dq, \quad d\varepsilon_s^p = C dq + D dq \quad (3)$$

式中 $d\varepsilon^p$, $d\varepsilon_s^p$ 分别为塑性体应变、塑性剪应变增量。

下面将在 p - q 平面上对式(2)进行讨论。在 p - q 平面上任一附加应力循环如图1所示, 图1各点的坐标为 $A_0(p_0, q_0)$, $A(p, q)$, $A_1(p + dp, q + dq)$ 。则

$$W_D = (\sigma - \sigma_0) d\varepsilon^p = (p - p_0) d\varepsilon^p + (q - q_0) d\varepsilon_s^p \quad (4)$$

岩土体的剪胀(缩)现象是岩土界公认的。广义的剪胀现象包括剪胀(剪应力引起体积膨胀, 此时式(3)中 $B < 0$)与剪缩(剪应力引起体积收缩, 此时式(3)中 $B >$

0)。下面将从剪胀(缩)性对式(4)作较为深入的研究。

2.1 剪胀时 Drucker 公设不适用于岩土材料的证明

在 $p-q$ 平面上选定一条加载路径如图 2 所示, 相应于图 1, 图 2 各点的坐标为 $A_0(p_0, q_0)$, $A(p, q_0)$, $A_1(p, q_0 + dq)$ 。则根据式(4)有

$$W_D = (p - p_0)d\varepsilon_p^p + 0 \cdot d\varepsilon_q^p \\ = (p - p_0)(E \cdot 0 + B \cdot dq) = B(p - p_0)dq \quad (5)$$

按图 2 所选加载路径, $dq > 0$, $(p - p_0) > 0$, 当岩土剪胀时, $B < 0$, 则此时式(5)为

$$W_D = B(p - p_0)dq < 0 \quad (6)$$

上式表明: 当岩土材料存在剪胀现象时, Drucker 公设是不满足的。即此时不满足

$$W_D = (\sigma - \sigma_0)d\varepsilon^p > 0 \quad (7)$$

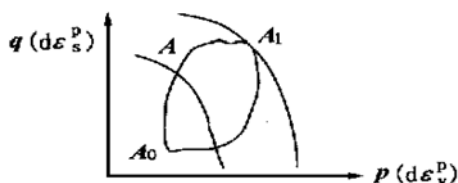


图 1 $p-q$ 平面附加应力循环示意图

Fig. 1 Circulation of applied stress in $p-q$ plane

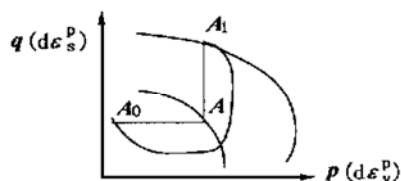


图 2 $p-q$ 平面一条特殊加载路径示意图

Fig. 2 A special loading path in $p-q$ plane

2.2 剪缩时 Drucker 公设不适用于岩土材料的证明

在 $p-q$ 平面上岩土弹塑性变形式(3)也可表述为

$$\begin{vmatrix} d\varepsilon_p^p \\ d\varepsilon_q^p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dp \\ dq \end{vmatrix} \quad (8)$$

土体剪缩时, $B > 0$, 岩土塑性系数 $E > 0$, $D > 0$, $C < 0$ 。显然 $0 > E/C \neq B/D > 0$, 这表明式(8)的系数矩阵不成比例, 则式(8)的解需用两个线性无关的基矢量来表示:

$$\begin{vmatrix} d\varepsilon_p^p \\ d\varepsilon_q^p \end{vmatrix} = k_1 \vec{\xi}_1 + k_2 \vec{\xi}_2 \quad (9)$$

可见当岩土材料剪缩时, 岩土材料的塑性应变增量方向与应力状态之间不具有唯一性关系, 从式(9)可知, 此时岩土材料塑性应变增量方向有无穷多种可能。岩土材料的塑性应变增量方向如图 3 所示。令屈服面外法线方向 $\vec{n}$ 与基矢量 $\vec{\xi}_1$ 的方向一致。另一基矢量 $\vec{\xi}_2$ 因与 $\vec{\xi}_1$ 线性无关, 所以它必然不与 $\vec{n}(\vec{\xi}_1)$ 重合。必然存在一应力增量所导致的塑性应变增量方向与 $\vec{\xi}_2$ 重

合。那么当初始应力点 A_0 与 $\vec{\xi}_2$ 位于屈服面外法线方向的同一侧时, 则必有

$$W_D = (\sigma - \sigma_0)d\varepsilon^p = k_3 \cdot \vec{A_0 A} \cdot \vec{\xi}_2 < 0$$

式中 $k_3 > 0$ 表征塑性应变增量大小。这表明当土体剪缩时, Drucker 公设也是不适用于岩土材料的。

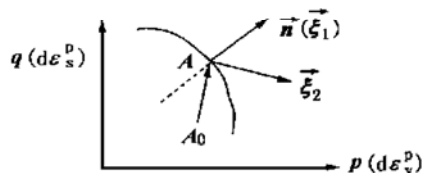


图 3 $p-q$ 平面塑性应变增量方向示意图

Fig. 3 Direction of strain increment in $p-q$ plane

岩土材料的剪胀(缩)性是岩土材料的最基本特性, 本节表明 Drucker 公设与岩土材料最基本的变形特性不符, 因而它是不适用于岩土材料的。

同理, 也可在应变空间对 Iliushin 公设进行讨论, 从而证明 Iliushin 公设对岩土材料也是不适用的。

3 经典塑性力学原理不适用于岩土材料的证明

经典塑性理论的核心思想在于塑性应变增量方向与应力状态之间存在唯一性关系, 即应力空间存在唯一的塑性势函数 Q , 则塑性应变增量可表述为:

$$d\varepsilon^p = d\lambda \partial Q / \partial \sigma \quad (10)$$

式中 $d\lambda$ 为塑性系数, 表征塑性应变增量的大小。

下面将从岩土的基本变形机制出发, 来证明岩土材料的塑性应变增量方向与应力状态之间不存在唯一性关系, 从而证明经典塑性力学原理不适用于岩土材料。

3.1 剪缩时经典塑性力学原理不适用于岩土材料的证明

2.2 节中已经证明当岩土材料剪缩时, 增量塑性应力应变关系的塑性系数矩阵不成比例。因而塑性应变增量方向与应力状态不具有唯一性关系, 而与应力增量有关。这表明当土体剪缩时, 岩土材料的塑性应变增量方向与应力状态之间不存在唯一性关系, 塑性应变增量不能象式(10)那样用唯一的塑性势函数来表述, 因而此时经典塑性力学原理不适用于岩土材料。

3.2 剪胀时经典塑性力学原理不适用于岩土材料的证明

土体剪胀时, 式(8)中塑性系数 $B < 0$, $E > 0$, $D > 0$, $C < 0$ 。

先假设 $E/C = B/D = I < 0$, 在某一应力状态分别取两应力增量:

$$(1) dp = 0, dq = k, \text{ 则对应塑性应变增量为}$$

$$\begin{aligned} d\epsilon_1^p &= \begin{vmatrix} d\epsilon_1^p \\ d\epsilon_1^p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dp \\ dq \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Bdq \\ Ddq \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} Bk \\ Dk \end{vmatrix} = Dk \begin{vmatrix} I \\ 1 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

(2) $dp = k, dq = 0$, 对应塑性应变增量为

$$\begin{aligned} d\epsilon_2^p &= \begin{vmatrix} d\epsilon_2^p \\ d\epsilon_2^p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dp \\ dq \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E dp \\ C dp \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} Ek \\ Ck \end{vmatrix} = Ck \begin{vmatrix} I \\ 1 \end{vmatrix} = \frac{C}{D} d\epsilon_1^p, \left(\frac{C}{D} < 0\right) \end{aligned} \quad (12)$$

它表明这两塑性应变增量的方向相反, 即此时塑性应变增量方向与应力状态不具有唯一性关系。反之当不满足 $E/C = B/D = I < 0$ 时, 即式(8)的系数矩阵不成比例, 根据2.2节可证明岩土材料的塑性应变增量方向与应力状态之间不具有唯一性关系, 这表明当土体剪胀时, 经典塑性力学原理也是不适用于岩土材料的。

岩土材料的剪胀(缩)性是岩土材料的最基本特性, 本节表明经典塑性力学原理与岩土材料最基本的变形特性不符, 因而它是不适用于岩土材料的。

同理, 也可在应变空间进行分析, 从而证明应变空间中的经典塑性力学原理对岩土材料也是不适用的。

4 岩土本构理论的几个重要问题研究

4.1 当前岩土建模理论评述

前两节已经证明了经典塑性力学原理是不适用于岩土材料, 那么基于传统塑性理论的岩土本构模型——单屈服面相关联流动模型是无法反映岩土基本变形机制, 是不合理的。单屈服面非相关联流动模型对传统塑性理论作了一定修正, 使计算的过大剪胀现象有一定的改善, 但它仍然是基于塑性应变增量方向与应力状态的唯一性假设, 只是塑性应变增量方向不再与屈服面正交而已, 上一节已严格证明了这一假设是不适用于岩土材料的, 因而它也是不合理的。正如沈珠江先生所指出的那样, 它们都没有摆脱经典塑性力学的框框^[17]。

对于多重屈服面模型(含双屈服面), 它的优点是当材料完全屈服时, 塑性应变增量方向与应力状态之间不再具有唯一性关系, 而与应力增量相关。但当土体部分屈服时, 类似于单屈服面模型, 此时塑性应变增量方向与应力状态之间必具有唯一性关系, 这是不完善的地方, 而且当前岩土实验并没有证明存在一个塑性应变增量方向与应力状态之间具有唯一性关系的区域。当前岩土本构模型中有几个关键地方是值得考虑的, 如屈服面的重数与确定方法, 是否可以采用相关联流动法则等。下面将进一步讨论。

4.2 屈服面重数的确定

根据传统塑性位势理论, 选用米赛斯屈服条件时,

塑性流动只发生在 π 平面的广义剪应力(q)方向上(即为 $Q = q$ 的法线方向), 这样就可以定义一个势函数 $Q = q$ 来描述材料的塑性变形特性。然而岩土体在不考虑主应力轴旋转时, 最一般情况下, 它存在 p 方向上的塑性体应变增量 $d\epsilon_p^p$, q 方向上的塑性剪应变增量 $d\epsilon_q^p$, θ_0 方向上的塑性剪应变增量 $d\epsilon_{\theta_0}^p$ 。这些塑性应变增量大小都与应力增量有关, 相互之间不存在比例关系, 从而使总塑性应变增量方向与应力增量有关, 即无法给出对应任一应力状态的唯一塑性势面。

当存在主应力轴旋转时, 塑性应变增量与应力不共主轴, 此时不仅存在主应力轴方向的塑性应变增量, 还存在使塑性应变增量主轴偏离主应力轴的塑性应变增量。显然此时仍在主应力空间中表述是不合适的。最一般情况下的塑性应变增量可以分解为六个线性无关方向上的分量, 即最一般情况下存在六个线性无关的塑性势函数, 这时塑性应变增量可表述为^[18]

$$d\epsilon^p = \sum_{i=1}^6 d\lambda_i \frac{\partial Q_i}{\partial \sigma} \quad (13)$$

式中 $Q_i (i = 1, \dots, 6)$ 分别表示六个线性无关的势函数; $d\lambda_i (i = 1, \dots, 6)$ 分别表示六个势函数法线方向上的塑性应变增量大小。

因而塑性势面的重数与塑性应变增量的自由度一致, 最多为6。在主应力空间表述时, 塑性势面重数为3。当在 $p-q$ 平面上表述时采用两个塑性势面才合理。屈服面与塑性势面对应, 重数显然一致。

4.3 相关联流动法则的不合理性

在多重屈服面模型中, 有一个争议较大的问题是, 是否应采用相关联流动法则, 有的全部采用相关联流动法则^[10], 有的全部采用非关联流动法则^[9], 有一部分采用相关联流动法则, 一部分采用非关联流动法则^[13]。因而有必要研究相关联流动法则的合理性。首先, 应指出的是, 传统塑性理论是根据 Drucker 公设得出相关联流动法则的, 本文已证明 Drucker 公设是不适用于岩土材料的, 因而岩土多重屈服面采用相关联流动法则是没有科学根据的。

殷宗泽等对采用相关联流动法则的多重屈服面模型的弹塑性矩阵性质进行了深入研究^[19, 20]。从多重屈服面模型的弹塑性矩阵性质就可以知道流动法则的合理性。下面以双屈服面模型为例, 说明相关联流动法则的问题所在。令双屈服面为

$$f_1(p, q) = 0, \quad f_2(p, q) = 0$$

则式(8)中塑性系数 B, C 为

$$B = C = \frac{1}{A_1} \frac{\partial f_1}{\partial p} \frac{\partial f_1}{\partial q} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial f_2}{\partial p} \frac{\partial f_2}{\partial q}$$

式中 A_1, A_2 为塑性模量。

上两节我们已经知道土体塑性系数 $C < 0$, 剪胀时 $B < 0$, 剪缩时 $B > 0$, 因而一般情况下岩土体不满足 $B = C$ 。而当多重屈服面采用相关联流动法则时, 一定存在 $B = C$, 这显然是不合理的。因而采用相关联流动法则是没有根据且是不合理的。

4.4 岩土屈服面讨论

基于经典塑性理论的 Drucker 公设, 可导出应力空间中屈服面具有唯一性、外凸性等特征。前面已经证明 Drucker 公设不适用于岩土材料, 那么岩土屈服面当然就不一定要满足这些特点。

土体不排水实验时, $p - q$ 平面上的有效应力路径可以近似为土体的体积屈服面。土体不排水实验 $p - q$ 平面的两种有效应力路径如图 4 所示。当土体在状态变换点(the phase transformation point) 处出现剪缩(软土、松砂) 时, 不排水有效应力路径将是外凸的, 此时若出现剪胀(密砂等), 不排水有效应力路径将拐向上^[21](如图 4 中虚线所示), 显然此时体积屈服面将不满足外凸性。

前面已经表明土体屈服面的重数与塑性应变增量的自由度一致, 当然不唯一。当前屈服面的一个重要问题是如何反映应力路径的影响。



图 4 不排水实验时 $p - q$ 平面的两种有效应力路径

Fig. 4 Two effective stress path of undrained tests in $p - q$ plane

5 结 论

本文从岩土材料基本力学性质出发, 对岩土本构理论的几个基本问题进行了深入研究, 得出如下结论:

- (1) Drucker 公设不适用于岩土材料。
- (2) 经典塑性力学原理不适用于岩土材料。
- (3) 基于传统塑性理论的单屈服面模型无论是否采用相关联流动法则都是无法反映岩土基本变形机制的, 当然是不合理的。
- (4) 对于多重屈服面模型, 屈服面重数与塑性应变增量自由度一致。
- (5) 相关联流动法则不适用于岩土材料。
- (6) 岩土屈服面可以是不外凸的, 也是不唯一的。

参考文献:

- [1] Roscoe K H, et al. On the yielding of soils[J]. Geotechnique, 1958, 14(2): 121~ 128.
- [2] Anandarajah A, Sobhan K, et al. Incremental stress- strain behav-

ior of granular soils[J]. J of Geomechanical Engineering, 1995, 121(1): 57~ 67.

- [3] 沈珠江, 盛树馨. 土的应力应变理论中的唯一性假设[J]. 水利水运科学研究, 1982, (2): 11~ 19.
- [4] Tatsuoka F, Sonada S, et al. Failure and deformation of sand in torsional shear[J]. Soils and Foundations, 1986, 26(4): 79~ 97.
- [5] 刘元雪, 郑颖人, 陈正汉. 含主应力轴旋转的土体一般应力应变关系[J]. 应用数学和力学, 1998, 19(5): 407~ 413.
- [6] 刘元雪. 含主应力轴旋转的土体一般应力应变关系[D]. 重庆: 后勤工程学院建筑工程系, 1997.
- [7] 刘元雪, 郑颖人. 考虑主应力轴旋转对土体应力应变关系影响的一种新方法[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(2): 45~ 47.
- [8] 郑颖人, 刘元雪. 岩土塑性力学的理论基础——广义塑性力学原理[J]. 中国学术期刊文摘(科技快报), 1998, 1(11): 1375~ 1377.
- [9] 沈珠江. 软土地基固结变形的弹塑性分析[J]. 中国科学(A 辑), 1985, (11): 1050~ 1060.
- [10] 殷宗泽. 一个土体的双屈服面应力-应变模型[J]. 岩土工程学报, 1998, 10(4): 64~ 71.
- [11] Zheng Yingren. Multi-yielding surface theory for soils[A]. Computer Methods and Advances in Geomechanics[C]. 1991. 715~ 720.
- [12] Lade P V, Kim M K. Single hardening constitutive model for frictional materials[J]. Computer & Geotechnics, 1988, (6): 1~ 47.
- [13] Kiyama S, Hasegawa T. A two-surface model with anisotropic hardening and nonassociated flow rule for geomaterials[J]. Soils and Foundations, 1998, 38(1): 45~ 59.
- [14] 曲圣年, 殷有泉. 塑性力学的 Drucker 公设与 Iliushin 公设[J]. 力学学报, 1981, (5): 95~ 101.
- [15] 黄速建. 塑性力学的稳定性公设的热力学原理[J]. 固体力学学报, 1988, 9(2): 95~ 101.
- [16] 殷有泉, 曲圣年. 弹塑性耦合和广义正交法则[J]. 力学学报, 1982, (1): 63~ 70.
- [17] 沈珠江. 现代土力学的基本问题[J]. 力学与实践, 1998, (6): 1~ 6.
- [18] 刘元雪, 郑颖人. 含主应力轴旋转的广义塑性位势理论[J]. 力学季刊, 2000, 21(1): 119~ 123.
- [19] 殷宗泽, 朱俊高, 卢海华. 土体弹塑性柔度矩阵与真三轴试验研究[A]. 叶书麟主编. 第七届全国土力学及基础工程大会会议论文集[C]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1994. 21~ 25.
- [20] 卢海华, 殷宗泽. 双屈服面模型的柔度矩阵的分析与改善[A]. 郑颖人, 等编. 第五届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集[C]. 武汉: 武汉测绘科技大学出版社, 1994. 139~ 144.
- [21] Yoshimine M, Ishihara K, Vargas W. Effects of principal stress direction and intermediate principal stress on undrained shear behaviour of sands[J]. Soils and Foundations, 1998, 38(3): 179~ 188.