

各向异性内摩擦材料强度准则的规范空间理论^{*}

Standard space theory of strength criterion for anisotropic internal-friction materials

郭少华

(中南工业大学资源环境与建筑工程学院, 长沙, 410083)

文 摘 利用固体力学规范空间理论, 研究了内摩擦材料的强度机理, 并从理论上给出了统一形式的各向异性强度准则, 其中强度参数的个数等于材料异性子空间的数目。对各向同性情况, 它退化成广义莫尔强度模型, 对简单压剪受力状态, 它退化成库仑强度模型。对工程常见各向异性, 文章给出了强度准则公式, 并详细讨论了强度参数的实验确定方法。最后给出了算例, 并与现有强度模型进行了数值比较。

关键词 内摩擦材料, 各向异性, 强度准则, 规范空间理论

中图法分类号 TU 452

文献标识码 A

文章编号 1000-4548(2000)03-0340-04

作者简介 郭少华, 男, 1960年生, 教授, 现为中南工业大学资源环境与建筑工程学院副院长。主要从事结构工程与岩土工程方面的教学与研究工作。

Guo Shaohua

(College of Resource, Environment and Civil Engineering, Central South University of Technology, Changsha, 410083)

Abstract The mechanism of strength for anisotropic internal-friction materials is studied here by means of the standard space theory of solid mechanics. A generalized strength criterion is given, in which the number of strength coefficients is equal to that of anisotropic subspaces of material. In isotropic case, it degenerates into the generalized Mohr-Coulomb's Model. The formulae of strength criterion for common anisotropic materials are deduced and the method to determine the strength coefficients is presented. Finally, a calculating example is given and compared with the results of the existing strength model.

Key words internal-friction materials, anisotropy, strength criterion, standard space theory

异性强度理论。

1 引 言

各向异性内摩擦材料泛指岩石、混凝土等土木结构材料。尤其岩石材料, 其强度性能的两大特点是各向异性及内摩擦效应^[1]。目前, 工程上广泛采用的库仑-莫尔准则、格里菲斯准则及其改进型^[2,3], 只是在各向同性的条件下, 解决了材料强度的内摩擦效应问题, 而材料强度的各向异性在现有的强度模型中还没有成熟的理论成果。但是另一方面, 复合材料的领域中已证明是较为有效的蔡-希尔、蔡-吴各向异性强度模型^[4]却不能够运用在土木结构材料中, 原因是它们不能解决内摩擦效应问题。各向异性是土木结构材料固有的本性, 而内摩擦效应是土木结构材料所处的特殊力学状态的产物。因此, 如果能够在材料的异性子空间中分析、考查应力状态及其内摩擦效应, 就能够将二者统一在一个理论框架中, 解决土木结构材料强度理论问题。规范空间理论就提供了这样的理论基础^[5,6]。本文正是在这一理论基础上, 并综合现有的岩土强度理论与实验成果, 提出了一种全新的各向

2 规范空间理论

几何表象下材料的广义虎克定律的矩阵形式为

$$\sigma = C\varepsilon \quad (1)$$

它满足本征方程

$$(C - \lambda I)\varphi = 0 \quad (2)$$

这里 λ 和 φ 分别是弹性系数矩阵 C 的本征值和对应的本征矢。前者称为本征弹性模量, 它是坐标无关的。后者称为规范空间, 表征材料的异性主方向。这样就可以将几何表象下的弹性系数矩阵在力学表象下进行谱分解

$$C = \Phi \Lambda \Phi^T \quad (3)$$

这里 Φ 是材料模态矩阵, 它是正交对称阵。 Λ 是本征弹性矩阵, 它是对角阵。因此, 在规范空间中, 广义虎克定律式(1)成为正则形式:

$$\sigma_i^* = \lambda_i^* \varepsilon_i^* \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (4a)$$

或

$$\sigma^* = \Lambda \varepsilon^* \quad (4b)$$

式(4)即为模态虎克定律, 其中模态应力矢和模态应变矢分别是

$$\sigma^* = \Phi^T \sigma \quad (5)$$

$$\varepsilon^* = \Phi^T \varepsilon \quad (6)$$

方程(4a, b)是6个无耦合的方程, 所以在规范空间的力学表象中, 材料的力学性能以6个普通的标量虎克定律描述。

3 规范空间强度理论

在规范空间理论中, 各向异性子空间实际上代表了材料各阶的模态变形。而模态应力则代表了驱动模态变形发展的各阶应力状态, 其性质必然与模态变形相一致。研究表明, 材料的模态变形由二类基本变形状态组成, 一类是剪切变形状态, 另一类是体积变形状态^[7]。密赛斯屈服准则指出: 对金属这类无内摩擦效应或少摩擦效应的材料, 其强度指标完全由剪应力控制。而库伦-莫尔强度准则指出, 对土木工程这类有内摩擦效应的材料, 虽然破坏仍然发生在剪切空间, 但却是剪切应力和体积应力共同作用的结果。因此, 在复杂应力状态下的土木工程材料的破坏必须综合考虑所有存在的体积应力和剪切应力的耦合效应。对一般的各向异性情况($M=6$), 可以用6个独立的参数 $A_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 表征材料的各向异性强度。因此, 归一化后的各向异性强度准则, 可以写成如下形式。

$$\sum_{i=1}^6 A_i \sigma_i^* = 1 \quad (7)$$

然而在一般各向异性情况下, 往往不止一个剪切变形空间存在。因此, 在使用公式(7)时, 必须事先明确确定材料的破坏空间。根据最小本征弹性空间破坏原理^[8], 各向异性材料必将在最小本征弹性对应的异性子空间中发生破坏。又由于最小本征弹性对应的异性子空间必为剪切变形空间, 因此, 式(7)就能够写成如下的统一形式的各向异性强度准则。

$$\sigma_6^* + \sum_{i=1}^5 \omega_{6i} \sigma_i^* = c_6 \quad (8)$$

其中 c_6 是最小本征弹性对应的异性子空间的抗剪强度, $\omega_{6i} (i=1, 2, \dots, 5)$ 是与各阶模态应力相对应的广义摩擦系数。

应该指出的是, 强度公式(8)反映了剪切破坏机理, 它是应力型的判据, 而非能量型的判据。因此可以考虑拉压应力数学符号上的差别, 尤其适于研究岩石类材料的强度问题。此外, 工程计算中, 可以采用

模态截断技术, 将式(8)进一步简化, 即可仅考虑压剪耦合影响, 忽略剪-剪耦合影响。这样式(8)可写成:

$$\sigma_6^* + \sum_{i=1}^k \omega_{6i} \sigma_i^* = c_6 \quad (9)$$

这里 k 为体积变形模态的阶数。

4 几个具体形式

4.1 各向同性

各向同性材料有两个异性子空间, 其中第一子空间为等体积变形模态, 第二子空间为剪切变形模态, 其空间结构为

$$W = W_1^{(1)}(\varphi_1) \oplus W_2^{(5)}(\varphi_2, \dots, \varphi_6) \quad (10)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\sqrt{3}}{3} [1, 1, 1, 0, 0, 0]^T \\ \varphi_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} [0, 1, -1, 0, 0, 0]^T \\ \varphi_3 &= \frac{\sqrt{6}}{6} [2, -1, -1, 0, 0, 0]^T \\ \varphi_i &= \zeta_i \quad i = 4, 5, 6 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

这里 ζ_i 是第 i 个元素为 1, 其余元素为 0 的列矢。

这样强度准则式(7)和(8)只有两项之和, 两个强度参数, 即

$$A_1 \sigma_1^* + A_2 \sigma_2^* = 1 \quad (12)$$

$$\sigma_2^* + \omega_{21} \sigma_1^* = c_2 \quad (13)$$

其中

$$\sigma_1^* = \frac{\sqrt{3}}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (14)$$

$$\sigma_2^* = \sqrt{\frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (15)$$

式(12)正是广义莫尔强度公式, 而对简单压剪受力条件, 它成为库伦强度公式。此时, 系数 ω_{12} 退化为库伦摩擦系数, 系数 c_2 退化为纯剪切强度。

4.2 横观各向同性

大多数岩石材料都呈横观各向同性。这种情况下材料有四个异性子空间, 其中第一和第二子空间为体积变形模态, 第三和第四子空间为剪切变形模态。其空间结构为

$$W = W_1^{(1)}(\varphi_1) \oplus W_2^{(1)}(\varphi_2) \oplus W_3^{(2)}(\varphi_3, \varphi_6) \oplus W_4^{(2)}(\varphi_4, \varphi_5) \quad (16)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \beta_1 [1, 1, \alpha_1, 0, 0, 0]^T \\ \varphi_2 &= \beta_2 [1, 1, \alpha_2, 0, 0, 0]^T \\ \varphi_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2} [1, -1, 0, 0, 0, 0]^T \\ \varphi_i &= \zeta_i \quad i = 4, 5, 6 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} \beta_i &= \frac{s_{13}}{\sqrt{(\mu_i - s_{11} - s_{12})^2 + 2s_{13}^2}} \\ \alpha_i &= \frac{\mu_i - s_{11} - s_{12}}{s_{13}} \quad i = 1, 2 \\ \mu_{1,2} &= \frac{s_{11} + s_{12} + s_{33}}{2} \pm \\ &\quad \sqrt{\left(\frac{s_{11} + s_{12} - s_{33}}{2}\right)^2 + 2s_{13}^2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

其中 s_{ij} 是材料柔度矩阵元素。

这样强度准则式(8)有 4 项之和, 4 个强度参数, 即

$$\sigma_4^* + \sum_{i=1}^3 \omega_{4i} \sigma_i^* = c_4 \quad (19)$$

其中

$$\sigma_i^* = \beta_i (\alpha_i + \alpha_j) + \beta_i \alpha_i \alpha_j \quad i = 1, 2 \quad (20)$$

$$\sigma_3^* = \sqrt{\frac{1}{2} (\alpha_x - \alpha_y)^2 + 2\tau_{xy}^2} \quad (21)$$

$$\sigma_4^* = \sqrt{2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{xz}^2} \quad (22)$$

当采用模态截断技术进行简化计算时, 可忽略剪应力 σ_3^* 的影响。

4.3 平面正交各向异性

平面正交各向异性有三个异性子空间, 其中第一和第二子空间为体积变形模态, 第三子空间为剪切变形模态, 其空间结构为

$$W = W_1^{(1)}(\varphi_1) \oplus W_2^{(1)}(\varphi_2) \oplus W_3^{(1)}(\varphi_3) \quad (23)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \eta_1 [1, 1, 0]^T \\ \varphi_2 &= \eta_2 [1, 1, 0]^T \\ \varphi_3 &= [0, 0, 1]^T \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} \eta_i &= \frac{c_{13}}{\sqrt{(\lambda - c_{11})^2 + c_{12}^2}} \\ \gamma_i &= \frac{\lambda - c_{11}}{c_{12}} \quad i = 1, 2 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{c_{11} + c_{22}}{2} \pm \\ &\quad \sqrt{\left(\frac{c_{11} - c_{22}}{2}\right)^2 + c_{12}^2} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

其中 c_{ij} 是材料弹性矩阵元素。

这样, 强度准则式(8)有 3 项之和, 3 个强度参数, 即

$$\sigma_3^* + \omega_{31} \sigma_1^* + \omega_{32} \sigma_2^* = c_3 \quad (26)$$

其中

$$\sigma_1^* = \eta_1 (\gamma_1 \alpha_x + \alpha_y) \quad (27)$$

$$\sigma_2^* = \eta_2 (\alpha_x + \gamma_2 \alpha_y) \quad (28)$$

$$\sigma_3^* = \tau_{xy} \quad (29)$$

5 强度参数的实验确定方法

以各向同性为例, 来说明规范空间强度理论参数的实验确定方法。各向同性有两个独立的强度参数, 可通过一组独立的实验确定。

方案 1 单轴拉伸与压缩试验, 设材料抗拉强度 R_t , 抗压强度 R_c 。

$$\sigma_1^* = \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_1 \quad (30)$$

$$\sigma_2^* = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{sign}(\sigma_1) \quad (31)$$

这里 $\text{sign}()$ 是数学符号函数, 拉伸取正, 压缩取负, 代入强度准则式(7), 求得:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \sqrt{\frac{3}{4}} \left(\frac{R_c - R_t}{R_c R_t} \right) \\ A_2 &= \sqrt{\frac{3}{8}} \left(\frac{R_c + R_t}{R_c R_t} \right) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

方案 2 单轴拉伸与纯剪试验, 设剪切强度 S_c , 由强度准则式(7)求得与上式相同结果, 并且有:

$$S_c = \sqrt{\frac{4}{3}} \left(\frac{R_c R_t}{R_t + R_c} \right) \quad (33)$$

式(33)说明, 对各向同性材料, 抗拉强度、抗压强度与抗剪强度三者是不独立的。该式与岩石材料实验结果^[9]基本相符。

方案 3 单轴压缩与纯剪试验, 得到与方案 1 和方案 2 相同的结果。

6 算 例

这里给出具有单组节理的片岩在单轴压应力作用下, 其单轴抗压强度随加载方向与片理面(即节理面)之间夹角 θ 而变化的情况。对这一受力状态

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \alpha_x \cos^2 \theta \\ \sigma_2 &= \alpha_x \sin^2 \theta \\ \tau_{12} &= -\alpha_x \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

蔡-希尔强度公式变为

$$\alpha_x = \frac{1}{\left(\frac{\cos^2 \theta}{X_c}\right)^2 + \left(\frac{\sin^2 \theta}{Y_c}\right)^2 - \left(\frac{\sin^2 \theta}{2X_c}\right)^2 + \left(\frac{\sin^2 \theta}{2S_c}\right)^2} \quad (35)$$

本文中, 强度公式为

$$\alpha_x = \frac{S_c}{f_1(\theta) + f_2(\theta) - \sin \theta \cos \theta} \quad (36)$$

$$f_1(\theta) = \omega_{31} \eta_1 (\gamma_1 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \quad (37)$$

$$f_2(\theta) = \omega_{32} \eta_2 (\cos^2 \theta + \gamma_2 \sin^2 \theta) \quad (38)$$

结晶片岩的材料参数见文献[9], 图1给出了抗压强度和加载方向与片理间夹角关系的实验结果、蔡-希尔公式计算结果和本文公式计算结果。

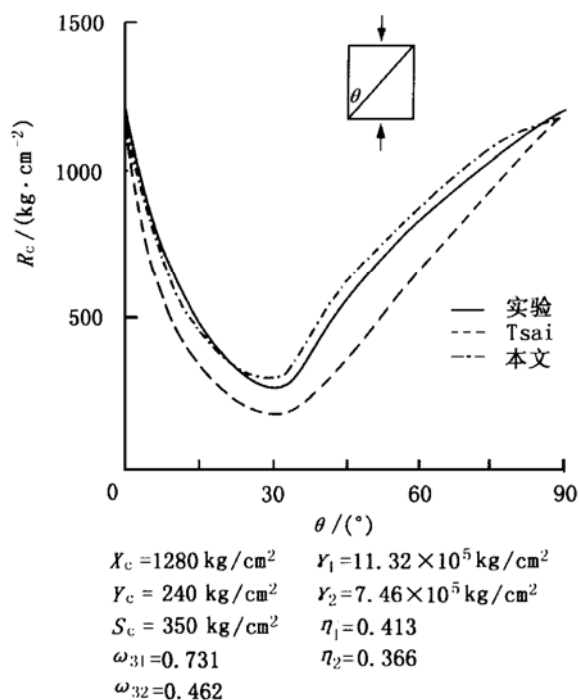


图1 结晶片岩强度的实验与计算曲线

Fig. 1 Experimental and calculated strength curves for crystal slice rock

7 结 论

本文从异性子空间应力分析的角度, 给出了土木结构材料各向异性强度准则的理论公式, 它不仅包含了库仑、莫尔等经典经验性公式的全部结果, 而且给出了不同异性材料统一的强度准则公式。它的参数比蔡-希尔各向异性模型强度参数要少, 而且物理意义明确, 易于实验确定。计算表明, 本文强度模型既能处理材料的各向异性、也能处理材料的内摩擦效应, 对土木及岩土工程具有重要的意义。

参 考 文 献

- 1 郭少华. 混凝土破坏理论研究进展. 力学进展, 1993, **23** (4): 290~ 299
- 2 Bresler B, Pister K S. Failure of plain concrete under combined stresses. Trans Am Soc Civ Engrs, 1957, **122**: 1049~ 1068
- 3 Murrell S A F. The theory of the propagation of elliptical Griffith cracks under various conditions of plane strain or plane stress. Br J Appl phys, 1964, **15**: 1195~ 1223
- 4 Tsai S W, Wu E M. A general Theory of strength for anisotropic materials. J Composite Materials, 1971, **11**: 137~ 143
- 5 陈绍汀. 弹性力学的几个概念和一种应用. 力学学报, 1984, **16**(3): 259~ 274
- 6 郭少华. 各向异性非线性固体力学的规范空间理论. 应用力学学报, 1996, **13**(1): 69~ 76
- 7 Guo Shaohua. Eigen theory of elastic dynamics for anisotropic solids. Trans nonferrous metal society of China, 1999, **9**(2): 327~ 331
- 8 郭少华. 规范空间理论的破坏准则及经典形式. 中南工业大学学报, 1999, **30**(2): 129~ 132
- 9 谭学术等. 复合岩体力学理论及其应用. 北京: 煤炭工业出版社, 1994. 88~ 117

参考文献著录规则

包括本刊在内的我国大部分期刊普遍采用国家标准规定的顺序编码制的文献著录规则。

所谓顺序编码制, 是指对引用的文献, 按它们在论著中出现的顺序, 连续编码, 将序号置于方括号内。在论著最后列出连续排列、与正文一一对应的文献, 每一条文献都应作到项目完整、内容准确。而且项目内容次序及使用的标点应严格符合国标(期刊的征稿简则)的规定。注意: 文献项目之间使用的标点是具有特定意义的著录标点, 不要用语言文字的标点符号的概念去理解。著录标点不得随意改动和省略。