

塑性力学中的分量理论——广义塑性力学^{*}

Componental plastic mechanics——generalized plastic mechanics

郑颖人

孔 亮

(后勤工程学院军事土木工程系, 重庆, 400041) (宁夏大学物电系, 银川, 750021)

文 摘 实验表明, 经典塑性力学难以反映岩土材料的变形机制, 原因在于经典塑性力学作了传统塑性势假设、关联流动法则假设与不考虑应力主轴旋转的假设。广义塑性力学放弃了这些假设, 采用了分量理论, 由固体力学原理直接导出塑性公式, 它既适用于岩土材料, 也适用于金属。

关键词 塑性力学, 塑性势, 屈服面, 应力主轴旋转

中图法分类号 TU 452

文献标识码 A

文章编号 1000-4548(2000)03-0269-06

作者简介 郑颖人, 男, 1933年生, 后勤工程学院教授, 博士生导师。从事隧道力学、岩土塑性力学、地下工程与区域性土研究。

Zheng Yingren

(Department of Military Civil Engineering, Logistical Engineering University, Chongqing, 400041)

Kong Liang

(Department of Physics & Electrical Information Engineering, Ningxia University, Yinchuan, 750021)

Abstract It's shown by experiments that the classic plastic mechanics is difficult to reflect the real deformation mechanism of geomaterials. The reason is that the classic plastic mechanics is based on the hypothesis of the traditional potential theory, the hypothesis of the associated flow rule and the hypothesis of not considering rotation of principal stress. The generalized plastic mechanics gives up all these hypotheses and gets all its plastic formulas from solid mechanics directly, so it can be used for both geomaterials and metals.

Key words plastic mechanics, plastic potential, yield surface, rotation of principal stress

1 前 言

岩土塑性力学的兴起促进了塑性力学的发展, 由郑颖人、沈珠江、杨光华等诸多国内岩土力学界人士的工作, 广义塑性力学已在我国悄然兴起。它是由于经典塑性力学不适应岩土类摩擦材料的变形机制而产生的。本文指出, 经典塑性力学中作了如下3个假设: 传统塑性势假设、正交流动法则假设、不考虑应力主轴旋转的假设, 因而它只能适应金属而不能适应岩土类材料。广义塑性力学放弃上述假设, 从固体力学原理角度导出塑性势、塑性势面与屈服面关系以及考虑了应力主轴的旋转。在不考虑应力主轴旋转情况下, 广义塑性力学采用3个应力分量作为塑性势^[1,2], 由此得出3个分量塑性势面, 它确定了3个塑性应变增量分量的方向。广义塑性力学要求屈服面与塑性势面必须相应, 而不要求相等, 通过试验获得与塑性势面相应的3个屈服面, 它确定了3个塑性应变增量分量的大小。因而广义塑性力学可归结为塑性力学中的分量理论, 是塑性力学中的一般方法。经典塑性力学是在某些假设条件下的简单情况, 此时可不通过分量而直接求出塑性应变增量总量的方向与大小, 是广义塑性力学的特殊情况。

实际上, 国内外岩土界已在广泛应用多重屈服面模型与非关联流动法则, 标志着广义塑性力学实际上已经在应用, 本文只是将其发展成为系统理论。

2 经典塑性力学与岩土变形机制的矛盾

岩土属于摩擦材料, 与金属有很大不同, 除有塑性剪应变外, 还有塑性体应变。当前采用的岩土本构关系多数从经典塑性理论脱胎而出, 难以适应岩土变形机制, 导致理论结果与土工试验结果有诸多矛盾。下述几点矛盾已逐渐成为国内外岩土力学界的共识。

(1) 按照经典塑性力学中的传统塑性势理论, 塑性应变增量方向唯一地取决于应力状态, 而与应力增量无关。然而试验证实, 岩土塑性应力增量的方向不仅与应力有关, 还与应力增量密切相关, 表明岩土不遵守传统塑性势理论。

(2) 经典塑性力学要求服从关联流动法则, 即要求塑性势面与屈服面相同。但试验证明, 岩土材料并不遵守关联流动法则。应用关联流动法则, 反而会使莫尔-库仑一类的屈服面出现远大于实际的剪胀现象。

* 国家自然科学基金资助项目(No. 19672073)

到稿日期: 1999-07-19

(3) Matsouka 等人的试验证实, 尽管主应力的方向相同, 但如果应力主轴发生旋转, 即主应力轴方向变化也会产生塑性变形。而按经典塑性力学却是算不出这种变形的, 表明经典塑性力学没有考虑应力主轴旋转而难以适应实际岩土工程。

3 经典塑性力学中的 3 条假设

上述矛盾反映了经典塑性力学作了如下 3 条假设, 这些假设能较好适应金属却难以适应岩土。

(1) 传统塑性势假设。众所周知, 传统塑性势是从弹性势借用过来的, 并非由固体力学原理导出。因此它是一条假设。按传统塑性势公式, 即可得出塑性主应变增量存在如下比例关系:

$$d\varepsilon_1 : d\varepsilon_2 : d\varepsilon_3 = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_1} : \frac{\partial Q}{\partial \sigma_2} : \frac{\partial Q}{\partial \sigma_3} \quad (1)$$

式中 Q 为塑性势函数。可推证塑性主应变增量与主应力增量有如下关系:

$$d\varepsilon_i = [A_p]_{3 \times 3} d\sigma_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

由式(1)知, 式(2)中矩阵 $[A_p]$ 中的各行元素必成比例, 即有

$$a_{1i} : a_{2i} : a_{3i} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_1} : \frac{\partial Q}{\partial \sigma_2} : \frac{\partial Q}{\partial \sigma_3} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3)$$

且 $[A_p]$ 的秩为 1, 它只有一个基向量, 表明这种情况存在一个势函数。由式(1)或(2)或传统塑性势理论, 都可推知塑性应变增量的方向只与应力状态有关, 而与应力增量无关, 所以它的方向可由应力状态事先确定。

可见, 传统塑性势假设, 数学上表现为 $[A_p]$ 中各行元素成比例及 $[A_p]$ 的秩为 1, 物理上表现为存在一个势函数, 且塑性应变增量方向与应力具有唯一性。

(2) 关联流动法则假设, 即设屈服面与塑性势面相同。无论在德鲁克塑性公设提出之后还是之前, 经典塑性力学中都一直引用这条假设。

试验表明, 金属材料符合这一假设, 而岩土类材料不符合这一假设, 这在国际上已经成为共识。关于德鲁克塑性公设的适用性国内外已有不少学者作过评述, 笔者认为德鲁克公设本来是作为弹塑性稳定材料的定义提出来的, 即对于稳定材料在每一应力循环中外载所作的附加应力功为非负, 并非普遍客观定律。按功的定义, 应力循环中外载所作的真实功^[3] 应为(图 1)

$$W = \oint_{\sigma_{ij}^0} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \geq 0 \quad (4)$$

式(4)表明, 应力循环中, 外载所作的弹性功为零, 塑性功为非负值, 显然式(4)符合热力学定律。同

时, 也表明应力循环中实际所作的功与起点应力 σ_{ij}^0 无关。附加应力功是达到塑性时的应力 σ_{ij} 与起点应力 σ_{ij}^0 之差与应变的乘积, 这不符合功的定义。可见附加应力功不是物理存在的真实功, 只能理解为应力循环中外载所作的真实功与应力起点 σ_{ij}^0 所作的虚功之差, 因而不能用热力学定律来保证它必为非负。是正是负与 σ_{ij}^0 的位置密切相关, 也就是只有在一定条件下才能保证附加应力功为非负(图 1)

$$\oint_{\sigma_{ij}^0} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\varepsilon_{ij} \geq 0 \quad (5)$$

现用一张以往用来推论塑性应变增量与屈服面正交的图(见图 2)来说明附加应力功为非负的条件。

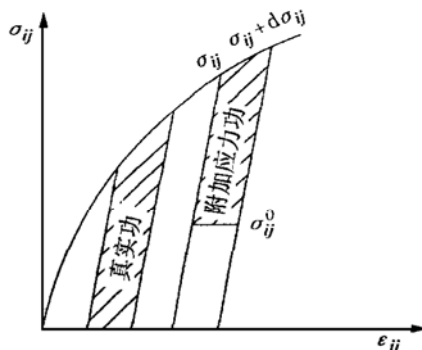


图 1 应力循环中外载所作真实功与附加应力功
Fig. 1 Real work of load and work of appended stress in stress cycle

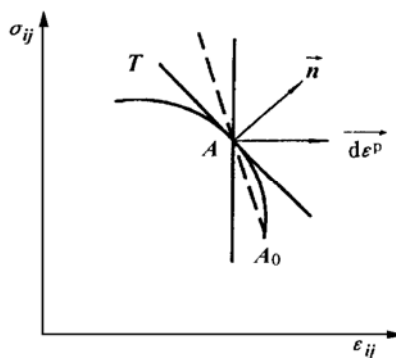


图 2 附加应力功为非负的条件

Fig. 2 Conditions of non-negative appended stress work

设图 2 中加载面在 A 点的塑性应变增量为 $d\varepsilon^p$, 过 A 点作一条与 $d\varepsilon^p$ 垂直的线称为势面线。 A 点的法向矢量为 $\vec{n}$ (假设加载面在该点光滑), 作一个切平面 T 与 $\vec{n}$ 垂直。从图 2 可见, 如 A_0 点落在势面线与屈服线之间区域内时, 必有 $\vec{A_0A} \cdot d\varepsilon^p < 0$, 即 $\vec{A_0A}$ 与 $d\varepsilon^p$ 的夹角大于 90° 。反之, 当 A_0 同时落在势面线与屈服线曲线之间的区域时, 则能保证 $\vec{A_0A} \cdot d\varepsilon^p \geq 0$, 即 $\vec{A_0A}$ 与 $d\varepsilon^p$ 的夹角小于或等于 90° 。由上可见, 只有当 A_0 点始终落在势面线与屈服曲线之间的区域时, 即势面与屈服面相同同时才能保证附加应力功为非负。

试验表明, 金属的塑性势面与屈服面基本一致, 适应德鲁克公设。岩土类材料的塑性势面与屈服面不一致, 它不适应德鲁克公设。

(3) 不考虑应力主轴旋转假设。经典塑性力学中假设应变主轴与应力主轴始终重合, 即不考虑应力主轴旋转。这种情况下, 屈服方程可以写成3个应力张量不变量的函数。当只有应力主轴旋转时, 应力不变量不变, 因此不会产生塑性变形。然而实际岩土工程, 由于应力主轴旋转会产生不容忽视的塑性变形。

正是由于上述假设, 使经典塑性力学难以反映岩土变形机制。因而放弃上述假设, 建立基于固体力学原理的广义塑性力学十分必要。它能反映岩土变形机制而可成为岩土塑性力学的理论基础。

4 广义塑性势理论与传统塑性势理论的关系

广义塑性力学放弃了传统塑性势的假设, 用固体力学原理直接导出广义塑性势。文献[4]采用张量定律导出了不考虑应力主轴旋转时, 即设 σ 应力主轴与 $d\mathbf{e}^p$ 主轴 $d\sigma$ 主轴共轴时的广义塑性势

$$d\mathbf{e}_y^p = \sum_{k=1}^3 d\lambda_k \frac{\partial Q_k}{\partial \alpha_y} \quad (6)$$

式中 Q_k 为3个线性无关的势函数, 即取3个应力分量(3个应力张量不变量)作势函数; $d\lambda_k$ 为3个塑性系数。应力分量可以任取, 如取 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 为正交直线坐标; (p, q, θ_0) 为正交曲线坐标; (I_1^0, I_2^0, I_3^0) 为曲线坐标。

式(6)表明在一般情况下 $[A_p]$ 需要3个塑性势函数才能确定。当3个塑性主应变成比例时或 $[A_p]$ 的秩为1时, 式(6)就变成传统塑性势公式。

5 塑性势面与屈服面关系

塑性力学中, 塑性势面主要用来确定塑性应变增量的方向。经典塑性力学中, 塑性应变增量的总量方向, 可由一个塑性势面唯一地确定。广义塑性力学中, 塑性应变增量总量的方向无法事先知道, 因为它不仅与应力状况有关, 还与应力增量有关。因此它需要用3个分量塑性势面来确定3个塑性应变增量分量的方向。可见经典塑性力学采用总量势面, 而广义塑性力学必须采用分量势面, 这正是两者的区别。

广义塑性力学中, 势函数可任取一种形式的应力不变量, 通常取 p, q, θ_0 三个不变量为势函数, 即有 $Q_1 = p, Q_2 = q, Q_3 = \theta_0$ 。则按式(6)有

$$d\mathbf{e}_y^p = d\lambda_1 \frac{\partial p}{\partial \alpha_y} + d\lambda_2 \frac{\partial q}{\partial \alpha_y} + d\lambda_3 \frac{\partial \theta_0}{\partial \alpha_y} \quad (7)$$

由式(7)可得

$$d\lambda_1 = d\mathbf{e}_v^p, d\lambda_2 = d\mathbf{e}_q^p, d\lambda_3 = d\mathbf{e}_{\theta_0}^p \quad (8)$$

式中 $d\mathbf{e}_v^p, d\mathbf{e}_q^p, d\mathbf{e}_{\theta_0}^p$ 分别为塑性体应变增量, q 方向与 θ_0 方向的塑性剪应变增量。

屈服面主要用来确定塑性应变增量的大小, 即3个塑性系数 $d\lambda_k$ 。经典塑性力学中, 用它来确定塑性应变增量总量的大小 $d\lambda$ 。而广义塑性力学中, 需用3个分量屈服面来确定3个塑性应变增量分量的大小 $d\lambda_k$ 。按照一般力学概念及式(7)~(8), 屈服面必须与塑性势面对应, 亦即每个分量屈服面必须分别与相应分量塑性势面对应, 因为每个分量屈服面只确定着相应势面塑性应变增量的大小, 而与其它势面无关。例如塑性势面取 p , 则对应的屈服面必须是以 $\mathbf{e}_v^p$ 为硬化参量的等值面(称体积屈服面), 由此方能求出 $d\lambda_1$ 。若取 p, q, θ_0 为塑性势面, 则分别对应体积屈服面、 q 方向剪切屈服面与 θ_0 方向剪切屈服面; 若取 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为塑性势面, 则分别对应 $\mathbf{e}_1^p, \mathbf{e}_2^p, \mathbf{e}_3^p$ 三个塑性主应变屈服面, 并由它们分别确定 $d\lambda_1, d\lambda_2, d\lambda_3$, 即3个塑性应变增量分量的大小。

若已知体积屈服面 f_v, q 方向与 θ_0 方向的剪切屈服面 f_q 与 f_{θ_0} , 即

$$\left. \begin{aligned} f_v &= f_v(\alpha_y, \mathbf{e}_v^p) \\ f_q &= f_q(\alpha_y, \mathbf{e}_q^p) \\ f_{\theta_0} &= f_{\theta_0}(\alpha_y, \mathbf{e}_{\theta_0}^p) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中 $\mathbf{e}_v^p, \mathbf{e}_q^p, \mathbf{e}_{\theta_0}^p$ 为塑性体应变、 q 方向与 θ_0 方向塑性剪应变, 即分别为与屈服面含义相应的硬化参量。

当采用等向强化模型时, 式(9)可转化为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_v^p &= f_v(\alpha_y) = f_v(p, q, \theta_0) \\ \mathbf{e}_q^p &= f_q(\alpha_y) = f_q(p, q, \theta_0) \\ \mathbf{e}_{\theta_0}^p &= f_{\theta_0}(\alpha_y) = f_{\theta_0}(p, q, \theta_0) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式(9)与式(10)是等同的, 它们都能反映应力状态与加载历史的影响, 但不能反映应力路径的影响。对式(10)两边进行微分得^[2,5]

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{e}_v^p &= \frac{\partial f_v}{\partial p} dp + \frac{\partial f_v}{\partial q} dq + \frac{\partial f_v}{\partial \theta_0} d\theta_0 = d\lambda_1 \\ d\mathbf{e}_q^p &= \frac{\partial f_q}{\partial p} dp + \frac{\partial f_q}{\partial q} dq + \frac{\partial f_q}{\partial \theta_0} d\theta_0 = d\lambda_2 \\ d\mathbf{e}_{\theta_0}^p &= \frac{\partial f_{\theta_0}}{\partial p} dp + \frac{\partial f_{\theta_0}}{\partial q} dq + \frac{\partial f_{\theta_0}}{\partial \theta_0} d\theta_0 = d\lambda_3 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式(11)表明, 塑性应变增量 $d\mathbf{e}_v^p$ 只由体积屈服面求出, 而与剪切屈服面无关, 反之亦然。同时还可看出, 广义塑性力学中可考虑剪胀现象等交叉影响, 如剪应力增量 dq 与 $d\theta_0$ 都会产生体积变形。通过上述分析可见, 屈服面与塑性势面总是相关的。但相关是指两者必

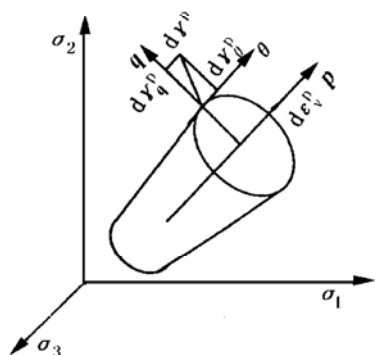


图3 塑性应变增量的方向

Fig. 3 Directions of plastic strain increment

须相应, 而不一定相同。相应是一般原则, 相同是特殊情况。例如经典塑性力学中不考虑塑性体变, 子午平面上的塑性势面为 q 面, 屈服面为 q 方向的剪切屈服面, 两个面均为平行 p 的水平线, 既相应又相同。相应是塑性理论要求, 相同则是金属材料的特殊情况, 因而可采用关联流动法则。而对岩土材料则要求两个面相应, 不要求相同, 一般采用非关联流动法则。还应指出, 广义塑性力学中的分量塑性势面是已知的, 而当前采用的非关联流动法则中, 势面是主观给定的。

6 广义塑性力学中的应力-应变关系

广义塑性力学中的应力-应变关系, 通常可先求弹塑性柔度矩阵 $[C_{ep}]$, 然后求逆得弹塑性刚度矩阵 $[D_{ep}]$ 。但也可直接导出 $[D_{ep}]$ 的一般表达式, 推导详见文献[6]。广义塑性力学中, 应力-应变关系为

$$\{d\sigma\} = ([D] - [D]) \left| \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right|_{6 \times 3} \cdot [a_{kl}]_{3 \times 3}^{-1} \left| \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right|_{3 \times 6}^T [D] \{d\epsilon\} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } \left| \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right|_{6 \times 3} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial \sigma} & \frac{\partial Q_2}{\partial \sigma} & \frac{\partial Q_3}{\partial \sigma} \end{bmatrix}; \quad \left| \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right|_{3 \times 6}^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} & \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} & \frac{\partial f_3}{\partial \sigma} \end{bmatrix}^T; \quad [a_{kl}]_{3 \times 3} \text{ 矩阵中元素 } a_{k1} = \\ &= \left| \frac{\partial f_k}{\partial \sigma} \right|_{3 \times 3}^T [D] \left| \frac{\partial Q_1}{\partial \sigma} \right| + \delta_{k1} A_k, \text{ 其中 } \delta_{k1} = \begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases}, A_k \\ &= \frac{\partial f_k}{\partial H_{ak}} \left| \frac{\partial H_{ak}}{\partial \epsilon_k^p} \right| \left| \frac{\partial Q_k}{\partial \sigma} \right| \quad (k=1, 2, 3)。 \end{aligned}$$

即有

$$[D_{ep}] = [D] - [D] \left| \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right|_{6 \times 3} \cdot [a_{kl}]_{3 \times 3}^{-1} \left| \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right|_{3 \times 6}^T [D] \quad (13)$$

单屈服面情况下, 式(13)即变化为传统塑性力学中的弹塑性矩阵表达式。这也说明传统塑性力学是广义塑性力学的一个特例。

7 包含应力主轴旋转在内的广义塑性位势理论

适用岩土的广义塑性力学应考虑应力主轴的旋转, 即考虑剪切应力分量 $d\tau_{ij}$ 引起的应力主轴旋转。为此, 文献[7]导出了 $d\tau_{ij}$ 与应力主轴旋转角增量 $d\alpha_i$ 的关系式

$$d\tau_{ij} = d\alpha_i (\sigma_i - \sigma_j) \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j) \quad (14)$$

同时把应力增量分解为与应力主轴共轴的部分 $d\sigma_c$ 和使应力主轴旋转的部分 $d\sigma_r$, 分解式为

$$\begin{aligned} d\sigma &= d\sigma_c + d\sigma_r = d\sigma_c + d\sigma_{r1} + d\sigma_{r2} + d\sigma_{r3} \\ &= \begin{vmatrix} d\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & d\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & d\sigma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & d\sigma_{r1} & d\sigma_{r3} \\ d\sigma_{r1} & 0 & d\sigma_{r2} \\ d\sigma_{r3} & d\sigma_{r2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} d\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & d\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & d\sigma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & d\alpha_1(\sigma_1 - \sigma_2) & d\alpha_3(\sigma_1 - \sigma_3) \\ d\alpha_1(\sigma_1 - \sigma_2) & 0 & d\alpha_2(\sigma_2 - \sigma_3) \\ d\alpha_3(\sigma_1 - \sigma_3) & d\alpha_2(\sigma_2 - \sigma_3) & 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

式中 $d\sigma_c$ 、 $d\sigma_r$ 为共轴应力增量与旋转应力增量; $d\sigma_{r1}$ 、 $d\sigma_{r2}$ 、 $d\sigma_{r3}$ 分别为绕三、一、二轴旋转的应力增量, 分别等于 $d\tau_{12}$ 、 $d\tau_{23}$ 、 $d\tau_{13}$ 。

包含应力主轴旋转在内的广义塑性位势也分解为两部分。共轴部分的塑性势公式, 与未考虑应力主轴旋转的情况相同。旋转部分需用 6 个势函数(一般取应力分量作势函数), 则位势理论可写成

$$d\epsilon_{ij}^p = d\epsilon_{ij}^c + d\epsilon_{ij}^r = \sum_{k=1}^3 d\lambda_k \frac{\partial Q_k}{\partial \sigma_j} + \sum_{k=1}^6 d\lambda_{kr} \frac{\partial Q_{kr}}{\partial \sigma_j} \quad (16)$$

或写成

$$d\epsilon_{ij}^p = d\epsilon_{ij}^c + d\epsilon_{ijr1}^p + d\epsilon_{ijr2}^p + d\epsilon_{ijr3}^p$$

式中 $d\epsilon_{ij}^c$ 、 $d\epsilon_{ij}^r$ 分别为共轴应力增量与旋转应力增量产生的塑性应变增量; $d\epsilon_{ijr1}^p$ 、 $d\epsilon_{ijr2}^p$ 、 $d\epsilon_{ijr3}^p$ 分别为 $d\sigma_{r1}$ 、 $d\sigma_{r2}$ 、 $d\sigma_{r3}$ 产生的塑性应变增量; $d\lambda_k$ 、 $d\lambda_{kr}$ 分别为共轴部分与旋转部分的塑性系数; Q_k 、 Q_{kr} 分别为共轴部分与旋转部分的塑性势函数;

$$\begin{aligned} d\epsilon_{ijr1}^p &= d\lambda_{r1} \frac{\partial Q_{1r}}{\partial \sigma_j} + d\lambda_{2r1} \frac{\partial Q_{2r}}{\partial \sigma_j} + d\lambda_{3r1} \frac{\partial Q_{3r}}{\partial \sigma_j} + d\lambda_{4r1} \frac{\partial Q_{4r}}{\partial \sigma_j}; \\ d\epsilon_{ijr2}^p &= d\lambda_{r2} \frac{\partial Q_{1r}}{\partial \sigma_j} + d\lambda_{2r2} \frac{\partial Q_{2r}}{\partial \sigma_j} + d\lambda_{3r2} \frac{\partial Q_{3r}}{\partial \sigma_j} + d\lambda_{5r2} \frac{\partial Q_{5r}}{\partial \sigma_j}; \\ d\epsilon_{ijr3}^p &= d\lambda_{r3} \frac{\partial Q_{1r}}{\partial \sigma_j} + d\lambda_{2r3} \frac{\partial Q_{2r}}{\partial \sigma_j} + d\lambda_{3r3} \frac{\partial Q_{3r}}{\partial \sigma_j} + d\lambda_{6r3} \frac{\partial Q_{6r}}{\partial \sigma_j}; \end{aligned}$$

其中 $d\lambda_{r1}$ 、 $d\lambda_{2r1}$ 、 $d\lambda_{3r1}$ 、 $d\lambda_{4r1}$ 、 $d\lambda_{r2}$ 、 $d\lambda_{2r2}$ 、 $d\lambda_{3r2}$ 、 $d\lambda_{5r2}$ 、

$d\lambda_{13}$ $d\lambda_{23}$ $d\lambda_{33}$ $d\lambda_{63}$ 分别为与 $d\sigma_1$ $d\sigma_2$ $d\sigma_3$ 有关的塑性系数, 可采用实验数据拟合的方法得到。

8 基于广义塑性力学的几种土体模型的计算比较

按广义塑性力学, 分别建立 3 个分量塑性势面与相应的 3 个屈服面, 构成了土体本构模型。如果略去洛德角方向的塑性应变增量分量, 就将上述 3 屈服面模型简化为双屈服面模型。若进一步略去塑性体应变, 就可简化成单屈服面模型。不过这种单屈服面模型与当前应用的莫尔-库仑屈服面模型不同, 不采用正交流动法则, 略去了体变, 因而不会出现过大的剪胀现象。

当采用 p 、 q 、 θ_0 作势函数, 则相应屈服面为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^p &= f_v(p, q) \\ \mathcal{V}_q^p &= f_q(p, q, \theta_0) \\ \mathcal{V}_\theta^p &= f_\theta(q, \theta_0)\end{aligned}\quad (17)$$

式(17)中, 在 f_v 中略去 θ_0 , f_θ 中略去 p 的影响。

对于不出现体胀的土, 为了计算比较, 本模型采用文献[8]中的体积屈服面

$$p + \frac{q^2}{M_1^2(p + p_r)} = \frac{h\mathcal{E}^p}{1 - t\mathcal{E}^p} P_a \quad (18)$$

q 方向的剪切屈服面也采用文献[8]中的抛物线形式, 并考虑了洛德角的影响。

$$\mathcal{V}_q^p = \frac{aq}{Gg(\theta_0)} \sqrt{\frac{q}{g(\theta_0)M_2(p + p_r) - q}} \quad (19)$$

偏平面上 q 的形状函数 $g(\theta_0)$ 采用了由 Gudehus 等人提出并由郑颖人修正的公式

$$g(\theta_0) = \frac{2K}{(1 + K) - (1 - K)\sin 3\theta_0 + \alpha \cos^2 3\theta_0} \quad (20)$$

当前岩土界尚未对 θ_0 方向上的剪切屈服面进行过深入研究, 一般都作了 $\mathcal{V}_\theta = 0$ 的假设而成为双屈服面模型。通常可略去 f_θ 中的 p 项, 只研究偏平面上的 f_θ 屈服面。此屈服面可确定塑性应变增量方向相对应力增量方向的偏转角度。在弹性阶段, 应变增量方向与应力增量方向一致; 而在塑性阶段, 应变增量的方向相对应力增量的方向有一定偏转, 由试验知, 其偏转角在 $5^\circ \sim 25^\circ$ 之间, 一般为十余度(图 4)。为了使计算简便, 假定偏转角 α 为常值, 本算例中, 取图 5 中的平均值 $\alpha = 13^\circ$ 。

由图 4 可见

$$d\mathcal{V}_\theta^p = \tan \alpha \cdot d\mathcal{V}_q^p = B \cdot d\mathcal{V}_q^p \quad (21)$$

积分得

$$\mathcal{V}_\theta^p = B\mathcal{V}_q^p + C = f_\theta(q, \theta_0) \quad (22)$$

式中 $B = \tan \alpha = 0.23$, C 为积分常数。可见, $\mathcal{V}_\theta$ 与

$\mathcal{V}_q^p$ 具有同样形状, 只是大小不同。

算例为一平面应变问题, 荷载为自重、均载 q_0 与偏载 q_1 (图 5), 模型长 20 m、高 15 m。模型中所用到的参数可由常规三轴试验确定, 其意义与殷宗泽双屈服面模型相同, 具体确定方法详见文献[8]。在计算中采用了两种单屈服面、两种双屈服面和一种三屈服面的模型:

a) 屈服面为剪切屈服面 f_q , 令 $\mathcal{E}^p = 0$, $\mathcal{V}_\theta^p = 0$, 并不计 θ_0 , 即不计 θ_0 影响的单屈服面模型;

b) 屈服面为剪切屈服面 f_q , 令 $\mathcal{E}^p = 0$, $\mathcal{V}_\theta^p = 0$, 但计 θ_0 , 即考虑 θ_0 影响的单屈服面模型;

c) 屈服面为 f_q 与 f_v , 令 $\mathcal{V}_\theta^p = 0$, 并不计 θ_0 , 即不计 θ_0 影响的双屈服面模型;

d) 屈服面为 f_q 与 f_v , 令 $\mathcal{V}_\theta^p = 0$, 但计 θ_0 , 即考虑 θ_0 影响的双屈服面模型;

e) 屈服面为 f_v f_q f_θ , 为完全符合广义塑性力学的三屈服面模型。

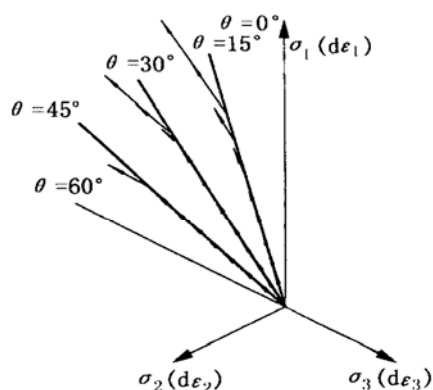


图 4 π 平面上塑性应变增量矢量(试验所得)

Fig. 4 Strain increment vectors in π plane (results of test)

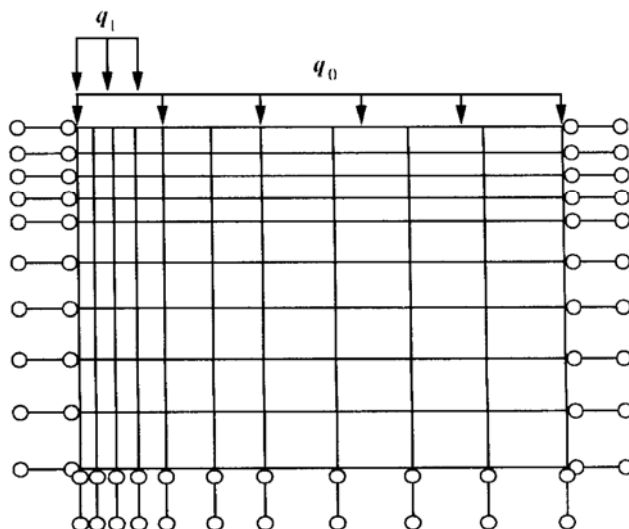


图 5 算例的单元划分及边界条件示意图

Fig. 5 Finite element mesh and boundary conditions

表 1 各种方案计算所得的地基表面沉降量

Table 1 Settlements of foundation calculated by the models

m

方案	屈服面与塑性势函数	均载作用下	所有荷载作用下				
			$x = 0.5$	$x = 2.5$	$x = 6$	$x = 11$	$x = 17$
1	$f = f_q(p, q), Q = q$	0.19	0.94	0.73	0.35	0.22	0.17
2	$f = f_q(p, q, \theta_0), Q = q$	0.20	1.11	0.86	0.37	0.22	0.17
3	$f_1 = f_v(p, q), Q_1 = p$ $f_2 = f_q(p, q), Q_2 = q$	0.25	1.13	0.90	0.45	0.29	0.23
4	$f_1 = f_v(p, q), Q_1 = p$ $f_2 = f_q(p, q, \theta_0), Q_2 = q$	0.26	1.23	0.93	0.46	0.29	0.24
5	$f_1 = f_v(p, q), Q_1 = p$ $f_2 = f_q(p, q, \theta_0), Q_2 = q$ $f_3 = f_\theta(q, \theta_0), Q_3 = \theta_0$	0.31	1.30	1.03	0.55	0.37	0.31

计算结果列于表 1。由表 1 可见, 在均布荷载作用下地基表面处的沉降变形: q 方向上剪切变形引起的沉降占总沉降中的 64.5%; θ_0 方向上剪切变形引起的沉降占总沉降的 16.1%; 总剪切变形引起的沉降占总沉降的 80.6%; 体积变形引起的沉降占总沉降的 19.4%。采用剪切单屈服面模型时, 变形计算误差可达 35.5%, 当不计 θ_0 影响时计算误差可增至 38.7%, 采用双屈服面模型时, 变形计算误差可达 16%, 当不计 θ_0 影响时计算误差可增至 19.4%。

当偏载与均载共同作用下, 在最大变形处的沉降变形: q 方向剪切变形引起的沉降占总沉降中的 80.5%; θ_0 方向上剪切变形引起的沉降占总沉降的 5.4%; 总剪切变形引起的沉降占总沉降的 85.9%; 体积变形引起的沉降占总沉降的 14.1%。采用剪切单屈服面模型时, 变形计算误差可达 19.5%, 当不计 θ_0 影响时误差可增至 27.7%。采用双屈服面模型时, 变形计算误差可达 5.4%; 当不计 θ_0 影响时, 变形计算误差可增至 13.1%。

9 结 论

(1) 广义塑性力学消除了经典塑性力学中传统塑性势假设、正交流动法则假设与不考虑应力主轴旋转的假设。

(2) 广义塑性力学是基于分量塑性势面与分量屈服面的理论, 能反映应力路径转折的影响, 即应力增量对塑性应变增量方向的影响。

(3) 广义塑性力学中塑性势面是已知的, 因而它不会产生当前非关联流动法则中任意假定塑性势面引

起的误差。

(4) 广义塑性力学中要求屈服面与塑性势面对应, 而不要求相等, 避免了采用正交流动法则引起过大剪胀等不合理状况。由于它对屈服面硬化参量的选定有严格规定, 保证了岩土材料在一定应力路径下求解的唯一性。

参 考 文 献

- 1 郑颖人, 刘元雪. 塑性位势理论的发展及其在岩土本构模型中的应用. 见: 庄逢甘主编. 现代力学与科技进步文集. 北京: 清华大学出版社, 1997. 1115~ 1118
- 2 郑颖人, 刘元雪. 岩土塑性力学的理论基础——广义塑性力学原理. 中国学术期刊文摘(科技快报), 1998(11): 1375 ~ 1377
- 3 王仁, 黄文彬. 塑性力学引论. 北京: 北京大学出版社, 1988
- 4 杨光华. 岩土类工程材料本构方程的一个张量普遍形式定律. 见: 水工结构工程理论与应用. 大连: 大连海运出版社, 1993. 315~ 321
- 5 沈珠江. 土的弹塑性应力应变关系的合理形式. 岩土工程学报, 1980, 2(2): 10~ 17
- 6 郑颖人, 段建立. 广义塑性力学中的硬化定律与应力应变关系. 后勤工程学院学报, 1998(1): 15~ 20
- 7 刘元雪, 郑颖人, 陈正汉. 含主应力轴旋转的土体一般应力应变关系. 应用数学与力学, 1998, 19(5): 407~ 414
- 8 殷宗泽. 一个土体的双屈服面应力-应变模型. 岩土工程学报, 1988, 10(4): 64~ 71
- 9 Sun De An, Matsouka Hajime. An elastoplastic model for $c - \varphi$ materiaes under complex loading. In: Yuan, ed. Computer Methods and Advances in Geomechnics. Rotterdam: Balkema, 1997. 887~ 892