

非稳定渗流用截止负压法求解的研究^{*}

Research on the calculation of unsteady seepage by cut-off negative pressure method

速宝玉 郭洪兴 詹美礼
(河海大学水电学院, 南京, 210098)

文 摘 在稳定渗流截止负压法的基础上, 通过进一步的研究, 将其推广应用到三维非稳定渗流分析中, 建立了与之相应的非稳定渗流求解方法。实际工程算题表明, 该方法具有理论严谨、收敛速度快、计算精度高的特点, 是稳定渗流和非稳定渗流分析中的有效方法。至于截止负压法对于非饱和渗流分析的适应性, 尚有待于作更深入的研究, 尤其是最大负压的取值问题。

关键词 截止负压法, 三维非稳定渗流

中图法分类号 TV 139. 14

作者简介 速宝玉, 女, 河海大学水电学院水工教研室教授, 博士生导师, 主要从事岩土工程渗流及控制的研究。

Su Baoyu Guo Hongxing Zhan Meili

(Hohai University, Nanjing, 210098)

Abstract A method to calculate unsteady seepage is established in this paper through studying cut-off negative pressure method and extending it to 3-D unsteady seepage analysis. Some examples show that this method have advantages of strict in theory, quick in convergence and high in precision, and it is an effective method for the analysis of steady and unsteady seepage. The suitability of cut-off negative pressure method to unsaturated seepage is remained to be further researched, especially the selection of maximum negative pressure.

Key words cut-off negative pressure method, 3-D unsteady seepage

1 非稳定渗流数学模型及弱表达式的推导^{*}

在各向异性的多孔介质中, 流体的非稳定渗流运动常采用以下微分方程描述^[1]:

$$\frac{\partial}{\partial x}(k_x \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_y \frac{\partial h}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k_z \frac{\partial h}{\partial z}) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

式中 S_s 为单位贮水系数(1/m), 即在单位体积的饱和和多孔介质内, 在单位水头改变下, 由于多孔介质的压缩和水体的膨胀所释放出来的贮存水量。单位贮水系数与多孔介质和流体的弹性特征有关, 可表示为

$$S_s = \rho g (\alpha + n\beta) \quad (2)$$

式中 g 为重力加速度; α 为土体垂向压缩系数; n 为多孔介质孔隙率; β 为流体压缩系数; ρ 为流体密度。

式(1)的向量形式可表示为

$$\nabla \cdot (k \cdot \nabla h) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3)$$

对于有自由面的非稳定渗流, 在一般情况下, 由于自由面下降所引起的土体压缩或弹性释放水量比因自由面下降而排出的水量小得多, 因此可以略去土体的压缩性, 也就是可以认为 $S_s = 0$, 式(1)就变为

$$\frac{\partial}{\partial x}(k_x \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_y \frac{\partial h}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k_z \frac{\partial h}{\partial z}) = 0 \quad (4)$$

控制微分方程式只有结合其特定的边界条件和初始条件才能构成一个适定的定解问题。如图 1 所示,

Ω 表示所研究的整个渗流场区域, $\partial \Omega$ 表示它的边界, D 表示 Ω 中的饱和区域, ∂D 表示 D 的边界。则 D 的边界由下面四部分组成: 已知水头边界 Γ_1 , 不透水边界 Γ_2 , 出渗面边界 Γ_3 , 自由面边界 Γ_4 。如果忽略自由面上方(或侧向)的毛细管带、非饱和部分和蒸发的影响, 则有自由面的三维非稳定渗流定解问题可表述为

$$\nabla \cdot (k \cdot \nabla h) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (x, y, z) \in D \quad (5)$$

边界条件为

$$\begin{aligned} h &= h^* & (x, y, z) \in \Gamma_1 \\ n \cdot k \cdot \nabla h &= 0 & (x, y, z) \in \Gamma_2 \\ n \cdot k \cdot \nabla h &\leq 0 \text{ 且 } h = z^* & (x, y, z) \in \Gamma_3 \\ n \cdot k \cdot \nabla h &= q \text{ 且 } h = z^* & (x, y, z) \in \Gamma_4 \end{aligned} \quad (6)$$

初始条件为

$$h(x, y, z, t) |_{t=0} = h_0(x, y, z) \quad (x, y, z) \in D \quad (7)$$

式中 h^* 为已知水头; z^* 为自由面的位置高度; $h_0(x, y, z)$ 为初始时刻的已知水头函数, 其值可以取为稳定渗流场求解得到的水头场分布; q 为自由面上因自由面变动而引起的流量补给, 其表达式为

^{*} 国家自然科学基金资助项目(No. 59879004)

水利部水利技术开发基金(97472603)资助项目

到稿日期: 1998-10-06

$$q = \mu \frac{\partial h}{\partial t} \cos \theta \quad (8)$$

式中 μ 为饱和差(自由面下降)或给水度(自由面上升), 它表示在自由面改变单位高度下, 从含水层单位截面积上吸收或排出的水量, 是无量纲数; θ 为自由面 Γ_4 外法线方向 n 与垂线的交角。

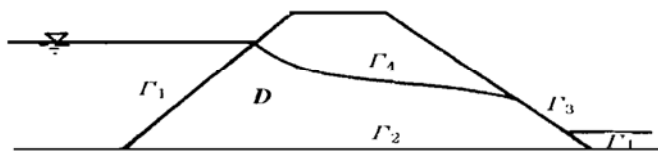


图1 有自由面的渗流问题示意图

Fig. 1 Seepage with free surface

针对前面提出的定解问题式(5)~(8), 推导出可以直接求解的弱表达式。设任意 $\zeta \in C'(\bar{D})$, 且满足 Γ_1, Γ_3 上 $\zeta = 0$, 用 ζ 乘以式(5)两边, 然后在区域 D 上积分

$$\int_D \zeta (\nabla \cdot (k \cdot \nabla h) - S_s \frac{\partial h}{\partial t}) dD = 0 \quad (9)$$

利用 Gauss 定理, 可推得

$$\begin{aligned} & \int_D \nabla \zeta \cdot k \cdot \nabla (\frac{1}{Y} p + z) dD + \\ & \int_D \zeta \cdot S_s \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{Y} p + z) dD - \int_{\Gamma_4} \zeta \cdot q d\Gamma = \\ & \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} \zeta \cdot n \cdot k \cdot \nabla (\frac{1}{Y} p + z) d\Gamma \end{aligned} \quad (10)$$

注意到 Γ_2 为不透水边界, 则上式右端项为 0, 得到

$$\begin{aligned} & \int_D \nabla \zeta \cdot k \cdot \nabla (\frac{1}{Y} p + z) dD + \\ & \int_D \zeta \cdot S_s \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{Y} p + z) dD - \int_{\Gamma_4} \zeta \cdot q d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

求解方程(11)的主要困难在于问题的饱和区域 D 是未知的, 特别是自由面的位置 Γ_4 事先不能确定。为求解这个问题, 将式(11)的左边第一、第二项在区域 D 上的积分延拓到区域 Ω 上的积分, 令

$$p(x, y, z) = \begin{cases} 0 & (x, y, z) \in \Omega \setminus \bar{D} \\ \geq 0 & (x, y, z) \in \bar{D} \end{cases} \quad (12)$$

同时定义一个 Heaviside 函数 $H(p)$ 如下

$$H(p) = \begin{cases} 1 & p > 0 \\ \in [0, 1] & p = 0 \\ 0 & p < 0 \end{cases} \quad (13)$$

所以式(11)可写为如下形式

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nabla \zeta \cdot k \cdot \nabla (\frac{p}{Y}) + H(p) \nabla \zeta \cdot k \cdot \nabla z + \\ & \zeta \cdot S_s \frac{\partial}{\partial t} (\frac{p}{Y})) d\Omega - \int_{\Gamma_4} \zeta \cdot q d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

根据式(14), 只要能够找到 $p \in H'(\Omega)$ 且 p 满足 $p \geq 0$ 且在出渗面 Γ_3 和自由面 Γ_4 上 $p = 0$, 在已知压力

边界 Γ_1 上 $p = p^*$ (p^* 为已知压力边界上水质点的已知压力), 使得对 $\forall \zeta \in H'(\Omega)$ 且在 Γ_1, Γ_3 上 $\zeta = 0$, 式(14)成立, 那么 p 就是定解问题式(5)~(8)的解。

2 有限元方程的推导

这里就上述的弱表达式(式(14)), 即罚问题: 寻求 $p \in H'(\Omega)$ 且在 Ω 中 $p \geq 0$, 在 Γ_3, Γ_4 上 $p = 0$, 在 Γ_1 上 $p = p^*$, 使得对 $\forall \zeta \in H'(\Omega)$ 且在 Γ_1, Γ_3 上 $\zeta = 0$, 满足

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot k \cdot \nabla (\frac{p}{Y}) + H(p) \nabla \zeta \cdot k \cdot \nabla z + \\ & \zeta \cdot S_s \frac{\partial}{\partial t} (\frac{p}{Y}) d\Omega - \int_{\Gamma_4} \zeta \cdot \mu \frac{\partial}{\partial t} (\frac{p}{Y}) \cos \theta d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

并定义一个 Lipschitz 连续函数^[2]

$$H(p) = \begin{cases} 1 & p \geq \varepsilon \\ p/\varepsilon & 0 \leq p \leq \varepsilon \\ 0 & p \leq 0 \end{cases} \quad \varepsilon > 0 \quad (16)$$

采用 Galerkin 逼近方法, 将全部计算区域 Ω 离散成互不重叠交叉的有限单元。设离散后的总结点数为 N , 总单元数为 E , 用等参数八结点六面体单元, 形函数为

$$\begin{aligned} N_i(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) \\ i &= 1, 2, \dots, 8 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{设} \quad \zeta = \sum_{i=1}^N N_i \zeta_i \quad p = \sum_{i=1}^N N_i p_i \quad (18)$$

代入式(15), 得

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^E \left[\int_{\Omega_e} \nabla N_a k \cdot \frac{1}{Y} \nabla N_b p_b + H(p) \nabla N_a k \cdot \nabla z + \right. \\ & \left. N_a S_s \frac{1}{Y} N_b \frac{\partial p_b}{\partial t} \right] d\Omega_e - \int_{\Gamma_4} N_a \mu \frac{1}{Y} N_b \frac{\partial p_b}{\partial t} \cos \theta d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

令

$$\begin{aligned} k_{ab}^e &= \int_{\Omega_e} \nabla N_a \cdot k \cdot \frac{1}{Y} \nabla N_b d\Omega_e \quad K_{ij} = \sum_{e=1}^E k_{ab}^e \\ s_{ab}^e &= \int_{\Omega_e} N_a \cdot S_s \cdot \frac{1}{Y} N_b d\Omega_e \quad S_{ij} = \sum_{e=1}^E s_{ab}^e \\ g_{ab}^e &= \int_{\Gamma_4} N_a \cdot \mu \frac{1}{Y} N_b \cos \theta d\Gamma \quad G_{ij} = \sum_{e=1}^E g_{ab}^e \\ f_a^e &= - \int_{\Omega_e} H(p) \nabla N_a \cdot k \cdot \nabla z d\Omega_e \quad F_i = \sum_{e=1}^E f_a^e \end{aligned} \quad (20)$$

式中 K_{ij}, S_{ij}, G_{ij} 为总系数矩阵中第 i 行、第 j 列元素; $k_{ab}^e, s_{ab}^e, g_{ab}^e$ 为各单元相应于总坐标编号的第 a 行第 b 列元素; 常数项 f_a^e 也是相应于总坐标编号的第 a 行元素。则得到如下的有限元矩阵方程:

$$[K]\{p\} + [S]\left\{\frac{\partial p}{\partial t}\right\} - [G]\left\{\frac{\partial p}{\partial t}\right\} = \{F\} \quad (21)$$

这里须注意的是: 如果是内部单元, 式(21)的左端只有前两项, 对于非稳定渗流自由面边界单元才有第三项。

对时间项采用隐式有限差分^[3,4], 即令

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t}(p_{t+\Delta t} - p_t) \quad (22)$$

代入式(21)得

$$[K]\{p\}_{t+\Delta t} + \frac{1}{\Delta t}[S]\{p\}_{t+\Delta t} - \frac{1}{\Delta t}[S]\{p\}_t - \frac{1}{\Delta t}[G]\{p\}_{t+\Delta t} + \frac{1}{\Delta t}[G]\{p\}_t = \{F\} \quad (23)$$

这就是最后要求解的线性代数方程组。由式(23)可知, 只要已知前一时刻 t 的结点压力场分布, 即可求出下一时刻 $t + \Delta t$ 的压力场分布, 因此只要知道初始条件下的渗流场压力分布, 即可计算边界条件改变时的渗流场压力分布。

3 计算迭代格式

对于每一个时段, 由于自由面位置是未知的, 方程(23)无法一次求得真解, 这里构造一种逐次线性化的迭代算法, 可方便求得该问题的近似解, 令

$$\{p\}_{t+\Delta t}^{k+1} = \{p\}_{t+\Delta t}^k + \{\Delta p\}_{t+\Delta t}^{k+1} \quad (24)$$

方程(23)可改写为

$$([K] + \frac{1}{\Delta t}([S] - [G]))\{\Delta p\}_{t+\Delta t}^{k+1} = \{\Delta F\}^k - \frac{1}{\Delta t}([S] - [G])(\{p\}_{t+\Delta t}^k - \{p\}_t) \quad (25)$$

其中

$$\Delta F_i^k = - \int_{\Omega_e} H(p) \nabla N_i \cdot k \cdot \nabla z d\Omega_e -$$

$$H(p) \int_{\Omega_e} \nabla N_i \cdot k \cdot \frac{1}{\gamma} \nabla N_j d\Omega_e \cdot (p_{t+\Delta t}^k)_j = - \int_{\Omega_e} H(p) \nabla N_i \cdot k \cdot \nabla \left(\frac{1}{\gamma} p_{t+\Delta t}^k + z \right) d\Omega_e$$

$$\text{令} \quad [A] = [K] + \frac{1}{\Delta t}([S] - [G]) \quad (26)$$

$$\{\Delta B\} = \{\Delta F\}^k - \frac{1}{\Delta t}([S] - [G])(\{p\}_{t+\Delta t}^k - \{p\}_t) \quad (27)$$

$$\text{得到} \quad [A]\{\Delta p\} = \{\Delta B\} \quad (28)$$

通过迭代求解式(28), 每一步都可解出修正量 $\{\Delta p\}$, 依次迭加在近似解上, 逐步将近似解修正到真解。

4 截止负压法

由于自由面的位置事先并不知道, 所以罚问题式

(28) 是非线性的, 对这样的非线性问题, 上节建立的逐次线性化的迭代算法能否收敛于真解或者收敛速度是否快, 这与其中的罚参数直接有关。为了更好地解决该罚问题, 首先介绍一种确定罚函数 $H(p)$ 中罚参数 ε 的精确准则——截止负压法^[2]。

为了勾画出一条光滑而精确的自由面曲线, 我们允许在自由面以上的非饱和区中存在一定的负流体压力, 而饱和区中的压力保持为正, 这样利用单元的形函数就很容易在单元内部插值出一条光滑的零压力线。对于各向同性材料中的平面单元, 极限情况是当自由面通过单元的某个结点(如结点 1)时出现, 如图 2, 根据几何关系可得结点 3 的压力为

$$p_3 = -\gamma(h \cos \alpha + l \sin \alpha) \cos \alpha \quad (29)$$

由极值条件 $\partial p / \partial \alpha = 0$, 可得单元中最大的负压值计算式

$$p_{cp} = -\gamma \frac{h}{2} (1 + \sqrt{1 + (l/h)^2}) \quad (30)$$

选取单元的最大负压值作为相应单元的截止负压, 显然, 由式(30)精确确定的截止负压 p_{cp} 是与一个给定问题和给定网格相匹配的截止负压 p_{cp} , 如果对同一个问题, 给定的网格大小不一, 那么对于不同网格的单元都可计算出一个相应的截止负压 p_{cp} , 从而保证计算有足够的精度。

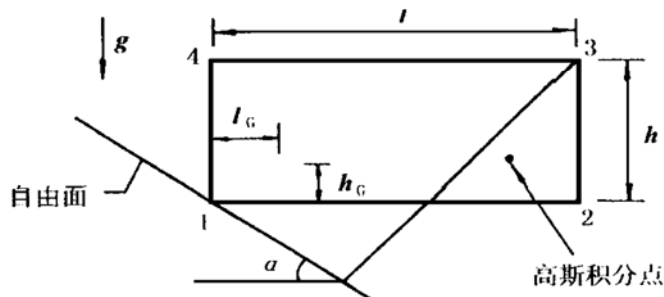


图 2 最大负压计算示意图

Fig. 2 Calculation of maximum negative pressure

当自由面通过或低于某单元内的最低积分点时, 该单元对总体系数矩阵也有贡献, 对于式(16)所定义的罚函数 $H(p)$, 由于其中定义的罚参数 $\varepsilon > 0$, 所以该部分贡献无法计算, 这样求出的自由面位置的精度也必然随之降低。为了计算这部分贡献, 更好地保证所求得自由面位置的精度, 这里重新定义罚函数 $H(p)$ 如下:

$$H(p) = \begin{cases} 1 & p \geq 0 \\ 1 - p/\varepsilon & \varepsilon \leq p \leq 0 \\ 0 & p \leq -\varepsilon \end{cases} \quad \varepsilon < 0 \quad (31)$$

确定罚参数 ε 的极限情况是当自由面正好通过单元的最低高斯积分点时, 如图 2, 可由下式求出

$$\varepsilon = -\gamma \frac{h_g}{2} (1 + \sqrt{1 + (l_g/h_g)^2}) \quad (32)$$

显然, 这样求出的罚参数 ε 具有如下特点: ① $\varepsilon <$

0; ②当 h_G 和 l_G 同时趋于 0 时, ε 也趋于 0; ③对于不同大小的单元, 同样可以精确计算得到一个与其相匹配的罚参数。

5 应用

5.1 各向同性均质土坝

如图 3 为一各向同性均质土坝, 坝高 10 m, 其余尺寸见图。坝体饱和渗透系数 $k = 1.736 \times 10^{-6}$ m/s, 孔隙率 $\alpha = 0.34$, 贮水系数 $S_s = 0 \text{ m}^{-1}$ 。

初始条件上游水位 8 m, 下游无水。然后上游水位骤降至 0.2 m。计算当 $t = 43200, 86400, 172800, 216000, 302400, 432000, 648000, 864000$ s 时的自由面位置。各时刻自由面位置分别对应图 3 中的曲线 1~8, 曲线 0 为初始时刻的自由面位置。

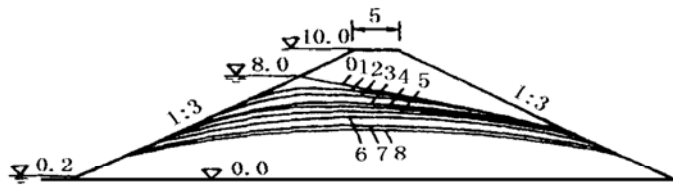


图 3 各向同性均质土坝非稳定渗流自由面

Fig. 3 Free surface of unsteady seepage in isotropic homogeneous earth dam

如图 4, 各向同性均质土坝, 坝体饱和渗透系数 $k_1 = 1.800 \times 10^{-5}$ m/s, 孔隙率 $\alpha = 0.39$, 心墙饱和渗透系数 $k_2 = 2.58 \times 10^{-8}$ m/s, 孔隙率 $\alpha = 0.34$ 。

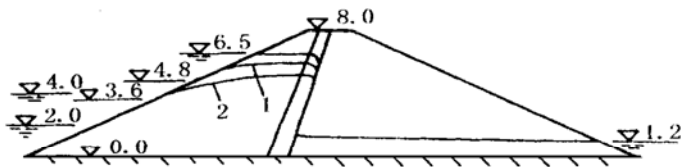


图 4 均质心墙坝非稳定渗流自由面

Fig. 4 Free surface of unsteady seepage in homogeneous core wall earth dam

初始条件是上游水位 6.5 m, 下游水位 1.2 m, 然后上游水位骤降至 4.0 m, 在 10000 s 时又再骤降至 2.0 m, 则 $t = 10000, 20000$ s 时的自由面位置如图 4 中曲线 1, 曲线 2。从图中可以看到, 在上游水位骤降时, 其自由面与上游水面之间的高差很大, 在骤降的开始时刻, 自由面几乎与坝上游边坡相平行, 而后再向坝内偏移。由于土体内的水体来不及及时排出, 在相当长一段时间内, 坝体内出现“倒流”现象, 这对土坝上游坡面的稳定是非常不利的, 这种情况常常是土坝上游坡面稳定的控制工况。

5.2 非均质各向异性介质

对于非均质各向异性介质中的渗流场, 本文方法

一样很适用。

图 5 为成层边坡, 各层土体饱和渗透系数 k 及给水度 μ 如表 1 所示。各层土体的贮水系数都为 0。

已知初始时刻水位为 7.0 m, 然后水位骤降至 2.0 m, 则当 $t = 10\ 000, 20\ 000, 30\ 000, 40\ 000, 50\ 000$ s 时对应的自由面如图 5 中曲线 1~5。

表 1 各层土体渗透系数及给水度

Table 1 The permeability and specific yield of various soil layers

层序号	渗透系数 $k/(10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$			给水度 μ
	k_x	k_y	k_z	
1	1.30	1.80	1.00	0.0021
2	25.0	15.0	24.0	0.0030
3	880	880	880	0.0052
4	100	170	174	0.0050

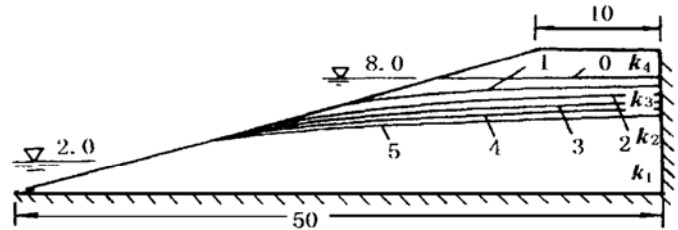


图 5 成层边坡非稳定渗流自由面

Fig. 5 Free surface of unsteady seepage in stratified slope

同样, 在骤降时, 由于边坡内的水位滞后于坡外水位降落, 形成“倒流”, 这会严重危及边坡的稳定。

从以上分析可知, 对这两个模型的计算结果是合理的, 符合正常物理规律。

6 结 语

(1) 通过两个实际算题的数值分析表明, 应用不变网格截止负压法进行非稳定渗流计算, 不仅克服了因自由面变幅大, 变网格法可能导致有限元网格奇异性及诱发数值解的稳定性, 而且提高了数值解的收敛速度和解的精度。故此, 截止负压法对于非稳定渗流分析, 有着极为广泛的应用前景。

(2) 本文经推导得到的不变网格截止负压非稳定渗流分析理论, 可直接应用于实际工程的渗控分析中。但对于非饱和渗流问题和入渗补给问题, 尚有待于作进一步的研究。

参 考 文 献

- 毛昶熙. 渗流计算分析与控制. 北京: 水利电力出版社, 1990
- 速宝玉, 沈振中, 赵 坚. 基于变分不等式理论的截止负压法. 水利学报. 1997(3): 22~29
- 徐家海. 堤坝非稳定数学模型. 水利学报, 1979(2)
- 陶同康. 堤坝非稳定数学模型. 水利学报, 1981(4)