

基于 SMP 准则的双屈服面弹塑性模型的三维化

Generalization of elasto-plastic model with two yield surfaces based on SMP criterion

孙德安

(名古屋工业大学 VBL, 日本名古屋, 466-8555)

姚仰平

(西安建筑科技大学建工系, 西安, 710055)

殷宗泽

(河海大学土木工程学院, 南京, 210098)

中图法分类号 TU43

作者简介 孙德安, 男, 1962 年生, 1994 年获名古屋工业大学岩土工程专业博士学位。现为名古屋工业大学 VBL 讲师, 研究方向为岩土材料的变形和强度特性, 本构关系及其应用。

1 引言*

仅有一个屈服面的弹塑性模型(如修正剑桥模型^[1]), 不能很好地模拟土的剪胀性及 p (平均主应力) 减小和 q (偏应力) 不变的应力路径下的应力应变关系, 为克服这些缺点, 许多人提出了双屈服面模型。殷宗泽提出的双屈服面模型^[2]也属于这一类, 由于该模型在国内已得到一定的应用, 所以对该模型进行进一步改进, 使之能较好地预测三维应力状态下土的应力应变关系。

目前现有的大多数土的弹塑性模型只有在三轴压缩应力条件下得到验证, 然后用 $p = \sigma_{ii}/3$ 和 $q = \sqrt{3(\sigma_{ij} - p\delta_{ij})(\sigma_{ij} - p\delta_{ij})}/2$ (σ_{ij} 为应力张量, δ_{ij} 为 Kronecker 符号) 把模型推广到三维应力状态。用此法定义的 p 和 q 推广的三维模型, 其屈服面在 π 平面($p =$ 常量的面)上是个圆, 已有数据证明, 正常固结粘土或轻微超固结粘土的屈服面在 π 平面上的形状是^[3]: 当应力较小(q/p 小)时接近圆, 当应力较大(q/p 大)时接近莫尔-库仑破坏准则或 SMP 破坏准则。SMP 准则可示为^[4]

$$\frac{\tau_{\text{SMP}}}{\sigma_{\text{SMP}}} = \sqrt{\frac{I_1 I_2 - 9I_3}{9I_3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \tan \varphi_{\text{mob}} \quad (1)$$

式中 τ_{SMP} , σ_{SMP} 分别为 SMP (空间滑动面) 上的剪应力和垂直应力; φ_{mob} 为三轴压缩条件下的发挥角 ($= \arcsin(\sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_1 + \sigma_3)$), φ_{mob} 随着剪切从 0 到 φ (内摩擦角) 之间变化; I_1 , I_2 和 I_3 为应力张量的第一、第二和第三不变量。

图 1 表示了 SMP 准则在 π 平面上的形状。由图可知, π 平面上的 SMP 准则在应力较小 (φ_{mob} 小) 时接近圆, $\varphi_{\text{mob}} = \varphi$ 时为 SMP 破坏线。迄今为止, SMP 准则主要用作破坏准则 ($\varphi_{\text{mob}} = \varphi$), 据 π 平面上由试验测得的屈服线与 SMP 准则的形状相似这一事实, 本文采用 SMP 准则在 π 平面的形状作为屈服面在 π 平面上的轨迹。

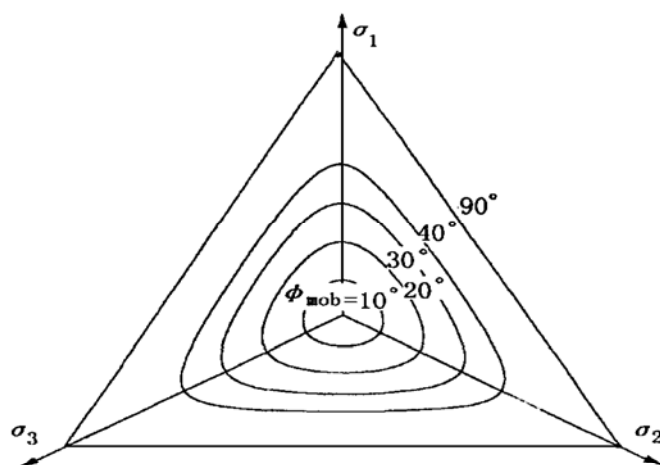


图 1 π 平面上 SMP 准则的形状

Fig. 1 Shapes of SMP criterion in π plane

2 基于 SMP 准则弹塑性模型的三维化

图 2 中的实线表示了在 π 平面上的 SMP 准则, 曲线上的任一点 A' 到原点 O 的距离 l_0 可参见文献^[5], $\theta = 0^\circ$ 时的 l_0 等于 l_0 , 把 $\theta = 0^\circ$ 代入 l_0 公式可得到

$$l_0 = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{I_1}{3 \sqrt{(I_1 I_2 - I_3)/(I_1 I_2 - 9I_3)} - 1} \quad (2)$$

因此, 可根据 SMP 准则在 π 平面上的形状函数 $g(\theta) = l_0/l_0$, 用 Zienkiewicz 和 Pande (1977) 所提出的 $g(\theta)$ 法^[6], 对已经提出的土的弹塑性模型的屈服面进行三维化。例如, 修正剑桥模型的屈服函数可写成

$$\left. \begin{aligned} f &= p + \frac{q^2}{M^2 p g^2(\theta)} - p_x = p + \frac{3l_0^2}{2M^2 p} - p_x = 0 \\ q &= \sqrt{3/2} l_0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中 M 为临界状态的 q/p ; p_x 是硬化参数。式 (3) 是基于 SMP 准则三维化了的修正剑桥模型的屈服函数。

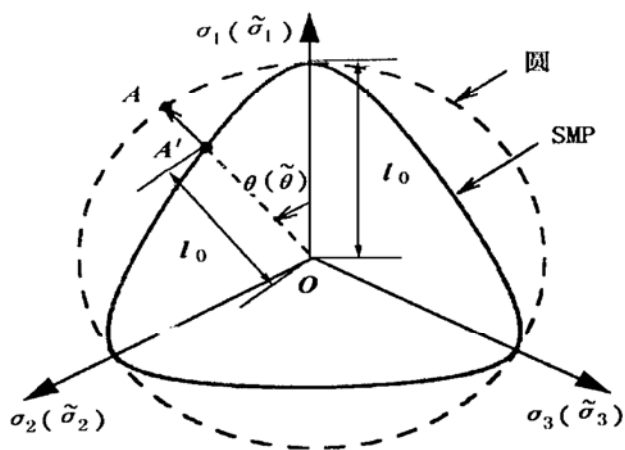
图2 π 平面上或 π 平面上 SMP 准则的形状Fig. 2 Shapes of SMP criterion in π or π plane

图3表示了该屈服面在主应力空间的形状,它具有在 π 平面上与 SMP 准则的曲线一样,在三轴压缩应力平面上完全与修正剑桥模型的屈服线一致的特性。图4表示在三轴压缩($\theta = 0^\circ$)和三轴拉伸($\theta = 60^\circ$)应力条件下式(3)的形状,图中, σ_a 和 σ_r 为三轴试验的轴向压力和侧向压力, CSL 为 SMP 破坏准则。由图4可知,在同样的 p 下,三轴压缩的 q 比三轴拉伸的 q 要大,两者的比随着应力比(q/p)的增加而变大,其原因是由于如图1所示的 π 平面上的 SMP 准则曲线从点(圆)变成三角形,即应力比(q/p)等于0时($\varphi_{\text{mob}} = 0^\circ$),两者(三轴压缩的 q 和三轴拉伸的 q)的比为1;应力比(q/p)趋向无限大时($\varphi_{\text{mob}} = 90^\circ$),两者的比为2,其间 q/p 从0到3,两者的比则从1到2。

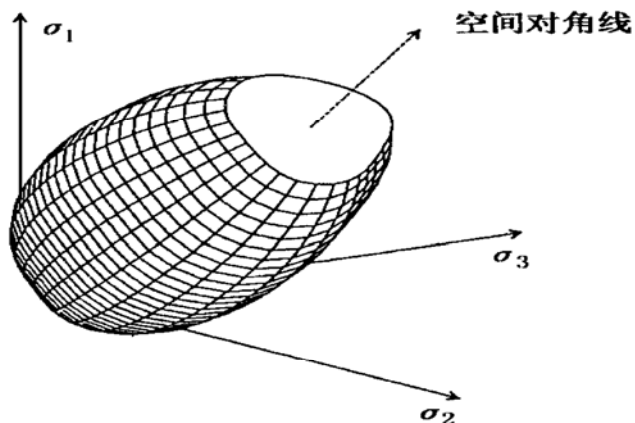


图3 基于 SMP 准则修正剑桥模型的屈服面

Fig. 3 Yield surface of Modified Cam-clay model based on SMP criterion

如图4所示,如果在应力空间采用关联流动法则,在三轴拉伸应力状态下,应力比(q/p)超过点 E (在三轴拉伸侧 q 值最大的点)的应力比以后(图中 EB 段),以塑性体变作为硬化参数的弹塑性模型会产生问题,即体积应变将会随着屈服线扩大而减少,这与体积硬化有矛盾,是不合理的。以上的问题是对单屈服面模

型而言,而用同样方法修正双屈服面模型时,其体积屈服面也存在同样的问题。为了避开这一难点,下面我们建议一个解决该问题的方法。

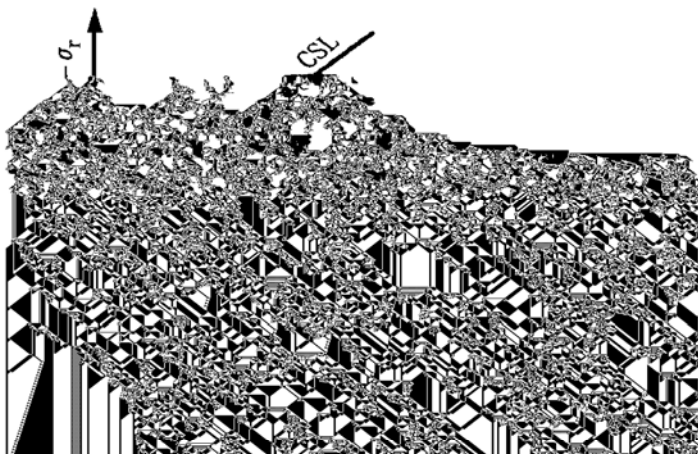


图4 三轴应力条件下基于 SMP 准则修正剑桥模型的屈服轨迹

Fig. 4 Yield loci of Modified Cam-clay model based on SMP criterion under triaxial stress condition

3 基于 SMP 准则的变换应力

为了在土的弹塑性模型中简单地采用 SMP 准则,如图2所示,把 π 平面上的 SMP 曲线(实线)变换成圆(虚线),利用广义米赛斯准则($q/p = \text{常量}$) 在 π 面上的形状是圆的特性,在本构方程中以 SMP 准则代替广义米赛斯准则。为了把 π 平面上的 SMP 曲线(实线)变成在变换应力空间的 π 平面(简称 π 平面)上的圆(虚线),设普通应力空间的点 A' 的应力为 σ_{ij} ,变换应力空间的点 A 的应力为 $\tilde{\sigma}_{ij}$,在 σ_{ij} 和 $\tilde{\sigma}_{ij}$ 的主轴方向一致的前提下,可得^[7]

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{p} \delta_{ij} + \tilde{s}_{ij} = \tilde{p} \delta_{ij} + \frac{l_0}{l_0} s_{ij} = p \delta_{ij} + \frac{l_0}{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}} s_{ij} \quad (4)$$

式中 l_0 可由式(2)求得,应力 σ_{ij} 给定后,可由式(4)求得变换应力 $\tilde{\sigma}_{ij}$,从以上 $\tilde{\sigma}_{ij}$ 的推导过程可知, SMP 准则在变换主应力($\tilde{\sigma}_i$)空间是以坐标原点为顶点,空间对角线($\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2 = \tilde{\sigma}_3$)为轴的圆锥形。众所周知,广义米赛斯准则在主应力空间呈圆锥形,利用这两者的相似性,可对已有的弹塑性模型(包括双屈服面弹塑性模型在内)进行合理的三维化。例如,用变换应力 $\tilde{\sigma}_{ij}$ 可把式(3)改成

$$\tilde{f} = \tilde{p} + \frac{\tilde{q}^2}{M^2 \tilde{p}} - \tilde{p}_x = 0 \quad (5)$$

式中 $\tilde{p} = \tilde{\sigma}_{ij}/3$ 和 $\tilde{q} = \sqrt{3(\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{p}\delta_{ij})(\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{p}\delta_{ij})/2}$, 因此,式(5)除以 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 代替 p 和 q 外,形式上完全与修正剑桥模型的屈服函数一样,也就是说,在 $\tilde{p}-\tilde{q}$ 平面上式(5)的形状与修正剑桥模型的屈服函数在 $p-q$ 平面上的形状完全一样,而实际上式(5)表示了基于 SMP 准则修正的修正剑桥模型的屈服函数,即式(3)。因此式(5)

在主应力空间的形状为图3和在 $(\sigma_a - \sigma_r) - p$ 平面的形状为图4。图5表示式(5)在 $(\tilde{\sigma}_a - \tilde{\sigma}_r) - \tilde{p}$ 平面上的形状, 由图5可知, 三轴拉伸侧 q 最大的点 E 在CSL线上, 故只要在变换应力空间采用相关联的流动法则, 即使以塑性体变作为硬化参数的弹塑性模型, 也不会产生象图4中的 EB 段所产生的问题。下面以双屈服面弹塑性模型为例, 具体地说明本文提出的三维化方法。

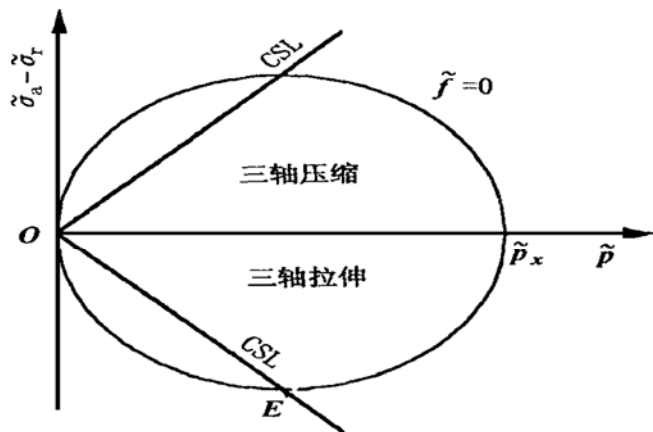


图5 基于 SMP 准则修正剑桥模型的屈服轨迹

Fig. 5 Yield loci of Modified Cam-clay model based on SMP criterion under triaxial stress condition

4 用变换应力修正双屈服面弹塑性模型

用变换应力张量 $\tilde{\sigma}_{ij}$ 代替应力张量 σ_{ij} , 可以直接修正殷宗泽提出的双屈服面弹塑性模型, 第一屈服(体积屈服)和第二屈服(剪切屈服)的函数可分别写成

$$\left. \begin{aligned} \tilde{f}_1 &= \tilde{p} + \frac{\tilde{q}^2}{M_1^2(\tilde{p} + p_r)} - \frac{hp_a}{1 - t\epsilon_v^p} = 0 \\ \tilde{f}_2 &= \frac{a\tilde{q}}{G} \sqrt{\frac{\tilde{q}}{M_2(\tilde{p} + p_r) - \tilde{q}}} - \epsilon_s^p = 0 \end{aligned} \right| \quad (6)$$

式中

$$G = K_G p_a (\sigma_3/p_a)^n \quad (7)$$

ϵ_v^p 和 ϵ_s^p 与原模型一样。 $M_1, M_2, p_r, h, t, a, K_G$ 和 n 为原模型的土性参数, 修正模型的土性参数与原模型的完全一致, 这是由于推导变换应力时假定了在三轴压缩应力条件下变换应力与普通应力一致, 以及原模型参数由三轴压缩与等效力条件下确定的缘故。图6表示在三轴应力条件下的原屈服轨迹(虚线)和修正后的屈服轨迹(实线), 图中, $\eta = q/p, \tilde{\eta} = \tilde{q}/\tilde{p}, p_r = 0, f_1, f_2$ 和 $\eta = M_1$ 为原模型的体积屈服轨迹, 剪切屈服轨迹和破坏线, $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ 和 $\tilde{\eta} = M_1$ 为修正模型的体积屈服轨迹, 剪切屈服轨迹和破坏线。由图6可知, 在三轴压缩应力条件下, 两者的屈服线相同, 而在三轴拉伸应力条件下修正的屈服线的形状变瘦, 另外, 关于破坏准则, 原模型满足广义米赛斯准则 $((q/p)_f = M_1)$, 而修

正模型则满足 SMP 破坏准则 $((\tilde{q}/\tilde{p})_f = M_1)$, 三轴压缩与三轴拉伸应力条件时与莫尔-库仑破坏准则一致。如果在变换应力空间画修正模型的屈服面的话, 其形状与原模型在应力空间的屈服面相同, 就三轴应力条件而言, 如果把图6的坐标改成 $\tilde{p} - (\tilde{\sigma}_a - \tilde{\sigma}_r)$ 的话, 修正模型的 $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ 和 $\tilde{\eta} = M_1$ 形状将为上下对称。

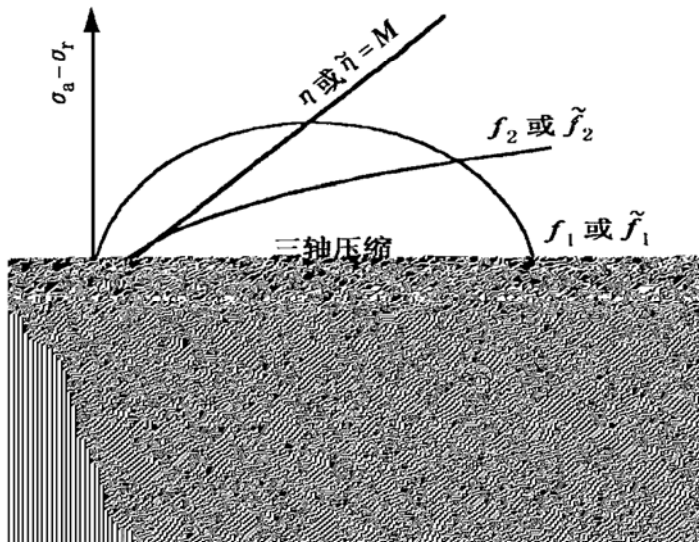


图6 基于 SMP 准则双屈服模型和原模型的屈服轨迹

Fig. 6 Yield loci of original model and revised model by SMP criterion under triaxial stress condition

修正模型在变换应力空间采用相关联流动法则, 即

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda_1 \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}, d\epsilon_{ij}^{s2} = d\lambda_2 \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} \quad (8)$$

式(6)须满足 Prager 的相容条件, 即

$$\left. \begin{aligned} d\tilde{f}_1 &= \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} d\tilde{\sigma}_{ij} + \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \epsilon_v^p} d\epsilon_v^p = 0 \\ d\tilde{f}_2 &= \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} d\tilde{\sigma}_{ij} + \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial \epsilon_s^p} d\epsilon_s^p = 0 \end{aligned} \right| \quad (9)$$

将式(8)代入式(9), 可得到

$$d\lambda_1 = - \frac{\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} d\tilde{\sigma}_{ij}}{\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \epsilon_v^p} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \tilde{p}}}, d\lambda_2 = - \frac{\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} d\tilde{\sigma}_{ij}}{\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial \epsilon_s^p} \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial \tilde{p}}} \quad (10)$$

由式(8)和式(10)算得塑性应变增量 $d\epsilon_{ij}^p$ 和 $d\epsilon_{ij}^{s2}$ 后, 可由下式计算出总应变增量 $d\epsilon_{ij}$:

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p + d\epsilon_{ij}^{s2} \quad (11)$$

弹性应变增量 $d\epsilon_{ij}^e$ 可由广义虎克定律计算。

5 模型预测值与实测值的比较

使用 SMP 准则修正的双屈服面模型与原模型分别对日本的丰浦砂进行了预测, 并与实测数据相比较, 结果表明修正模型是合理的。实测数据为平均主应力

$p =$ 常量和最小主应力 $\sigma_3 =$ 常量的三轴压缩与三轴拉伸的试验结果^[8], 模型预测所使用的参数有 8 个: 丰浦砂为 $M_1 = 1.65$, $M_2 = 1.80$, $p_r = 0$, $h = 300$, $t = 50$, $a = 0.5$, $K_G = 200$, $n = 0.7$ 。

图 7 分别为平均主应力 $p =$ 常量和最小主应力 $\sigma_3 =$ 常量条件下砂的三轴剪切试验结果(以 $\circ$ 表示)和预测结果(实线为修正模型, 虚线为原模型)。

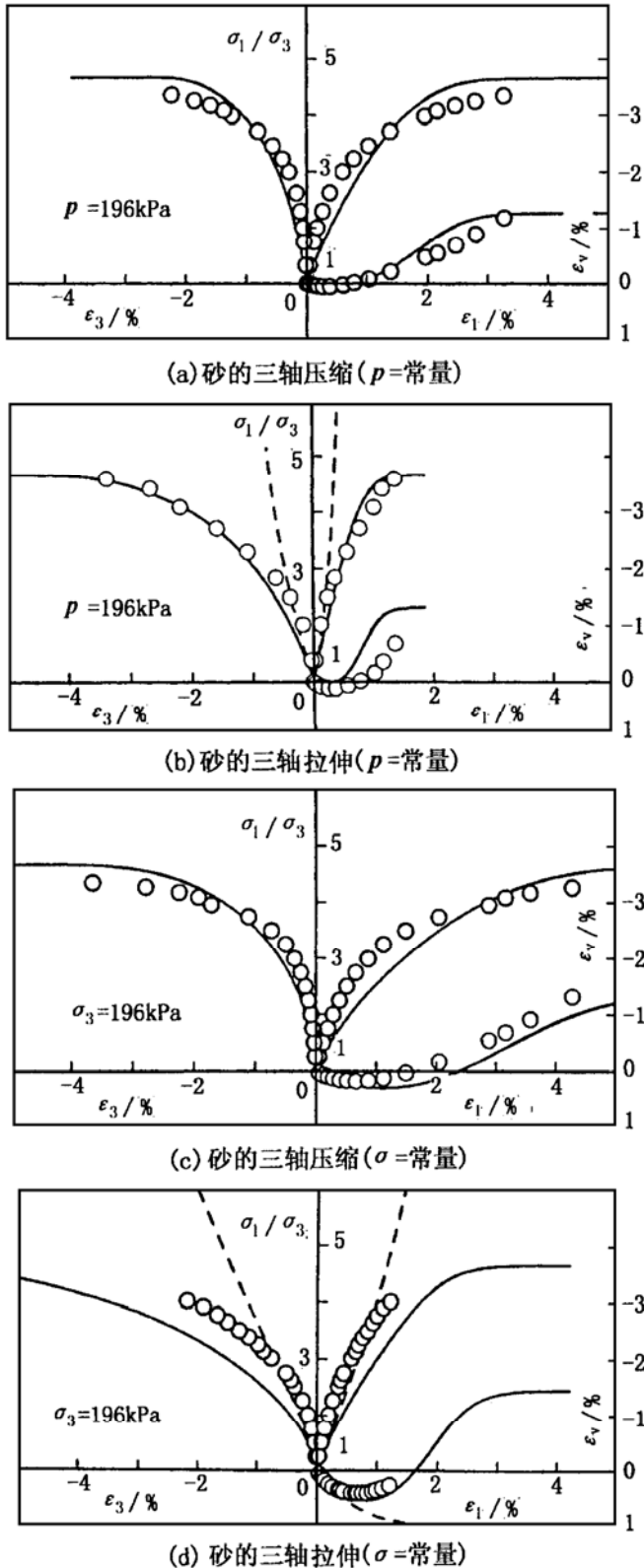


图 7 模型预测值与实测值

Fig. 7 Comparison of measured and predicted results

从图 7 知, 在三轴压缩应力条件时, 修正模型的预测结果与原模型相同, 而在三轴拉伸应力条件下, 修正模型的预测结果不同于原模型, 修正模型更能反映土的实际变形和强度特性, 尽管两模型所用的土性参数是一样的, 由于修正模型的屈服准则和破坏准则更合理, 即在 π 平面上假定为 SMP 曲线。在三轴压缩应力条件下, 原模型能比较正确地预测各种应力路径下土的变形特性(包括剪胀特性), 而修正模型不仅在三轴压缩应力条件下, 在其它三维应力条件下也能够较正确地预测包括剪胀特性在内的变形和强度特性。

6 结 语

本文首先指出了以 p 和 q 作为应力参数的弹塑性模型的问题点, 然后阐明了以 SMP 准则在 π 平面上的曲线作为屈服面在 π 平面上的形状是符合最新的试验成果, 用一般的三维化的方法($g(\theta)$ 法)会产生困难, 所以建议用变换应力的方法来解决。用变换应力修正了殷宗泽提出的双屈服面模型, 并使用修正模型预测了砂的三轴压缩和三轴拉伸应力条件下的应力应变关系, 预测结果与实测结果的比较, 显示了修正模型在三维应力状态下更为合理。

参 考 文 献

- 1 Roscoe K H, Burland J B. On the generalised stress-strain behavior of "wet" clay. In: Engineering Plasticity. Cambridge University Press, 1968. 535~ 609
- 2 殷宗泽, 一个土体双屈服面应力-应变模型. 岩土工程学报. 1988, 10(4): 64~ 71
- 3 Newson T A. Validation of a non-associated constitutive relationship using centrifuge models. Proc of 10th Asian Regional Conf on Soil Mech and Found Eng, Beijing, 1995
- 4 Matsuoka H, Nakai T. Stress-deformation and strength characteristics of soil under three difference principal stresses. Proc, JSCE, 1974(232): 59~ 70
- 5 Matsuoka H, Sun D A, Yao Y P. 3-D failure and yield criteria for geomaterials based on "Spatially Mobilized Plane (SMP)". In: Proc Int Symp on Strength Theories: Applications and Developments. edited by YU M H, Fan S C. Beijing: Science Press, 1998, 259~ 266
- 6 Zienkiewicz O C, Pande G N. Some useful forms of isotropic yield surface for soil and rock mechanics. In: Finite Elements in Geomechanics. edited by Gudehus G. London: John Wiley & Sons, 1977. 179~ 190
- 7 Matsuoka H, Yao Y P, Sun D A. The Cam-clay models revised by the SMP criterion. Soils and Foundations, 1999, 39(1): 81~ 95
- 8 Nakai T. An isotropic hardening elastoplastic model for sand considering the stress path dependency in three-dimensional stresses. Soils and Foundations, 1989, 29(1): 119~ 137