

土的多重势面模型及其验证*

Multi-potential surface model for soils and its verification

杨光华

(广东省水利水电科学研究所, 广州, 510610)

介玉新 李广信 黄文峰

(清华大学水利水电系, 北京, 100084)

文 摘 多重势面理论给岩土材料的本构关系研究指出了更开阔的数学背景, 由此建立的土的本构模型可以无需推求塑性势函数和屈服函数, 且其所能表述的本构关系比通常的塑性位势理论更为广泛。文中介绍了基于多重势面理论所建立的应变空间的多重势面模型, 并对其适用性进行验证。

关键词 多重势面理论, 多重势面模型, 弹塑性模型

中图法分类号 TU 411.3

作者简介 杨光华, 男, 1962 年生, 高级工程师, 1985 年在武汉水利电力大学获硕士学位, 1999 年 3 月在清华大学获博士学位, 现任广东省水利水电科学研究所副所长。从事土的本构理论、深基坑工程和地基及基础的科研和咨询、设计工作。

Yang Guanghua

(Guangdong Provincial Research Institute of Water Conservancy and Hydropower, Guangzhou, 510610)

Jie Yuxin Li Guangxin Huang Wenfeng

(Department of Hydraulic Engineering, Tsinghua University, Beijing, 100084)

Abstract Multi-potential surface theory is essentially a mathematic approach to study the constitutive relation of soils. The model based on multi-potential surface theory has wider adaptability than those based on conventional plastic-potential theory, and needs no plastic potential functions or yield functions. The multi-potential surface model in strain space based on multi-potential surface theory is described and verified in the paper.

Key words multi-potential surface theory, multi-potential surface model, elasto-plastic model

1 前 言*

传统的土的弹塑性本构理论中需要引入塑性势函数和屈服函数。塑性势函数用来确定塑性应变增量的方向, 屈服函数用来确定塑性应变增量的大小。

把塑性应变增量的 3 个主量 $d\epsilon^p$ ($i = 1, 2, 3$) 看作作为一个三维矢量 $d\epsilon^p$ 的 3 个分量, 则可用数学上的矢量拟合法, 用 3 个任意线性无关的三维矢量来线性地表示, 这 3 个线性无关的三维矢量可以选用 3 个线性无关的势函数的梯度矢量, 此即为多重势面理论的思想^[1]。

如在主应力空间上来表述 $d\epsilon^p$, 此时假定 $d\epsilon^p$ 与 σ 坐标轴方向一致, 取主应力空间上任意 3 个势函数 Φ_1, Φ_2, Φ_3 , 要求其梯度矢量线性无关, 则由矢量场理论有

$$d\epsilon^p = \sum_{k=1}^3 \alpha_k \cdot \frac{\partial \Phi_k}{\partial \sigma_i} \quad (1)$$

在一般坐标系空间中, 通过导数关系表示的坐标变换关系即可得到其一般坐标上的张量分量的关系^[1~4]

$$d\epsilon_{ij}^p = \sum_{k=1}^3 \alpha_k \cdot \frac{\partial \Phi_k}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2)$$

同样, 如定义塑性应力增量 $\{d\sigma^p\} = [D_e]\{d\epsilon^p\}$,

$[D_e]$ 为弹性矩阵, 则同理可有

$$d\sigma_{ij}^p = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \cdot \frac{\partial \Phi_k}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (3)$$

另一方面, 设 A_{ij} 和 E_{ij} 为 2 个二阶对称张量, 且假定 A_{ij} 和 E_{ij} 的 3 个主方向相同, 则有^[5]

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^3 \alpha_k \cdot \frac{\partial I_{Ek}}{\partial E_{ij}} \quad (4)$$

$$E_{ij} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \cdot \frac{\partial I_{Ak}}{\partial A_{ij}} \quad (5)$$

I_{Ek}, I_{Ak} ($k = 1, 2, 3$) 分别为 E_{ij} 和 A_{ij} 相应的任一形式的 3 个张量不变量。若取 $A_{ij} = d\epsilon_{ij}^p, E_{ij} = \sigma_{ij}$, 则由式(4)直接可得

$$d\epsilon_{ij}^p = \sum_{k=1}^3 \alpha_k \cdot \frac{\partial I_{\sigma k}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6)$$

这相当于式(2)取 $\Phi_k = I_{\sigma k}$ 的情况, 同理, 若取 $A_{ij} = d\sigma_{ij}^p, E_{ij} = \epsilon_{ij}$ 则得

$$d\sigma_{ij}^p = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \cdot \frac{\partial I_{\epsilon k}}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (7)$$

同理, 还可得到

* 国家自然科学基金资助项目 (No. 59879008)

$$d\varepsilon_{ij}^e = \sum_{k=1}^3 \bar{\omega}_k \cdot \frac{\partial I_{qk}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (8)$$

$$d\sigma_{ij}^p = \sum_{k=1}^3 \bar{\beta}_k \cdot \frac{\partial I_{qk}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (9)$$

式(4)~(5)所反映的内容为笔者在文献[5]中从张量理论上建立的可用于建立土的本构模型的张量普遍形式定律,它是从另一角度论述上述关系,可作为多重势面理论的重要组成部分。多重势面理论中各势函数为不变量的函数,通过复合求导后即可退化到式(6)~(9)所表述的形式。

2 基于应变空间的多重势面模型

忽略 Lode 角和应力主轴旋转等的影响,塑性应变增量与应力及应力增量的一般关系可表示为

$$\begin{cases} d\varepsilon^p = A dp + B dq \\ d\bar{\varepsilon}^p = C dp + D dq \end{cases} \quad (10)$$

定义塑性应力增量 $\{d\sigma^p\} = [D_{ep}]\{d\varepsilon^p\}$, 其中 $[D_e]$ 是弹性矩阵, $\{d\varepsilon^p\}$ 为塑性应变增量。根据多重势面理论即可得到式(3), 式(3)中 $\varphi_k(\varepsilon_{ij}) (k=1, 2, 3)$ 可以是应变空间中任意 3 个梯度矢量线性无关的势函数。

最简单的 3 个势函数可以取 3 个应变不变量 $\bar{\varepsilon}$, ε_1 , ϕ , 其中 ϕ 为应变 Lode 角。如果忽略 Lode 角对塑性应力的影响, 且令 $\varphi_1 = \varepsilon_1$, $\varphi_2 = \bar{\varepsilon}$, 则可得到

$$d\sigma_{ij}^p = \lambda_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \varepsilon_{ij}} + \lambda_2 \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (11)$$

写成矩阵形式

$$\{d\sigma^p\} = \lambda_1 \left| \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \varepsilon} \right| + \lambda_2 \left| \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \right| \quad (12)$$

从式(10)~(11)不难推出^[3, 6, 7]

$$\{d\sigma^p\} = [D_{ep}^e]\{d\varepsilon\} \quad (13)$$

其中

$$[D_{ep}^e] = (K_e - \bar{A}) \left| \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \varepsilon} \right| \left| \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \varepsilon} \right|^T - \bar{B} \left| \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \varepsilon} \right| \left| \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \right|^T - \bar{C} \left| \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \right| \left| \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \varepsilon} \right|^T + (3G_e - \bar{D}) \left| \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \right| \left| \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \right|^T$$

$$\bar{A} = \frac{1}{|A|} (D + \frac{1}{3G_e})$$

$$\bar{B} = -\frac{B}{|A|}$$

$$\bar{C} = -\frac{C}{|A|}$$

$$\bar{D} = \frac{1}{|A|} (A + \frac{1}{K_e})$$

$$|A| = \frac{3DG_e + AK_e + 1}{3K_e G_e} + (AD - BC)$$

K_e , G_e 为弹性体积模量和剪切模量。

于是, 总应力增量为

$$\begin{aligned} \{d\sigma\} &= [D_e]\{d\varepsilon\} \\ &= [D_e](\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^p\}) \\ &= [D_e]\{d\varepsilon\} - \{d\sigma^p\} \\ &= [D_e]\{d\varepsilon\} - [D_{ep}^e]\{d\varepsilon\} \\ &= [D_{ep}^e]\{d\varepsilon\} \end{aligned} \quad (14)$$

$[D_e]$ 为弹性矩阵, 塑性矩阵 $[D_{ep}^e]$ 的展开式见文献[3, 7]。

需要说明的是, 根据多重势面理论^[2, 3, 8], 当 $AD - BC = 0$, $B \neq C$ 时, $[D_{ep}]$ 退化为相当于常规的非关联流动的弹塑性模型的情况; 而当 $AD - BC = 0$, $B = C$ 时, $[D_{ep}]$ 退化为相当于常规的关联流动的弹塑性模型的情况, 而多重势面理论的模型更具普遍性。

3 参数的确定

理论上讲, 如果能够通过试验求出 4 个塑性参数 A, B, C, D , 就可以建立上述本构模型。塑性参数 A, B, C, D 可以通过常规三轴试验、等向压缩试验或 $p = \text{常数}$ 的试验等确定^[6, 8]。实际应用时, 可以根据试验条件采用适当的假设, 以方便参数的确定。

为了简便地同邓肯-张 $E - \mu$ 模型比较, 此处仅用常规三轴试验成果求取多重势面模型参数。由于常规三轴试验只能提供关于 E_t , μ_t 的 2 个等式, 所以关于式(10)还应做出假定: $AD - BC = 0$, $B = C$ 。这样共有 4 个等式, 就可以解出 4 个未知量 A, B, C, D 。

常规三轴试验中,

$$\sigma_3 = \text{const}, dp = \frac{1}{3} d\sigma_1, dq = d\sigma_1$$

$$d\varepsilon_v = d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = (1 - 2\mu_t) d\varepsilon_1$$

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{2}{3}(1 + \mu_t) d\varepsilon_1$$

考虑 $E_t = d\sigma_1/d\varepsilon_1$, $\mu_t = -d\varepsilon_3/d\varepsilon_1$ 及式(10), 可得到

$$A = \frac{K_{ep}^2}{G_{ep} + \frac{1}{3}K_{ep}}$$

$$B = C = K_{ep} - \frac{1}{3}B$$

$$D = G_{ep} - \frac{1}{3}B$$

$$K_{ep} = \frac{1 - 2\mu_t}{E_t} - \frac{1}{3K_e}$$

$$G_{ep} = \frac{2(1 + \mu_t)}{3E_t} - \frac{1}{3G_e}$$

其中 $K_e = \frac{E_e}{3(1 - 2\mu)}$; $G_e = \frac{E_e}{2(1 + \mu)}$; E_e , μ 为卸载时的弹性模量和泊松比。

用上述方法建立的基于应变空间的多重势面模型

与邓肯- 张 $E - \mu$ 模型所需参数完全相同, 而所基于的理论基础不同。多重势面模型能够反映土的剪胀性。 E_t, μ_1 不受广义虎克定律的限制, 当 $\mu_1 > 0.5$ 时能正常计算, 且不会引起刚度矩阵的奇异。实际上, 多重势面模型中的 E_t, μ_1 已不再是传统意义上的“模量”和“泊松比”, 而更多地具有了曲线“斜率”的数值含义, 其包含了材料的塑性变形和剪胀引起的体变等。利用常规三轴试验和等向压缩试验, 并只假定 $B = C$, 也可以求出一组塑性参数 A, B, C, D 建立多重势面模型。模型的建立非常灵活。

4 用多重势面模型进行数值计算

4.1 对粘性土三轴试验的计算

用多重势面模型对一粘性土的三轴试验进行计算^[7]。计算所用土的各项参数通过常规三轴试验确定, 如表 1。其多重势面模型参数与邓肯- 张 $E - \mu$ 模型参数完全相同。

计算结果表明, 多重势面模型与邓肯- 张模型对上述粘性土三轴试验的计算结果非常接近, 所绘曲线几乎完全重合, 与试验结果也很一致。表 2 给出了 $\sigma_3 = 100\text{kPa}$ 时两种模型计算的部分结果。可以看出, 在 $\mu < 0.5$ 情况下, 两种模型计算结果差别很小。

4.2 对砂土三轴试验的计算

用多重势面模型对一砂土的三轴试验进行计算^[7]。计算所用土的各项参数通过常规三轴试验确定, 也见表 1。多重势面模型计算与试验结果的比较如图 1。计算参数中 $G = 0.8 > 0.5$, 用多重势面模型

能较好地反映土的剪胀。用邓肯- 张模型, 由于要限制 $\mu < 0.5$, 所以无法反映土的剪胀, 也即计算不出 $\varepsilon_v < 0$ 的情况。多重势面模型在 $\mu > 0.5$ 时也能正常计算并能反映土的剪胀性, 这是有别于邓肯- 张模型的重要特点。图 1(b) 中显示多重势面模型能计算出负的体变并与试验结果较为一致, 而邓肯- 张模型计算的 $\varepsilon_v > 0$, 不能反映砂土剪胀产生的负体变。

4.3 对碎石桩复合体的有限元计算

为了进一步验证多重势面模型, 对如图 2 所示的复合体试样进行了试验和计算分析。试验详见文献[9]。试样直径为 101 mm, 高 200 mm。外面为粘性土, 中心为直径 39 mm 的碎石桩。试验在常规三轴仪上进行。利用特制的加载帽, 可以保持轴向为平面变形, 并可测出碎石与粘性土部分各自分担的应力。

多重势面模型参数 E_t, μ_1 的求取采用数值方法。即根据碎石或粘性土的常规三轴试验成果用多项式拟合出每一试验的 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \varepsilon_1, \varepsilon_v - \varepsilon_1$ 关系曲线, 进而求出 E_t, μ_1 如下:

$$E_t = \frac{\partial(\sigma_1 - \sigma_3)}{\partial \varepsilon_1}$$
$$\mu_1 = - \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \varepsilon_1} = \frac{1}{2} (1 - \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \varepsilon_1})$$

由于试验的 σ_3 是有限的, 所以可以得到某些 $(\sigma_3, \varepsilon_1)$ 或 $(\sigma_3, \sigma_1 - \sigma_3)$ 对应的型值点, 不同应力状态下的 E_t 和 μ_1 就可通过插值方法得到^[3]。对模型碎石桩复合体, 用上述基于数值方法的多重势面模型进行有限元计算, 结果如图 3。

表 1 土的多重势面模型参数

Table 1 Coefficients of multi-potential surface model for soil

土类	干密度/(g·cm ⁻³)	c/kPa	$\varphi(^{\circ})$	K	K_{ur}	n	R_f	G	F	D
粘性土	1.65	68	27.6	471	612	0.17	0.94	0.33	0.29	2.5
砂土	1.58	0.0	38	1116	1500	0.65	0.88	0.8	0.0	0.0

表 2 多重势面模型与邓肯- 张模型常规三轴试验计算结果的比较($\sigma_3 = 100\text{kPa}$)

Table 2 Comparison between the calculated results obtained by multi-potential surface model and Duncan-Chang's model for conventional triaxial test(the confine pressure is 100 kPa)

轴向应力 /kPa	轴向应变/ %		体积应变/ %	
	邓肯- 张模型	多重势面模型	邓肯- 张模型	多重势面模型
5	0.01062	0.00817	0.00361	0.00328
45	0.10560	0.10315	0.03574	0.03541
95	0.25669	0.25425	0.08623	0.08590
355	4.51686	4.51440	1.15748	1.15715
375	6.67463	6.67214	1.38994	1.38961
390	9.90249	9.89997	1.45949	1.45916
400	14.18558	14.18286	1.54515	1.54481

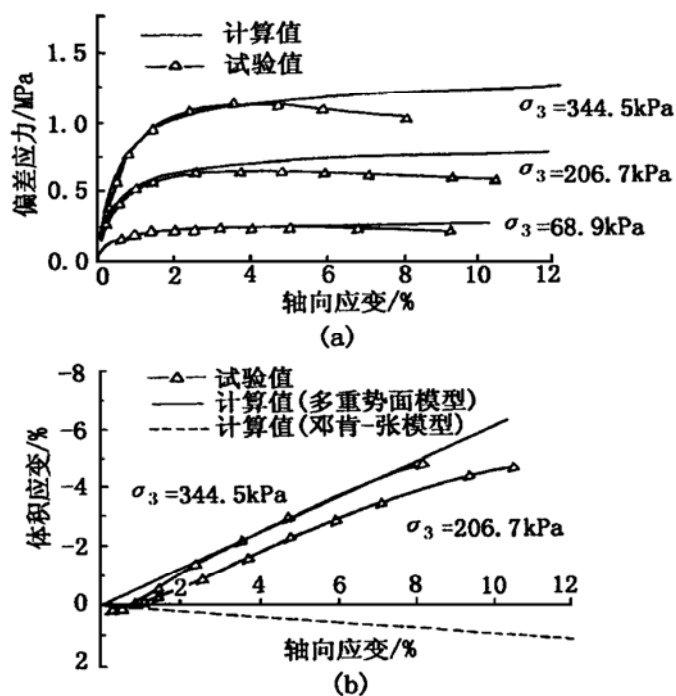


图1 砂土三轴试验多重势面模型计算值与试验值比较

Fig. 1 Comparison of the calculated results of multi-potential surface model with those measured for sand soil

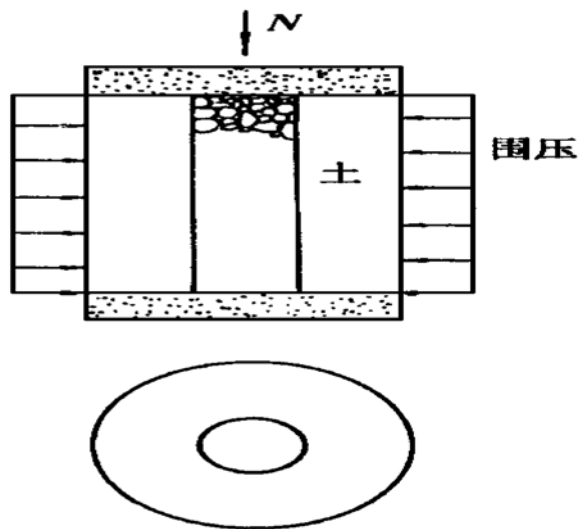


图2 碎石桩复合体

Fig. 2 Composite sample of gravel and soil

可以看出,与邓肯-张模型相比较,多重势面模型与试验结果比较接近。这是因为多重势面模型能够反映碎石的剪胀,更符合实际情况。在轴向荷载作用下,碎石桩发生侧向鼓出变形,因而产生一个向外扩张的力,外围土体则对碎石桩产生箍紧作用,使得碎石桩围压增大,而外围粘性土在碎石桩对它的张力作用下则会导致 σ_3 降低。图4是多重势面模型和邓肯-张模型计算的复合体中碎石桩和外围粘性土小主应力 $\sigma_3 - \varepsilon_a$ 变化发展的规律。多重势面模型能够反应碎石桩体的剪胀特性,计算中碎石桩体的 $\mu > 0.5$, 计算结果明显显示碎石桩的小主应力增大较多,而周围粘性土的小主应力则降低较多,计算结果较好地反映了两

者共同作用的机理。邓肯-张模型不能反映碎石的剪胀性,不能计算 $\mu > 0.5$ 的情况,所以计算出来的碎石桩体和周围粘性土的小主应力变化不是很大。

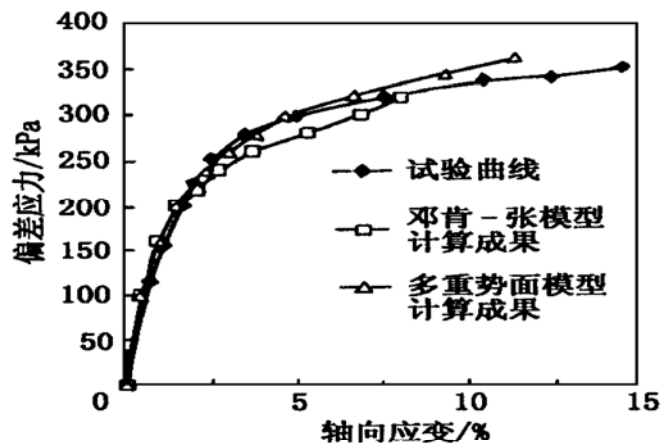
图3 复合体三轴试验轴向应力与应变的关系($\sigma_3 = 100\text{kPa}$)

Fig. 3 Axial stress-strain relation obtained in the triaxial test for the composite sample (the confine pressure is 100 kPa)

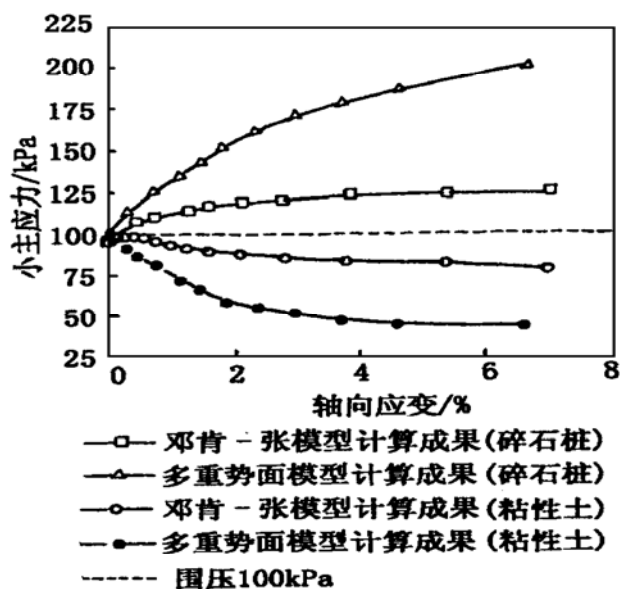


图4 复合体中碎石桩和外围粘性土最小主应力与轴向应变

Fig. 4 Relation between minor principal stress and axial strain of the composite sample and the surrounding cohesive soil

5 结论与讨论

(1) 本文所建立的基于应变空间的多重势面模型与邓肯-张 $E - \mu$ 模型所需参数完全相同,参数确定并不复杂。当 $\mu < 0.5$ 时,多重势面模型与邓肯-张模型计算结果较一致,如表2。但多重势面模型中的 E , μ 已不再是传统意义上的“模量”和“泊松比”,而更多地具有曲线“斜率”的数值含义,包含了塑性变形和剪胀的内容。多重势面模型是基于多重势面理论基础上的模型,其 E , μ 不受广义虎克定律的限制,当 $\mu > 0.5$ 时也能正常计算,而不会引起刚度矩阵的奇异,从而能较好地反映土的剪胀性。

(2) 多重势面模型所能表达的本构关系比传统的弹塑性模型更为广泛, 且可避免确定塑性势函数和屈服函数的困难及其所带来的误差。其参数确定简单, 而且能反映土的剪胀性, 既保存了邓肯- 张模型参数确定简单的优点, 又克服了其不能反映剪胀的不足, 是一个具有较好实用价值的模型。

(3) 多重势面模型可以基于应变空间建立, 也可以基于应力空间建立, 可以利用常规三轴试验, 也可以利用等向压缩试验、 $p =$ 常数的试验等确定参数, 还可以用于反映塑性应变增量不具有唯一性的情况, 模型的建立非常灵活且适应范围广泛^[7]。用多重势面模型编写的有限元程序已用于计算加筋土挡墙^[6]和土石坝工程^[3]。多重势面理论为研究岩土工程材料本构模型提供了新的思路和新的方法。

参 考 文 献

- 1 杨光华. 岩土类工程材料的多重势面弹塑性本构模型理论. 岩土工程学报, 1991, 13(5): 99~ 107
- 2 杨光华. 土的数学本构理论的研究. 第二届全国青年岩土力学与工程会议, 大连, 1995
- 3 杨光华. 土的本构模型的数学理论及其应用: [博士学位论文]. 北京: 清华大学, 1998
- 4 杨光华. 岩土类工程材料本构关系的势函数模型理论. 第四届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会. 泰安, 1991
- 5 杨光华. 岩土类工程材料本构方程的一个普遍形式定律. 见: 水工结构工程理论与应用. 大连: 大连海运学院出版社, 1993. 315~ 321
- 6 Yang Guanghua. A new strain space elastoplastic constitutive model for soils. 2nd International Conference on Soft Soil Engineering, Nanjing, China, 1996
- 7 介玉新. 加筋土的等效附加应力法分析及模型试验研究: [博士学位论文]. 北京: 清华大学, 1998
- 8 Yang Guanghua. A new elastoplastic constitutive model for soil. The International Conference on Soft Soil Engineering, Guangzhou, China, 1993
- 9 田 海. 复合地基中桩材与土的相互作用试验研究: [硕士学位论文]. 北京: 清华大学, 1997