

DOI: 10.11779/CJGE20230676

基于改进对流粒子域插值物质点法的隧道大变形分析

王曼灵^{1,2}, 李树忱^{*1,2,3}, 周慧颖^{1,2}, 王修伟^{1,2}, 彭科峰^{1,2}, 袁超^{2,4}

(1. 山东大学齐鲁交通学院, 山东 济南 250002; 2. 山东大学岩土与地下工程研究院, 山东 济南 250061; 3. 中国矿业大学力学与土木工程学院, 江苏 徐州 221116; 4. 山东大学土建与水利学院, 山东 济南 250061)

摘 要: 物质点法 (MPM) 在模拟大变形问题时具有很好的效果, 然而传统的 MPM 在粒子穿越网格边界时存在单元穿越误差, 导致精度降低。为克服传统 MPM 的单元穿越误差, 基于对流粒子域插值物质点法 (CPDI) 理论框架, 采用自适应正交改进插值移动最小二乘法 (AOIIMLS), 提出了改进 CPDI 方法。AOIIMLS 通过构造加权正交基函数, 并且忽略了新对角矩阵中的零元素或极小元素的贡献, 以避免求解逆矩阵, 增强了鲁棒性。改进 CPDI 采用速度梯度计算粒子域的速度场, 粒子速度和粒子域角点速度用于重构背景网格速度函数。通过一维柱在自重作用下的压缩、砂柱坍塌和隧道坍塌离心机试验验证了改进 CPDI 方法的准确性和适用性, 结果表明改进 CPDI 降低了单元穿越误差, 得到了更高的精度。最后, 采用改进 CPDI 方法模拟了青岛地铁 4 号线静沙区间地面塌陷全过程, 验证了改进 CPDI 方法在岩土工程大变形领域的适用性及优势。

关键词: 物质点法; 对流粒子域插值; 自适应正交改进移动最小二乘法; 隧道大变形

中图分类号: TU434

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2024)08-1632-12

作者简介: 王曼灵(1994—), 女, 博士研究生, 主要从事隧道大变形和数值计算方法等方面的研究工作。E-mail: manling_wang@163.com。

Improved convective particle domain interpolation material point method for large deformation analysis of tunnels

WANG Manling^{1,2}, LI Shuchen^{1,2,3}, ZHOU Huiying^{1,2}, WANG Xiuwei^{1,2}, PENG Kefeng^{1,2}, YUAN Chao^{2,4}

(1. School of Qilu Transportation, Shandong University, Jinan 250002, China; 2. Institute of Geotechnical and Underground Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China; 3. School of Mechanics and Civil Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China; 4. School of Civil Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China)

Abstract: The material point method (MPM) has good effects in simulating large deformation problems. However, the conventional MPM suffers from cell-crossing errors when particles cross grid boundaries, resulting in reduced accuracy. In order to overcome the cell-crossing errors of the conventional MPM, an improved convective particle domain interpolation material point method (CPDI) is proposed based on the conventional CPDI framework and the adaptive orthogonal improved interpolation moving least squares method (AOIIMLS). By constructing weighted orthogonal basis functions and disregarding the minimal or zero elements in the new diagonal matrix, the inverse matrix computation is avoided, and the robustness is enhanced. In the improved CPDI method, the particle domain velocity field is calculated using the velocity gradients, and the AOIIMLS shape functions are employed to reconstruct the background grid velocity function using the particle velocity and particle domain corner point velocity. The accuracy and applicability of the improved CPDI method are verified through simulations of various scenarios such as the compaction of a one-dimensional column under self-weight, the collapse of a sand column and the centrifuge tests on tunnel collapse. The results show that the improved CPDI method reduces the cell-crossing errors caused by the particles cross grid boundaries and achieves higher accuracy. Finally, the improved CPDI method is employed to simulate the whole process of ground collapse in the Jinggang Road Station–Shazikou Station tunnel section of Qingdao Metro Line 4, effectively confirming the applicability and advantages of the method in addressing large deformation problems in geotechnical engineering.

Key words: material point method; convective particle domain interpolation; adaptive orthogonal improved interpolation moving least squares method; large deformation of tunnel

基金项目: 国家重点研发计划项目 (2021YFC2902103); 国家自然科学基金项目 (52108373); 山东省自然科学基金项目 (ZR2021ZD36, ZR2021QE127)

收稿日期: 2023-07-18

***通信作者** (E-mail: shuchenli@sdu.edu.cn)

0 引言

随着交通强国战略的深入推进和城市的迅速发展,越来越多的城市开始修建地铁缓解交通压力。但复杂的地质环境给地下工程的建造带来了巨大的挑战,地铁隧道施工过程中遇到复杂软弱围岩时,由于岩石强度低、自身的稳定性较差,隧道掌子面开挖时围岩变形表现为一定的流变特征,开挖会导致其产生大变形,甚至出现地面塌陷和建(构)筑物的破坏倒塌等事故,给城市的安全运行带来极大的威胁^[1]。

目前,国内外针对隧道掌子面的稳定性问题的研究手段主要有理论分析、模型试验和数值模拟,并取得了较多的成果。随着计算机硬件的发展,数值计算手段成为岩土工程领域的首选方案。隧道开挖掌子面的稳定性和变形行为的数值模拟方面主要为有限元法(FEM)和有限差分法(FDM)。然而隧道掌子面破坏过程涉及到大变形及破坏后行为,基于网格的数值方法由于网格畸变无法很好地模拟大变形行为。

MPM方法是一种结合拉格朗日和欧拉描述的无网格方法^[2-3],由粒子单元法(PIC)^[4]和流体隐式粒子法(FLIP)^[5-6]发展而来。MPM结合了拉格朗日和欧拉方法的优点,避免了网格畸变问题,同时可以模拟材料的历史行为^[2-3]。MPM是处理大变形问题的有效方法,已成功应用于流固耦合问题^[7-9]、边坡破坏等工程领域^[10-12]。MPM可以消除其他无网格方法的一些缺点,但当粒子穿越网格边界时,MPM会出现网格穿越误差并导致数值噪声,这是由于MPM中粒子和网格之间插值和映射的网格基函数缺乏平滑性,同时MPM难以处理任意边界条件问题^[13]。

为克服传统MPM存在的网格穿越误差,Bardenhagen等^[14]通过引入粒子特征函数,并采用Petrov-Galerkin离散化方法建立了广义插值材料点法(GIMP),GIMP减少了单元穿越误差,但由于粒子域的大变形,GIMP可能会出现计算不稳定问题。为了消除GIMP的计算不稳定性,Sadeghirad等^[15]提出了对流粒子域插值物质点法(CPDI),CPDI将GIMP中的矩形粒子域转化为平行四边形。随后,提出了二阶对流粒子域插值物质点法(CPDI2)^[16],消除了粒子域之间的重叠或间隙。采用传统的有限元形函数求解应力时存在计算误差^[17],通过提高插值函数的阶数,可以有效提高MPM的计算精度,Steffen等^[18-19]提出了采用二次和三次B样条函数以减少单元交叉误差。

研究表明移动最小二乘函数(MLS)可以在MPM大变形计算中实现更高的精度^[20-21]。然而,MLS方法需要求解逆矩阵,这既耗时同时在遇到奇异或病态矩

阵时会导致计算终止。为了避免传统MLS方法的不稳定性,需对其进行修正,增强其鲁棒性。

本文在改进插值移动最小二乘(IIMLS)基础上,引入了加权正交基函数,并忽略了新对角矩阵中的零元素或极小元素的贡献,构造了自适应正交改进插值移动最小二乘(AOIIMLS)形函数。在CPDI计算框架中,采用AOIIMLS改进CPDI。AOIIMLS避免了求解逆矩阵,同时AOIIMLS满足Kronecker δ 函数性质,允许直接施加本质边界条件。AOIIMLS形函数用于网格和粒子之间的插值和映射以减少CPDI计算中的单元穿越误差,提高了计算精度。通过一维柱在自重下的压缩、砂柱坍塌和隧道坍塌离心机试验算例验证了改进CPDI方法的准确性和适用性。最后,采用改进CPDI模拟了青岛地铁4号线静沙区间隧道地面坍塌破坏的全过程。

1 物质点法基本理论

MPM采用粒子和背景网格双重离散,粒子放置在背景网格中,如图1(a)所示。粒子(也可称为材料点或质点)携带与历史相关的所有材料属性,如速度、应力、应变等,背景网格用于求解运动方程。粒子和网格节点之间的信息映射通过有限元形函数建立。本文中网格节点用大写下标 I 表示,粒子用小写下标 p 表示。

1.1 控制方程

MPM采用更新的拉格朗日式建立控制方程,质量和动量守恒方程如下:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}. \quad (2)$$

式中: ρ 为密度; \mathbf{v} 为速度矢量; $\boldsymbol{\sigma}$ 为Cauchy应力张量; \mathbf{b} 为体力。

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} (n\boldsymbol{\sigma})|_{\Gamma_\tau} &= \bar{\boldsymbol{\tau}}, \\ \mathbf{v}|_{\Gamma_u} &= \bar{\mathbf{v}}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: Γ_τ 和 Γ_u 分别为给定的表面力边界和位移边界; n 为边界 Γ_τ 的外法向单位矢量; $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ 为边界 Γ_τ 上的表面力; $\bar{\mathbf{v}}$ 为位移边界 Γ_u 的速度。

MPM以弱形式和连续介质力学为基础,式(2)在问题域 Ω 中可以采用其改进拉格朗日弱形式求解:

$$\int_{\Omega} \rho a \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} d\Omega - \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega_\tau} \bar{\boldsymbol{\tau}} \delta \mathbf{u} d\Omega_\tau = 0. \quad (4)$$

式中: \mathbf{a} 为加速度矢量; $\delta \mathbf{u}$ 为虚位移矢量; \mathbf{x} 为位置矢量。

1.2 粒子离散及变量更新

在 MPM 中, 连续体 Ω 由离散的拉格朗日粒子表示, 如图 1 (a) 所示。问题域的密度为

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{n_p} m_p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \quad (5)$$

式中: n_p 为粒子数; m_p 为粒子 p 的质量; δ 为 Dirac delta 函数; \mathbf{x}_p 为粒子 p 的当前位置矢量。

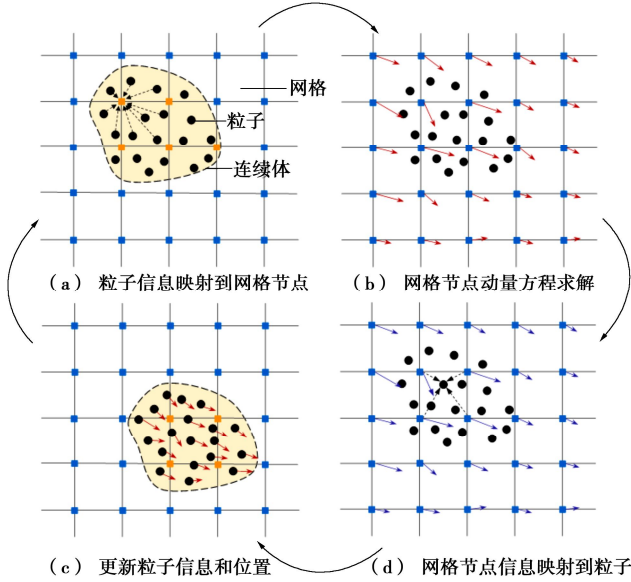


图 1 MPM 计算流程

Fig. 1 Simulation cycle of MPM

在时间步 t , MPM 计算流程的第一步为将粒子的质量和速度映射到网格中 (如图 1 (a) 所示), 以计算网格节点的质量 m_I^t 和速度 \mathbf{v}_I^t :

$$m_I^t = \sum_p m_p N_I(\mathbf{x}_p) \quad (6)$$

$$\mathbf{v}_I^t = \frac{\sum_p m_p \mathbf{v}_p^t N_I(\mathbf{x}_p)}{m_I^t} \quad (7)$$

式中: \mathbf{v}_p^t 为粒子 p 的速度, N_I 为网格节点 I 的有限元形函数。

如图 1 (b) 所示, 计算背景网格节点力, 施加边界条件, 在背景网格上显式求解运动方程, 得到网格节点的速度 $\mathbf{v}_I^{t+\Delta t}$:

$$\mathbf{f}_I^{e,t} = \sum_p m_p N_I(\mathbf{x}_p) \mathbf{b}_p^t + \sum_p m_p h^{-1} N_I(\mathbf{x}_p) \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}_p^t}{\rho_p} \quad (8)$$

$$\mathbf{f}_I^{i,t} = \sum_p m_p \frac{\partial N_I}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}_p} \frac{\boldsymbol{\sigma}_p^t}{\rho_p} \quad (9)$$

$$\mathbf{v}_I^{t+\Delta t} = \frac{\sum_p m_p \mathbf{v}_p^t N_I(\mathbf{x}_p)}{m_I^t} + \frac{\mathbf{f}_I^{e,t} - \mathbf{f}_I^{i,t}}{m_I^t} \Delta t \quad (10)$$

式中: $\mathbf{f}_I^{e,t}$ 和 $\mathbf{f}_I^{i,t}$ 分别为节点 I 的外力和内力; \mathbf{b}_p^t 和 $\bar{\boldsymbol{\tau}}_p^t$ 分别为施加在粒子 p 上的体力和面力; h 为虚拟的边

界层厚度; $\boldsymbol{\sigma}_p^t$ 为粒子 p 的 Cauchy 应力张量; ρ_p 为粒子 p 的密度; Δt 为时间步长。

将网格的信息映射回粒子, 如图 1 (d) 所示。更新粒子的速度 $\mathbf{v}_p^{t+\Delta t}$ 和位置 $\mathbf{x}_p^{t+\Delta t}$, 并丢弃已经变形的网格, 如图 1 (c) 所示:

$$\mathbf{v}_p^{t+\Delta t} = \mathbf{v}_p^t + \sum_I N_I(\mathbf{x}_p) \frac{\mathbf{f}_I^{e,t} - \mathbf{f}_I^{i,t}}{m_I^t} \Delta t \quad (11)$$

$$\mathbf{x}_p^{t+\Delta t} = \mathbf{x}_p^t + \Delta t \sum_{I=1}^{n_I} N_I(\mathbf{x}_p) \mathbf{v}_I^{t+\Delta t} \quad (12)$$

通常, 在 MPM 计算中, 新的背景网格只是简单地转移回旧网格的位置, 所以网格生成过程非常简单。在 MPM 计算的整个过程中, 粒子与背景网格固联, 不需要处理欧拉方法中的对流项, 因此便于施加边界条件。此外, MPM 在每个时间步采用新的背景网格, 有效地避免了网格畸变问题, 因此 MPM 是求解大变形问题的一种有效的数值计算方法。

2 改进对流粒子域插值物质点法

2.1 自适应正交改进插值移动最小二乘形函数

在 IIMLS^[22-23]中, 对于给定的点 $\mathbf{x} = [x, y, z] \in \Omega$, 定义新的基函数 $q_j(\mathbf{x})$:

$$q_j(\mathbf{x}) = p_j(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^n s(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) p_j(\mathbf{x}_i) \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (13)$$

式中: $\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = [p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x})]$ 为单项式基函数, $p_1(\mathbf{x}) \equiv 1$; m 为基函数的项数。在二维中, 对于线性基函数 $\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y]$, 对于二次基函数 $\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y, x^2, xy, y^2]$, 本文算例中均采用线性基函数。

$\sum_{i=1}^n s(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = 1, \forall \mathbf{x} \in \Omega$, $\mathbf{x}_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是以 \mathbf{x} 为中心的影响域内的节点, n 为节点数量。

$$s(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \frac{\zeta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)}{\sum_{k=1}^n \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)} \quad (14)$$

$$\zeta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \frac{\prod_{k=1, k \neq i}^n \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|^2}{\prod_{k=1, k \neq i}^n \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k\|^2} \quad (15)$$

式中, 如果 $n=1$, 则 $\zeta = 1$ 。

IIMLS 中的矩阵可能是奇异或病态的, 可以通过采用加权正交基函数克服。基于 Gram-Schmidt 正交化, 正交化基函数可以定义为

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_1(\mathbf{x}) &= q_1(\mathbf{x}) \equiv 0 \\ \bar{q}_2(\mathbf{x}) &= q_2(\mathbf{x}) \\ \bar{q}_j(\mathbf{x}) &= q_j(\mathbf{x}) - \sum_{k=2}^{j-1} \frac{(q_j, \bar{q}_k)_x}{(\bar{q}_k, \bar{q}_k)_x} \bar{q}_k(\mathbf{x}) \end{aligned} \right\} \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (16)$$

式中: $(q_j, \bar{q}_k)_x = \sum_{i=1}^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) q_j(\mathbf{x}_i) \bar{q}_k(\mathbf{x}_i)$, $(\bar{q}_k, \bar{q}_k)_x = \sum_{i=1}^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \bar{q}_k(\mathbf{x}_i) \bar{q}_k(\mathbf{x}_i)$ 。 $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ 为具

有紧支特性的加权函数, 本文采用三次样条加权函数:

$$w_i(r) = \begin{cases} 2/3 - 4r^2 + 4r^3 & (0 \leq r \leq 0.5) \\ 4/3 - 4r + 4r^2 - 4r^3/3 & (0.5 < r \leq 1.0) \\ 0 & (r > 1.0) \end{cases} \quad (17)$$

式中: $r = d_i/r_i$, $d_i = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$, r_i 为影响域的半径。

对于给定的函数 $u(\mathbf{x})$, 定义一个新的函数 $\tilde{u}(\mathbf{x})$ 和局部插值逼近函数 $\tilde{u}_l(\mathbf{x})$:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^n s(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) u(\mathbf{x}_i), \quad (18)$$

$$\tilde{u}_l(\mathbf{x}) = \sum_{j=2}^m \bar{q}_j(\mathbf{x}) \bar{a}_j(\mathbf{x}). \quad (19)$$

式中: $\bar{a}_j(\mathbf{x})$ 为系数向量。 \bar{L}_2 范数误差可表示为

$$\bar{L}_2 = [\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) + \mathbf{S}(\mathbf{x}) \mathbf{u} - \mathbf{u}]^T \cdot \mathbf{W}(\mathbf{x}) \cdot [\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) + \mathbf{S}(\mathbf{x}) \mathbf{u} - \mathbf{u}]. \quad (20)$$

式中: $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ 为一个 $n \times n$ 的矩阵, 其中每一行为

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = [s(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1), s(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2), \dots, s(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n)], \quad (21)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \bar{q}_2(\mathbf{x}_1) & \bar{q}_3(\mathbf{x}_1) & \cdots & \bar{q}_m(\mathbf{x}_1) \\ \bar{q}_2(\mathbf{x}_2) & \bar{q}_3(\mathbf{x}_2) & \cdots & \bar{q}_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{q}_2(\mathbf{x}_n) & \bar{q}_3(\mathbf{x}_n) & \cdots & \bar{q}_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = [\bar{a}_2(\mathbf{x}), \bar{a}_3(\mathbf{x}), \dots, \bar{a}_m(\mathbf{x})]. \quad (24)$$

通过 $\partial \bar{L}_2 / \partial \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$, 可得到 $\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$:

$$\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) \mathbf{u}. \quad (25)$$

式中:

$$\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}^T(\mathbf{x}) \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{Q}(\mathbf{x}), \quad (26)$$

$$\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}^T(\mathbf{x}) \mathbf{W}(\mathbf{x}) (\mathbf{I} - \mathbf{S}(\mathbf{x})). \quad (27)$$

因此由式 (18), (19), (25) 可以得到全局插值逼近函数 $u(\mathbf{x})$:

$$u(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) \mathbf{u} + \mathbf{s}(\mathbf{x}) \mathbf{u} = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{u}. \quad (28)$$

式中: $\bar{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{x})$ 为对角矩阵; $\Phi(\mathbf{x})$ 为正交改进插值移动最小二乘 (OIIMLS) 近似的形函数。其中,

$$\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) = [\bar{q}_2(\mathbf{x}), \bar{q}_3(\mathbf{x}), \dots, \bar{q}_m(\mathbf{x})], \quad (29)$$

$$\bar{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1/(\bar{q}_2, \bar{q}_2)_x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/(\bar{q}_3, \bar{q}_3)_x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/(\bar{q}_m, \bar{q}_m)_x \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}(\mathbf{x}). \quad (31)$$

式 (31) 中的每项可表示为

$$\Phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^n (\delta_{il} - s(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l)) w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) \cdot \sum_{k=2}^m \bar{q}_k(\mathbf{x}) \bar{q}_k(\mathbf{x}_l) / (\bar{q}_k, \bar{q}_k)_x + s(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i). \quad (32)$$

OIIMLS 的形函数 $\Phi_i(\mathbf{x})$ 满足 Kronecker δ 函数的性质和再现性质:

$$\Phi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (33)$$

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i(\mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}_i) = p_j(\mathbf{x}). \quad (34)$$

OIIMLS 不需要直接求解矩阵 $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ 的逆, 但是无法改变矩阵 $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ 的奇异或者病态的性质。本文通过忽略矩阵 $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ 中非常小的对角元素, 自适应地解决这个问题^[24]。如果 $(\bar{q}_k, \bar{q}_k)_x = 0$ 或 $(\bar{q}_k, \bar{q}_k)_x < \varepsilon_0$, 则忽略式 (32) 中的 $\bar{q}_k(\mathbf{x}) \bar{q}_k(\mathbf{x}_l) / (\bar{q}_k, \bar{q}_k)_x$ 项。 ε_0 为规定的非常小的公差, 本文取 $\varepsilon_0 = 10^{-20}$ 。因此, 可以自适应地避免了奇异或病态矩阵。

通过忽略非常小的对角线元素改变矩阵的奇异或者病态性质可能会导致精度的降低, 通过引入 Mirzaei^[25] 提出的位移和缩放多项式基函数, 可以提高自适应正交改进插值移动最小二乘法的精度和稳定性。在二维中, 对于线性基 $\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = [1, x_{zh}, y_{zh}]$, 对于二次基 $\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = [1, x_{zh}, y_{zh}, x_{zh}^2, x_{zh}y_{zh}, y_{zh}^2]$ 。其中 $x_{zh} = (x - z_1)/h$, $y_{zh} = (y - z_2)/h$, $\mathbf{z}(z_1, z_2)$ 取决于评估点, h 为节点间距^[25]。

2.2 改进 CPDI 的基本理论

与 MPM 不同, CPDI 方法中有粒子域的概念, CPDI 通过粒子域角点将粒子的信息映射到背景网格节点^[15-16]。CPDI 将 GIMP 中的矩形粒子域转换为平行四边形, 由向量 \mathbf{r}_1^o 和 \mathbf{r}_2^o 描述, 如图 2 (a) 所示。在时间步 t , 更新后的粒子域由向量 \mathbf{r}_1^t 和 \mathbf{r}_2^t 描述, 如图 2 (b) 所示。随着变形梯度 \mathbf{F}_p^t 的更新, 粒子域变形为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_1^t &= \mathbf{F}_p^t \mathbf{r}_1^o \\ \mathbf{r}_2^t &= \mathbf{F}_p^t \mathbf{r}_2^o \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

在时间步 t , 粒子域角点坐标 $\{\mathbf{x}_{c1}^t, \mathbf{x}_{c2}^t, \mathbf{x}_{c3}^t, \mathbf{x}_{c4}^t\}$ 可由粒子坐标 \mathbf{x}_p^t 和向量 \mathbf{r}_1^t , \mathbf{r}_2^t 表示:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_{c1}^t &= \mathbf{x}_p^t - \mathbf{r}_1^t - \mathbf{r}_2^t \\ \mathbf{x}_{c2}^t &= \mathbf{x}_p^t + \mathbf{r}_1^t - \mathbf{r}_2^t \\ \mathbf{x}_{c3}^t &= \mathbf{x}_p^t + \mathbf{r}_1^t + \mathbf{r}_2^t \\ \mathbf{x}_{c4}^t &= \mathbf{x}_p^t - \mathbf{r}_1^t + \mathbf{r}_2^t \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

CPDI 的形函数 N_{lp} 和形函数的梯度 ∇N_{lp} 为

$$N_{lp} = N_l(\mathbf{x}_p^t) = \frac{1}{4} \{N_l(\mathbf{x}_{c1}^t) + N_l(\mathbf{x}_{c2}^t) + N_l(\mathbf{x}_{c3}^t) + N_l(\mathbf{x}_{c4}^t)\}, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \nabla N_{lp} &= \nabla N_I(\mathbf{x}_p^t) \\ &= \frac{1}{2V_p} \left\{ (N_I(\mathbf{x}_{c1}^t) - N_I(\mathbf{x}_{c3}^t)) \begin{bmatrix} r_{1y}^t - r_{2y}^t \\ r_{2x}^t - r_{1x}^t \end{bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. (N_I(\mathbf{x}_{c2}^t) - N_I(\mathbf{x}_{c4}^t)) \begin{bmatrix} r_{1y}^t + r_{2y}^t \\ -r_{1x}^t - r_{2x}^t \end{bmatrix} \right\}. \quad (38) \end{aligned}$$

式中: V_p 为粒子 p 的体积; (r_{1x}^t, r_{1y}^t) 和 (r_{2x}^t, r_{2y}^t) 分别为 \mathbf{r}_1^t 和 \mathbf{r}_2^t 的分量。

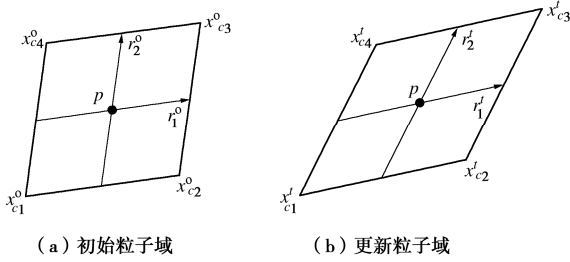


图 2 CPDI 的初始和更新的粒子域

Fig. 2 Initial and updated particle domains in CPDI method

传统 CPDI 采用式 (37) 将粒子的动量映射到背景网格节点, 粒子域内的速度局部为常数^[26]。由于粒子域内的速度场为零阶多项式, 将导致空间计算精度的降低。本文提出的改进 CPDI 方法中采用了类似 Wallstedt 等^[27]的方法, 利用速度梯度计算粒子域内的速度场, 如图 3 所示。改进 CPDI 中, 每个粒子域的速度场由粒子的速度和 4 个角点的速度 ($\mathbf{v}_p, \mathbf{v}_{c1}, \mathbf{v}_{c2}, \mathbf{v}_{c3}, \mathbf{v}_{c4}$) 组成, 4 个角点的速度见式 (39)。利用粒子和 4 个角点的数据, 可以采用 2.1 节中构建的自适应正交改进插值移动最小二乘形函数重构背景网格中的速度函数。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_{c1} &= \mathbf{v}_p + \nabla \mathbf{v}_p(\mathbf{x}_{c1} - \mathbf{x}_p), \\ \mathbf{v}_{c2} &= \mathbf{v}_p + \nabla \mathbf{v}_p(\mathbf{x}_{c2} - \mathbf{x}_p), \\ \mathbf{v}_{c3} &= \mathbf{v}_p + \nabla \mathbf{v}_p(\mathbf{x}_{c3} - \mathbf{x}_p), \\ \mathbf{v}_{c4} &= \mathbf{v}_p + \nabla \mathbf{v}_p(\mathbf{x}_{c4} - \mathbf{x}_p). \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

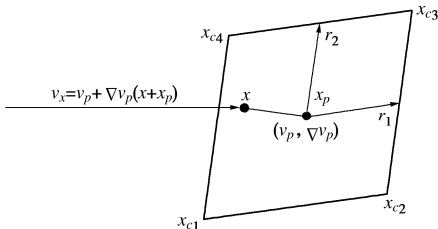


图 3 粒子域速度场

Fig. 3 Particle domain velocity field

首先将粒子信息映射到相关的背景网格节点, 计算节点的质量 m_I^t , 外力 $\mathbf{f}_I^{e,t}$ 和内力 $\mathbf{f}_I^{i,t}$:

$$m_I^t = \sum_p m_p N_I(\mathbf{x}_p) \quad , \quad (40)$$

$$\mathbf{f}_I^{e,t} = \sum_p m_p N_I(\mathbf{x}_p) \mathbf{b}_p^t + \sum_p m_p h^{-1} N_I(\mathbf{x}_p) \frac{\bar{\mathbf{r}}_p^t}{\rho_p} \quad , \quad (41)$$

$$\mathbf{f}_I^{i,t} = \sum_p m_p \frac{\partial N_I}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}_p} \frac{\boldsymbol{\sigma}_p^t}{\rho_p} \quad . \quad (42)$$

与传统 CPDI 不同, 本文的改进 CPDI 方法中背景网格节点速度由粒子速度 \mathbf{v}_p^t 和 4 个相关粒子域角点速度 $\mathbf{v}_{cj}^t (j=1, 2, 3, 4)$ 采用 AOIMLS 形函数更新, 且每个粒子和粒子域角点有 16 个相关节点。在背景网格上显式求解运动方程, 得到节点 I 的加速度 \mathbf{a}_I^t 和速度 $\mathbf{v}_I^{t+\Delta t}$:

$$\mathbf{a}_I^t = \frac{\mathbf{f}_I^{e,t} - \mathbf{f}_I^{i,t}}{m_I^t} \quad , \quad (43)$$

$$\mathbf{v}_I^{t+\Delta t} = \mathbf{v}_I^t + \Delta t \mathbf{a}_I^t \quad , \quad (44)$$

$$\mathbf{v}_I^t = \sum_p \left(\phi_I(\mathbf{x}_p) \mathbf{v}_p^t + \sum_{j=1}^4 \phi_I(\mathbf{x}_{cj}) \mathbf{v}_{cj}^t \right) \quad . \quad (45)$$

式中: $t+\Delta t$ 为下一个时间步; Δt 为时间步长; $\phi_I(\mathbf{x}_p)$ 和 $\phi_I(\mathbf{x}_{cj})$ 为自适应正交改进插值移动最小二乘形函数; \mathbf{v}_{cj}^t 为由式 (39) 计算得到的粒子域角点速度。

将计算得到的节点信息映射回粒子, 可得粒子的速度 $\mathbf{v}_p^{t+\Delta t}$ 和位置 $\mathbf{x}_p^{t+\Delta t}$:

$$\mathbf{v}_p^{t+\Delta t} = \mathbf{v}_p^t + \Delta t \sum_I N_I(\mathbf{x}_p) \mathbf{a}_I^t \quad , \quad (46)$$

$$\mathbf{x}_p^{t+\Delta t} = \mathbf{x}_p^t + \Delta t \sum_I N_I(\mathbf{x}_p) \mathbf{v}_I^{t+\Delta t} \quad . \quad (47)$$

然后, 更新粒子 p 的变形梯度 $\mathbf{F}_p^{t+\Delta t}$, 体积 $V_p^{t+\Delta t}$ 和密度 $\rho_p^{t+\Delta t}$:

$$\mathbf{F}_p^{t+\Delta t} = (\mathbf{E}_I + \nabla \mathbf{v}_p^{t+\Delta t} \Delta t) \mathbf{F}_p^t \quad , \quad (48)$$

$$V_p^{t+\Delta t} = \det(\mathbf{F}_p^{t+\Delta t}) V_p^0 \quad , \quad (49)$$

$$\rho_p^{t+\Delta t} = \frac{m_p}{V_p^{t+\Delta t}} \quad . \quad (50)$$

式中: \mathbf{E}_I 为单位矩阵, V_p^0 为粒子 p 的初始体积; $\nabla \mathbf{v}_p^{t+\Delta t}$ 为速度梯度, $\nabla \mathbf{v}_p^{t+\Delta t} = \sum_I \nabla N_I(\mathbf{x}_p) \mathbf{v}_I^{t+\Delta t}$ 。

最后根据式 (35) 和 (36) 更新粒子域的角点坐标 $\mathbf{x}_{cj}^{t+\Delta t} (j=1, 2, 3, 4)$ 和拓扑参数 $\mathbf{r}_1^{t+\Delta t}$ 和 $\mathbf{r}_2^{t+\Delta t}$ 。其中粒子域的角点速度 $\mathbf{v}_{cj}^{t+\Delta t} (j=1, 2, 3, 4)$ 由式 (39) 计算。

2.3 算例验证: 一维柱在自重下的压缩

第一个验证算例为柱在自重下的压缩^[28-29], 如图 4 所示, 计算模型高 $h_0 = 10.0$ m, 宽 $l_0 = 1.0$ m, 柱的侧面约束 x 方向位移, 底面约束 x, y 方向位移, 采用线弹性本构模型。柱的弹性模量 $E = 10^4$ Pa, 泊松比 $\nu = 0$, 密度 $\rho = 80$ kg/m³。背景网格为四节点正方形单元, 单元尺寸 $h_{x,y}$ 分别为 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64 m, 每个背景网格中粒子数 np 分别为 2², 3², 4², 5², 6², 7², 8², 9², 10²。模型的计算时间步长 $\Delta t = 0.4 h_{x,y} / C$, 其中 $C = \sqrt{E/\rho}$, 总计算时间

$T_i = 3 \text{ s}$, 重力 g 从 0 增加到 9.81 m/s^2 。

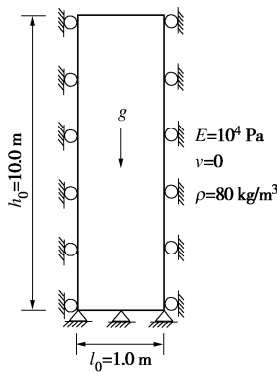


图 4 柱的几何模型和边界条件

Fig. 4 Geometry and boundary conditions of column

在网格尺寸 $h_{x,y} = 1/64 \text{ m}$, 粒子数 $np = 4$ 条件下, MPM、CPDI 和改进 CPDI 得到的柱的垂直应力数值解和解析解如图 5 所示。在 MPM 计算结果中出现了明显的应力振荡, 且计算结果与解析解有着较大的差别。CPDI 和改进 CPDI 计算结果与解析解吻合较好, 且改进 CPDI 得到的柱的垂直应力精度更高。

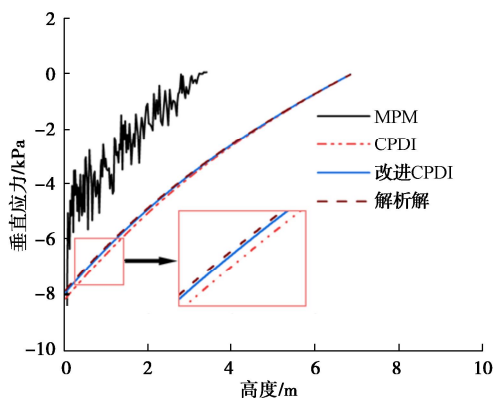


图 5 柱的垂直应力数值解和解析解 ($h_{x,y} = 1/64 \text{ m}$, $np = 4$)

Fig. 5 Numerical and analytical solutions for vertical stresses of column ($h_{x,y} = 1/64 \text{ m}$, $np = 4$)

柱的垂直应力解析解和数值解之间的误差为^[29]

$$E_r = \sum_{p=1}^{n_p} \frac{\|(\sigma_{yy}^n)_p - \sigma_{yy}^a(y_p^0)\| V_p^0}{\rho g h_0 V_0}, \quad (51)$$

$$\sigma_{yy}^a(y_p^0) = \rho g (h_0 - y_p^0). \quad (52)$$

式中: $(\sigma_{yy}^n)_p$ 为粒子 p 的垂直应力数值解; $\sigma_{yy}^a(y_p^0)$ 为粒子 p 在初始位置 y_p^0 的垂直应力解析解; V_p^0 为粒子 p 的初始体积; V_0 为柱的初始体积, $V_0 = \sum_{p=1}^{n_p} V_p^0$ 。

图 6, 7 为对数坐标系下 MPM、CPDI 和改进 CPDI 计算得到的不同粒子密度和不同网格尺寸下柱的垂直应力解析解和数值解的误差。考虑到计算效率, 选取网格尺寸 1.0 m 分析粒子密度对垂直应力解析解和数值解的误差影响, 如图 6 所示, MPM 计算误差随着每个背景网格中粒子数的增加先缓慢减小再迅速增

大, 表明通过适当增加粒子的密度可以降低数值噪声, 提高计算精度, 但当粒子密度过大时, MPM 计算结果会发生更剧烈的数值噪声, 导致精度大幅度降低。CPDI 和改进 CPDI 计算误差随着粒子密度的增加而降低, 同时改进 CPDI 得到的误差更低。在粒子密度为 100 时, 改进 CPDI 得到的垂直应力解析解和数值解的误差比 CPDI 低约 6%。如图 7 所示, 在粒子数 $np = 4$ 时, MPM 计算得到的柱的垂直应力数值解和解析解的误差随着网格尺寸的减小而增大, 分析原因为网格尺寸较小时, 易出现单元穿越误差, 导致严重的应力振荡, 导致 MPM 计算精度降低。CPDI 和改进 CPDI 得到的误差随着网格尺寸的减小而减小。网格尺寸为 1.0 m 时, CPDI 和改进 CPDI 得到的误差基本相同, 当网格尺寸进一步减小时, 改进 CPDI 得到更小的误差。当网格尺寸为 $1/64 \text{ m}$ 时, 改进 CPDI 得到的垂直应力解析解和数值解的误差比 CPDI 低约 20%, 表明改进 CPDI 方法具有更高的计算精度。

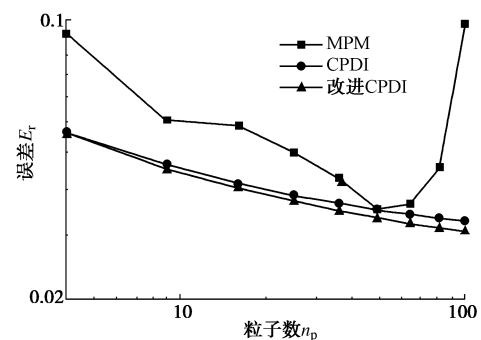


图 6 不同粒子密度下垂直应力解析解和数值解的误差 ($h_{x,y} = 1.0 \text{ m}$)

Fig. 6 Errors of analytical and numerical solutions for vertical stresses of column at different particle densities ($h_{x,y} = 1.0 \text{ m}$)

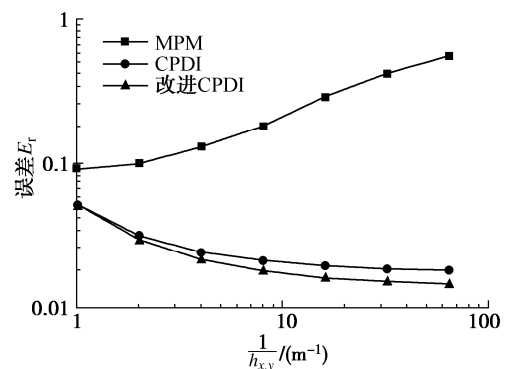


图 7 不同网格尺寸下垂直应力解析解和数值解的误差 ($np = 4$)

Fig. 7 Errors of analytical and numerical solutions for vertical stresses of column at different grid cell sizes ($np = 4$)

2.4 算例验证: 砂柱坍塌问题

第二个验证算例为 Lube 等^[30-31]研究的砂柱坍塌自由表面的演变, 试验示意图如图 8 (a) 所示。砂柱

的初始宽度和高度分别为 0.0905, 0.6335 m, 试验开始时下落的重物迅速提起挡板, 砂在重力作用下自由运动。砂柱的 Mohr-Coulomb 参数: 剪切模量 $G_c = 0.323$ MPa, 体积模量 $K_c = 0.7$ MPa, 泊松比 $\nu = 0.3$, 黏聚力 $c = 0$ MPa, 内摩擦角 $\varphi = 31^\circ$, 膨胀角 $\psi = 1^\circ$, 初始密度 $\rho = 2650$ kg/m³。考虑到计算效率, 本算例背景网格尺寸为 0.02 m×0.02 m, 每个背景网格中有 25 个粒子, 试验模型共有 3634 个粒子, 模型的网格和粒子初始位置如图 8 (b) 所示。

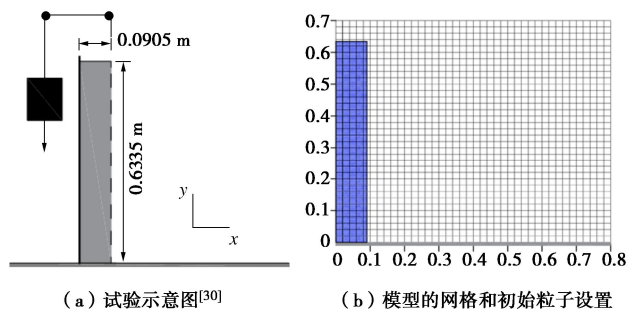


图 8 砂柱坍塌试验示意图、模型的网格和初始粒子设置
Fig. 8 Experimental schematics, grid and initial particle setup of sand column

图 9 为改进 CPDI 得到的砂柱坍塌过程中的总位移云图, 图中的黑色实线为砂柱坍塌试验中砂柱自由面的位置^[30-31]。由图 9 可知, 在相同时刻, 改进 CPDI 得到的模拟结果和试验结果基本一致, 改进 CPDI 可以准确模拟砂柱坍塌的整个过程, 最终砂柱坍塌的滑移距离为 0.8 m。同时可以观察到, 在计算过程中, 一些粒子分离, 这可以通过更精细的网格和更多的粒子改进。

图 10 为 CPDI 和改进 CPDI 模拟得到的砂柱堆积体的自由面与试验所得自由面对比。由图 10 可知, 在 0~0.4 m 范围内, CPDI 模拟得到的砂柱自由面高度大于试验值, 而改进 CPDI 模拟结果与试验值较一致。在 0.4~0.8 m 范围内, CPDI 和改进 CPDI 模拟结果与试验值一致。结果表明, 改进 CPDI 模拟结果比 CPDI 更符合试验结果, 证明了改进 CPDI 的精度。

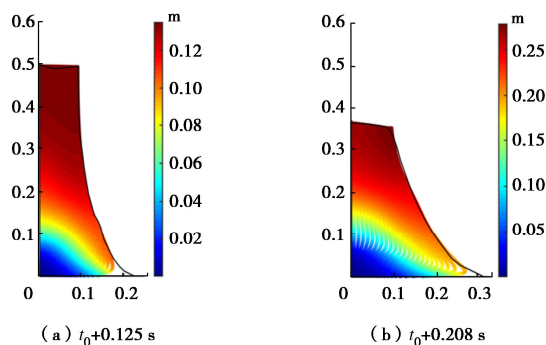


图 10 砂柱坍塌自由面对比

Fig. 10 Comparison of free surface of collapsing sand column
2.5 算例验证: 隧道坍塌离心机试验

为了验证改进 CPDI 方法模拟隧道坍塌的可行性, 将改进 CPDI 模拟结果与 Kamata 等^[32]的隧道坍塌离心机试验结果进行了对比。隧道的几何模型和边界条件如图 11 所示, 模型两侧边界约束水平位移, 底部边界约束水平和垂直位移。隧道模型长度

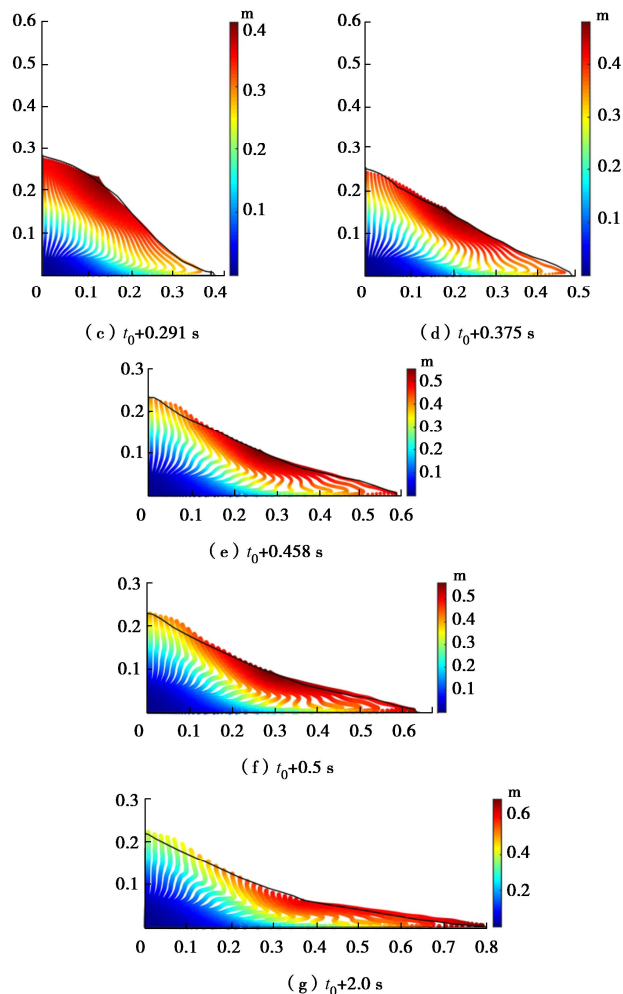


图 9 砂柱坍塌改进 CPDI 模拟结果与试验结果^[30-31]对比
Fig. 9 Comparison between improved CPDI simulation and experimental results^[30-31] for sand column collapse

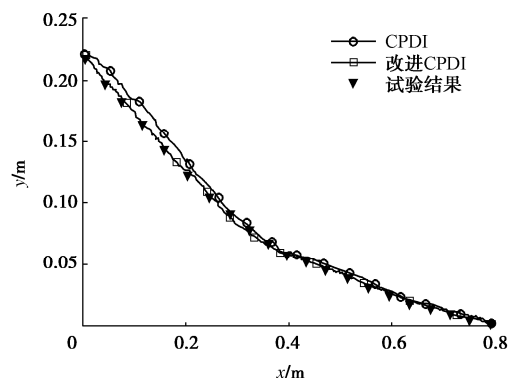


图 10 砂柱坍塌自由面对比

Fig. 10 Comparison of free surface of collapsing sand column
2.5 算例验证: 隧道坍塌离心机试验

为了验证改进 CPDI 方法模拟隧道坍塌的可行性, 将改进 CPDI 模拟结果与 Kamata 等^[32]的隧道坍塌离心机试验结果进行了对比。隧道的几何模型和边界条件如图 11 所示, 模型两侧边界约束水平位移, 底部边界约束水平和垂直位移。隧道模型长度

L 为 400 mm, 高度 H 为 240 mm, 隧道覆盖层厚度 C 为 80 mm, 隧道直径 D 为 80 mm, 隧道开挖长度 L_d 为 60 mm。改进 CPDI 的背景网格尺寸为 $5\text{ mm} \times 5\text{ mm}$, 每个背景网格中有 4 个粒子, 试验模型共有 4368 个背景网格, 14592 个粒子。砂的 Mohr-Coulomb 模型参数根据参考文献[32, 33]确定: 弹性模量 $E = 5.0\text{ MPa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$, 黏聚力 $c = 0\text{ kPa}$, 内摩擦角 $\varphi = 34.5^\circ$, 膨胀角 $\psi = 0^\circ$, 密度 $\rho = 1510\text{ kg/m}^3$ 。

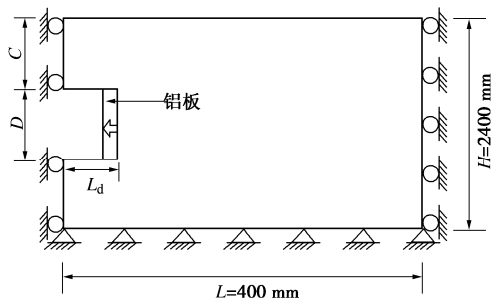


图 11 隧道几何模型和边界条件

Fig. 11 Geometry and boundary conditions of tunnel

图 12 (a) 为未加固隧道在重力加速度为 $30g$ 时, 铝板被拉出触发的坍塌模式, 图 12 (b) 为改进 CPDI 计算得到的隧道坍塌后的总位移云图, 图 12 (b) 中的红色实线表示离心机试验得到的隧道坍塌形态。由图 12 可知, 在改进 CPDI 模拟中, 隧道开挖面附近的砂流入隧道, 并在地表形成沉降槽。隧道破坏体的两个滑移面一个从开挖面顶部几乎垂直延伸到地面, 另一个从开挖面底部斜向上延伸到地面, 破坏区域位于开挖面前方约 $0.3D$ 范围内。隧道坍塌总位移呈拱形向上延伸到地面, 最大地面沉降量约为 $0.15D$, 改进 CPDI 模拟的隧道坍塌模式与离心机试验的坍塌模式接近。同时可以观察到, 改进 CPDI 得到的沉降槽比离心机试验结果宽约 $0.25D$, 分析原因为改进 CPDI 采用平面应变模型导致的几何效应影响, 可以将改进 CPDI 扩展到三维以更准确地模拟离心机试验, 尽管如此, 改进 CPDI 可以模拟离心机试验中的隧道坍塌破坏机制。

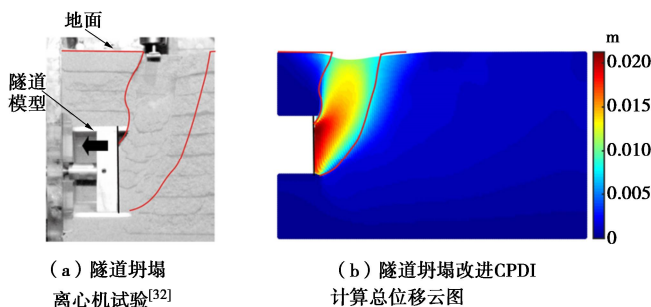


图 12 离心机试验和改进 CPDI 计算的隧道坍塌

Fig. 12 Centrifuge test and improved CPDI calculation for tunnel collapse

3 工程应用

3.1 工程概况

青岛地铁 4 号线崂山区静港路站—沙子口站区间由两条平行的单洞隧道组成, 隧道间距为 13.8 m, 左洞全长 1123.531 m, 右洞全长 1143.346 m, 采用盾构法+矿山法施工, 其中矿山法隧道净宽 7.4 m, 隧顶埋深 19.6 m, 采用两台阶法施工, 上台阶高约 3.7 m, 下台阶高约 3.85 m, 单台阶长度为 5 m。隧道初期支护为 50 cm 间距的钢拱架和 30 cm 厚度的 C25 喷射混凝土, 二次衬砌为 30 cm 厚度的 C45 钢筋混凝土。当隧道穿越围岩性质较差的区域时, 在隧道拱部 120° 范围内施作长 3.5 m, 倾角 15° 的 $\Phi 42$ 超前小导管进行注浆加固。

2019 年 5 月 27 日, 隧道施工到左洞 ZDK25+343 时发生了塌陷事故, 最终形成如图 13 所示的长 30.6 m, 宽 25.5 m, 深 6.0 m 的大型地面塌陷, 这次灾难造成了严重的生命财产损失。左洞 ZDK25+343 塌陷处隧道采用矿山法施工, 地层从上到下依次为 6.4 m 的杂填土层, 0.8 m 的粉质黏土层, 7.1 m 的中粗砂层, 4.9 m 的粉质黏土层和风化程度不同的凝灰岩层, 地质剖面图如图 14 所示, 地层物理力学参数见表 1[34-35]。

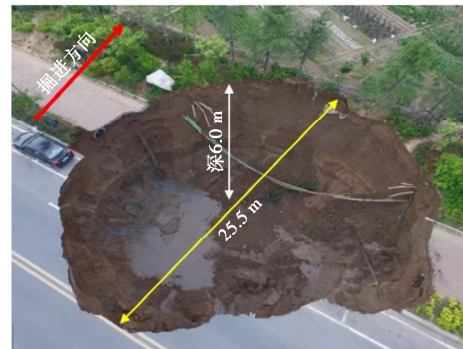


图 13 地面塌陷

Fig. 13 Ground collapse

3.2 隧道坍塌过程分析

选取图 14 中的数值模拟段进行隧道坍塌全过程的分析, 隧道模型和边界条件见图 15。模型尺寸为 $100\text{ m} \times 47\text{ m}$, 隧道埋深为 19.6 m, 模型两侧边界约束水平位移, 底部边界约束水平和垂直位移, 上部为自由面。在上台阶掌子面顶部及上方各地层分界处布设 4 个监测点监测围岩水平和竖向位移, 监测点坐标分别为 $A(60, 27.5)$, $B(60, 32.5)$, $C(60, 39.5)$, $D(60, 47)$ 。本节模拟过程包括初始地应力平衡阶段和隧道开挖阶段。首先将重力线性加载, 在 10 s 加载完成, 同时对所有活动单元施加局部阻尼, 得到满足准静态平衡条件的初始应力场。

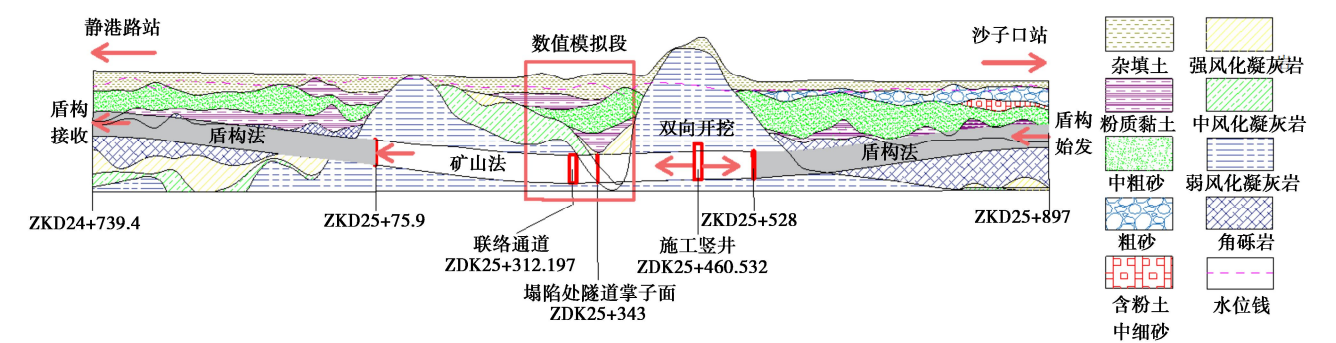


图 14 静沙区间地质剖面图

Fig. 14 Geological profile of Jinggang Road Station-Shazikou Station section

表 1 地层物理力学参数

Table 1 Physical and mechanical parameters of strata

地层	弹性模量 E/MPa	泊松比 ν	黏聚力 c/kPa	内摩擦角 $\varphi/(\text{^\circ})$	重度 $\gamma/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-3})$
杂填土	8.0	0.20	0	15	17.5
中粗砂	6.07	0.33	13.9	12.5	18.5
粉质黏土	5.671	0.30	8.2	12	19.7
强风化凝灰岩	20	0.30	3.0	30	22.5
中风化凝灰岩	50	0.25	3000	45	26.0
微风化凝灰岩	5000	0.22	11500	55	26.7

此时，开挖至 ZDK25+343 处，并将所有节点的速度重置为 0，开挖后隧道顶板衬砌结构采用两层粒子实现，且约束水平和垂直位移，采用两台阶法开挖，两台阶的开挖面为自由面。采用 Mohr-Coulomb 模型，模型相关参数见表 1。背景网格单元尺寸为 1 m × 1 m，每个网格内有 4 个粒子。计算时间步长为 10⁻⁴ s，计算总时间为 50 s。隧道坍塌过程中的地面沉降和剪应变如图 16，17 所示。

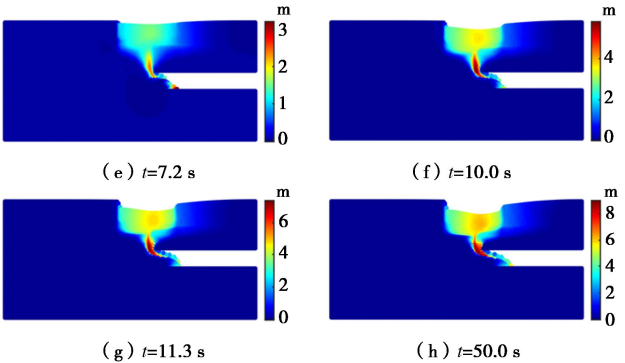


图 16 隧道坍塌过程中的地面沉降

Fig. 16 Ground subsidence during tunnel collapse

隧道开挖以后，随着围岩变形逐渐增大，围岩将经历弹性、塑性和失稳的过程。如图 16 所示，计算初始阶段，隧道上台阶掌子面前方地层向下挤压隧道产生沉降变形，而下台阶出现轻微隆起现象。随着计算的进行，沉降破坏区发展至地面，且呈现上宽下窄的“杯状”。最大竖向位移由上台阶掌子面前方岩体转移至地面。随着隧道的进一步坍塌，上台阶掌子面前方岩体流入隧道内部，下台阶在上方岩体的挤压作用下开始滑动。上台阶掌子面前方形形成狭窄的流通道且竖向位移最大，分析原因为此处为粉质黏土地层，岩体强度较低，黏聚力较小，易流动发生破坏，最终形成深 6 m 的地面塌陷区。

如图 17 所示，剪切带最先在上台阶掌子面的顶部和底部形成，同时下台阶发生剪切变形，距离上台阶掌子面前方 15 m 处地面出现竖向剪切带。随着隧道坍塌的进一步演化，上台阶掌子面处的剪切带向上延

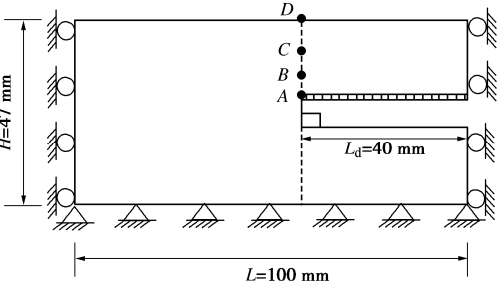
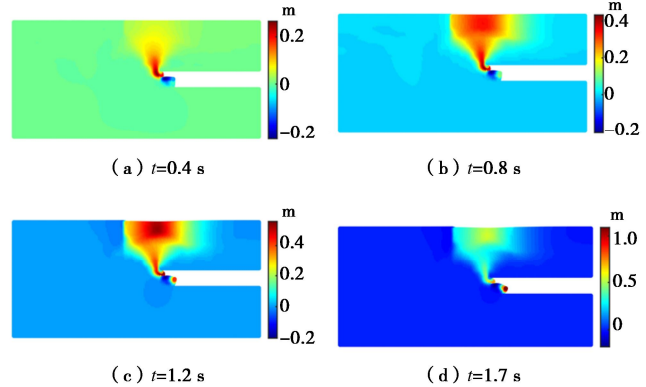


图 15 隧道几何模型和边界条件

Fig. 15 Geometry and boundary conditions of tunnel



伸, 最终形成“杯状”剪切带, 导致了“杯状”沉降破坏区。图 18 为隧道坍塌后地面沉降曲线, 图中竖向虚线为上台阶掌子面位置, 可以观察到地面存在塌陷区、变形区和稳定区。地面塌陷区位于上台阶掌子面前方 15 m, 后方 10.3 m 范围内, 呈宽 25.3 m, 深 6 m 的“U”形。变形区位于上台阶掌子面前方 15~30 m 和后方 10.3~25 m 范围, 且后方变形区的变形较大, 与隧道坍塌现场结果基本一致。

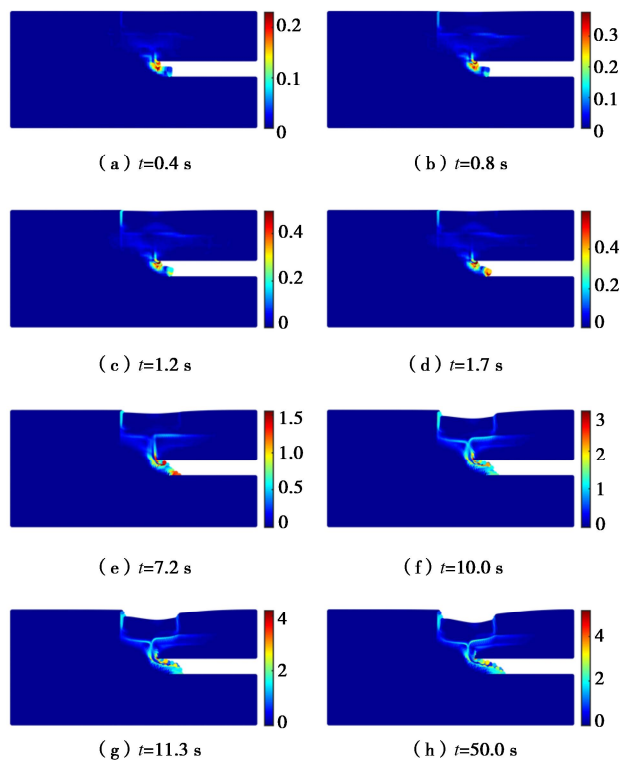


图 17 隧道坍塌过程中的剪应变

Fig. 17 Shear strains during tunnel collapse

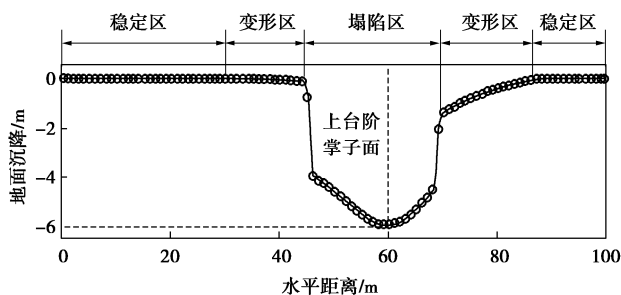


图 18 隧道坍塌后地面沉降曲线

Fig. 18 Curve of ground subsidence after tunnel collapse

监测点的竖向位移和水平位移时程曲线变化规律如图 19 所示。由图 19 可知, 监测点的竖向位移和水平位移变化规律一致, 呈缓慢变形—急剧变形—缓慢变形—变形稳定的变化趋势。由于上台阶掌子面为自由面, 监测点 A 处围岩在上方岩体的挤压作用下向隧道内流动, 围岩变形主要以水平位移为

主, 而监测点 B, C, D 的围岩变形主要以竖向位移为主。地面监测点 D 的竖向位移最大, 为 6 m, 且几乎不产生水平位移。以上结果均与现场实测结果较吻合, 该结果充分证明了改进 CPDI 方法在岩土工程大变形问题中的适用性及准确性。

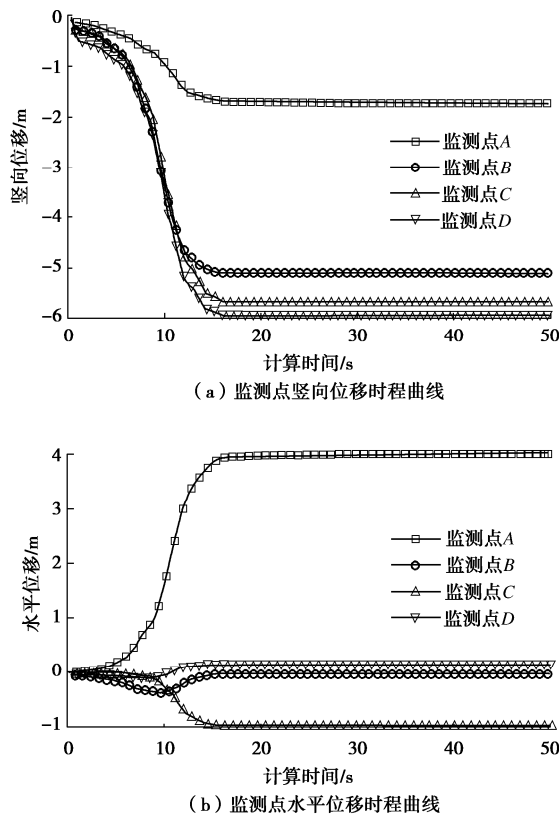


图 19 监测点竖向位移和水平位移时程曲线

Fig. 19 Time-history curves of vertical and horizontal displacements at monitoring points

4 结 论

本文在 CPDI 理论框架中引入 AOIMLS 形函数, 提出了一种改进 CPDI 方法用于岩土工程大变形数值模拟, 降低了传统 MPM 和 CPDI 方法中的粒子穿越网格误差, 并通过经典算例验证了改进 CPDI 方法的正确性以及模拟隧道坍塌的可行性, 得到以下 3 点结论。

(1) AOIMLS 避免了求解逆矩阵, 与 MLS 相比, 提高了鲁棒性。同时满足 Kronecker δ 函数性质, 允许直接施加本质边界条件。AOIMLS 形函数用于网格和粒子之间的插值和映射以减少单元交叉误差, 提高了计算精度。

(2) 改进 CPDI 采用速度梯度计算粒子域内的速度场, 并采用粒子和粒子域角点速度构造背景网格的速度函数。算例验证表明, 改进 CPDI 方法模拟结果与理论值和试验结果较一致, 与 MPM 和 CPDI 相比,

改进 CPDI 提高了计算精度。

(3) 最后采用改进 CPDI 模拟了青岛地铁 4 号线静沙区间地面塌陷全过程, 模拟结果与隧道坍塌现场基本一致, 表明了改进 CPDI 方法在岩土工程大变形领域的适用性及优势, 为岩土工程大变形计算领域提供一种新的数值计算方法, 可为隧道施工及支护设计提供一定的指导作用。

参考文献:

- [1] 张成平, 张顶立, 王梦恕, 等. 城市隧道施工诱发的地面塌陷灾变机制及其控制[J]. 岩土力学, 2010, **31**(增刊 1): 303-309. (ZHANG Chengping, ZHANG Dingli, WANG Mengshu, et al. Catastrophe mechanism and control technology of ground collapse induced by urban tunneling[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, **31**(S1): 303-309. (in Chinese))
- [2] SULSKY D, CHEN Z, SCHREYER H L. A particle method for history-dependent materials[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1994, **18**(1/2): 179-196.
- [3] SULSKY D, ZHOU S J, SCHREYER H L. Application of a particle-in-cell method to solid mechanics[J]. Computer Physics Communications, 1995, **87**(1/2): 236-252.
- [4] HARLOW F H. The Particle-in-cell Method for Numerical Solution of Problems in Fluid Dynamics[R]. Los Alamos: Los Alamos National Lab, 1962.
- [5] BRACKBILL J U, KOTHE D B, RUPPEL H M. Flip: a low-dissipation, particle-in-cell method for fluid flow[J]. Computer Physics Communications, 1988, **48**(1): 25-38.
- [6] BRACKBILL J U, RUPPEL H M. FLIP: a method for adaptively zoned, particle-in-cell calculations of fluid flows in two dimensions[J]. Journal of Computational Physics, 1986, **65**(2): 314-343.
- [7] BANDARA S, SOGA K. Coupling of soil deformation and pore fluid flow using material point method[J]. Computers and Geotechnics, 2015, **63**: 199-214.
- [8] CUOMO S, PERNA A D, MARTINELLI M. Material point method (MPM) hydro-mechanical modelling of flows impacting rigid walls[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2021, **58**: 1730-1743.
- [9] 王兆南, 王 刚. 饱和孔隙介质的耦合物质点-特征有限元方法[J]. 岩土工程学报, 2023, **45**(5): 1094-1102. (WANG Zhaonan, WANG Gang. Coupled material point method and characteristic finite element method for saturated porous media[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2023, **45**(5): 1094-1102. (in Chinese))
- [10] 孙玉进, 宋二祥. 大位移滑坡形态的物质点法模拟[J]. 岩土工程学报, 2015, **37**(7): 1218-1225. (SUN Yujin, SONG Erxiang. Simulation of large-displacement landslide by material point method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, **37**(7): 1218-1225. (in Chinese))
- [11] 钟祖良, 贺凯源, 宋宜祥, 等. 基于仿射速度矩阵改进物质点法的大位移滑坡研究[J]. 岩土工程学报, 2022, **44**(9): 1626-1634. (ZHONG Zuliang, HE Kaiyuan, SONG Yixiang, et al. Large-displacement landslides based on affine velocity matrix-improved material point method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2022, **44**(9): 1626-1634. (in Chinese))
- [12] CUOMO S, PERNA A D, MARTINELLI M. Modelling the spatio-temporal evolution of a rainfall-induced retrogressive landslide in an unsaturated slope[J]. Engineering Geology, 2021, **294**: 106371.
- [13] CORTIS M, COOMBS W, AUGARDE C, BROWN M, BRENNAN A, ROBINSON S. Imposition of essential boundary conditions in the material point method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2018, **113**: 130-152.
- [14] BARDENHAGEN S G, KOBER E M. The Generalized interpolation material point method[J]. Computer Modeling in Engineering and Sciences, 2004, **5**(6): 477-495.
- [15] SADEGHIRAD A, BRANNON R M, BURGHARDT J. A convected particle domain interpolation technique to extend applicability of the material point method for problems involving massive deformations[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2011, **86**(12): 1435-1456.
- [16] SADEGHIRAD A, BRANNON R M, GUILKEY J E. Second-order convected particle domain interpolation (CPDI2) with enrichment for weak discontinuities at material interfaces[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2013, **95**(11): 928-952.
- [17] PRUIJN N S. The improvement of the Material Point Method by Increasing Efficiency and Accuracy[D]. Delft: Delft University of Technology, 2016.
- [18] STEFFEN M, KIRBY R M, BERZINS M. Analysis and reduction of quadrature errors in the material point method (MPM)[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008, **76**(6): 922-948.
- [19] STEFFEN M, WALLSTEDT P C, GUILKEY J E, et al.

- Examination and analysis of implementation choices within the material point method (MPM)[J]. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2008, **31**(2): 107-127.
- [20] HU Y M, FANG Y, GE Z H, et al. A moving least squares material point method with displacement discontinuity and two-way rigid body coupling[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2018, **37**(4): 1-14.
- [21] SONG J U, KIM H G. An improved material point method using moving least square shape functions[J]. *Computational Particle Mechanics*, 2021, **8**(4): 751-766.
- [22] WANG J F, SUN F X, CHENG Y M. An improved interpolating element-free Galerkin method with a nonsingular weight function for two-dimensional potential problems[J]. *Chinese Physics B*, 2012, **21**(9): 090204.
- [23] WANG J F, WANG J F, SUN F, et al. An interpolating boundary element-free method with nonsingular weight function for two-dimensional potential problems[J]. *International Journal of Computational Methods*, 2013, **10**(6): 1350043.
- [24] WANG Q, ZHOU W, FENG Y T, et al. An adaptive orthogonal improved interpolating moving least-square method and a new boundary element-free method[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, **353**: 347-370.
- [25] MIRZAEI D. Analysis of moving least squares approximation revisited[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015, **282**: 237-250.
- [26] TRAN Q A, SOŁOWSKI W, BERZINS M, et al. A convected particle least square interpolation material point method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2019, **121**(6): 1068-1100.
- [27] WALLSTEDT P C, GUILKEY J E. An evaluation of explicit time integration schemes for use with the generalized interpolation material point method[J]. *Journal of Computational Physics*, 2008, **227**(22): 9628-9642.
- [28] WYSER E, ALKHIMENKOV Y, JABOYEDOFF M, et al. A fast and efficient MATLAB-based MPM solver: fMPMM-solver v1.1[J]. *Geoscientific Model Development*, 2020, **13**(12): 6265-6284.
- [29] COOMBS W M, AUGARDE C. AMPLE: a material point learning environment[J]. *Advances in Engineering Software*, 2020, **139**: 102748.
- [30] LUBE G, HUPPERT H E, SPARKS R S J, et al. Collapses of two-dimensional granular columns[J]. *Physical Review E Statistical, Nonlinear, Biological and Soft Matter Physics*, 2005, **72**(4): 041301.
- [31] LUBE G, HUPPERT H E, SPARKS R S J, et al. Static and flowing regions in granular collapses down channels: insights from a sedimenting shallow water model[J]. *Physics of Fluids*, 2007, **19**(10): 106601.
- [32] KAMATA H, MASHIMO H. Centrifuge model test of tunnel face reinforcement by bolting[J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2003, **18**(2/3): 205-212.
- [33] CHENG X S, ZHENG G, SOGA K, et al. Post-failure behavior of tunnel heading collapse by MPM simulation[J]. *Science China Technological Sciences*, 2015, **58**(12): 2139-2153.
- [34] ZHANG Y J, ZHANG W G, XIA H S, et al. Case study and risk assessment of water inrush disaster in Qingdao Metro Line 4[J]. *Applied Sciences*, 2023, **13**: 3384.
- [35] YAN F Y, QIU W G, SUN K G, et al. Investigation of a large ground collapse, water inrush and mud outburst, and countermeasures during subway excavation in Qingdao: a case study[J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2021, **117**: 104127.