

DOI: 10.11779/CJGE20230426

基于颗粒分布分形模型毛细水上升高度计算分析

李淑娥¹, 陈志明¹, 徐永福^{*2,3}, 徐宇冉², 康峰沂¹, 杜仲宝¹

(1. 南通市公路事业发展中心, 江苏 南通 226007; 2. 上海交通大学土木工程系, 上海 200240; 3. 皖江工学院, 安徽 马鞍山 243031)

摘要: 由表面张力引起的弯液面两侧压力差推动毛细水上升, 造成低路堤路基产生毛细水病害, 毛细水上升高度是防治路基毛细水病害的关键所在。克服了毛细水上升高度测量试验的缺陷, 基于土粒分布的分形模型, 提出毛细水上升高度的计算方法。采用筛分试验计算粉土颗粒分布分维, 建立粉土颗粒级配的分形模型, 系统地分析分维、进气值、孔隙率、毛细水最大上升高度和饱和渗透系数对毛细水上升高度和速度的影响。计算结果表明: 毛细水上升高度与时间呈幂函数正相关关系, 毛细水上升高度随颗粒分布分维、进气值、毛细水最大上升高度和饱和渗透系数增大而增大, 随孔隙率增大而减小; 毛细水上升速度只与颗粒分布的分维有关, 随颗粒分布分维增大而增大, 不受进气值、孔隙率、毛细水最大上升高度和饱和渗透系数的影响。

关键词: 粉土; 毛细水; 级配; 分形; 分维

中图分类号: P642 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2024)10-2221-08

作者简介: 李淑娥(1969—), 男, 大学本科, 教授级高级工程师, 主要从事公路建设管理工作。E-mail: 2536372568@qq.com。

Calculation of rising height of capillary water based on fractal model for grain-size distribution

LI Shue¹, CHEN Zhiming¹, XU Yongfu^{2,3}, XU Yuran², KANG Fengyi¹, DU Zhongbao¹

(1 Nantong Highway Development Center, Nantong 226007, China; 2 Department of Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200003, China; 3 Wanjiang Institute of Technology, Maanshan 243031, China)

Abstract: The rising of capillary water, which is driven due to the pressure difference at both sides of the meniscus caused by surface tension, causes the phenomenon of mud boiling and mud seepage in the silt roadbed. The rising height of the capillary water is the key to preventing and controlling the mud boiling and mud seepage in the roadbed. A method for calculating the rising height of the capillary water based on the grain-size distribution is proposed, which overcomes the test defects in measuring the height of the capillary water. By using the sieving tests to calculate the grain-size distribution and fractal of silt, a fractal model is established to analyze the effects of the fractal dimension, air-entry value, porosity, the maximum rising height of the capillary water and saturated permeability coefficient on the rising height and velocity of the capillary water. The calculated results show that the rising height of the capillary water is positively correlated with the time as a power function, increases with the fractal dimension, air-entry value, the maximum rising height of the capillary water and saturated permeability coefficient, and decreases with the porosity. The rising speed of the capillary water is only related to the fractal dimension of the grain-size distribution and increases with the increase of the fractal dimension of the grain-size distribution but not related to the porosity, air-entry value and the saturated permeability coefficient.

Key words: silt; capillary water; grain-size distribution; fractal; fractal dimension

0 引言

临海地区的地下水埋深浅, 普通公路路基填料多为细砂和粉质土, 工程性质差, 导致路基沉陷、开裂、冻胀、翻浆冒泥等毛细水病害频发(图1), 对公路基础设施产生严重破坏, 直接影响了交通运输的安全与畅通^[1-3]。普通公路多为低路堤, 整个路堤高度都

在毛细水影响范围内。细砂和粉质土的颗粒粒径小, 毛细水活跃、上升高度大, 路基强度降低明显、水稳

基金项目: 国家重点研发计划项目(2019YFC509800)

收稿日期: 2023-05-17

*通信作者(E-mail: yongfuxu@sjtu.edu.cn)

性差^[4-6]。



图 1 路基毛细水病害现象

Fig. 1 Phenomenon of capillary water damage in roadbed

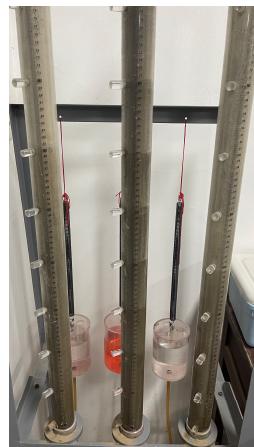


图 2 竖管法试验

Fig. 2 Vertical tube test

基于毛细水作用机制, 毛细水上升高度常采用竖管法测量(图 2)^[7-8]。为保持平衡, 收缩膜内产生张力, 沿收缩膜表面切线方向, 在表面张力的作用下水向上运动。毛细水上升高度为^[9-11]

$$h_c = \frac{2T \cos \alpha}{\rho_w g r} . \quad (1)$$

式中: T_s 为水的表面张力; α 为水与固体的接触角; r 为毛细管半径; ρ_w 为水的密度; g 为重力加速度; h_c 为毛细水上升最大高度。胡明鉴等^[7]采用竖管法研究级配、粒径、干密度、盐度等因素对钙质砂毛细水上升高度的影响。邓改革等^[8]通过不同粒径砂土的毛细水上升高度的竖管法试验, 揭示毛细水上机理及其上升高度。张平等^[12]研究颗粒级配对毛细水上升的影响, 发现颗粒越粗达到最大上升高度所需的时间越短。夏宁等^[13]根据长江口细砂毛细水上升的竖管法试验, 确定毛细水上升高度的含水率分布及其上升高度与时间的关系, 给出长江口细砂毛细水上升的合理高度。栗现文等^[14]研究了高矿化度对毛细水上升的影响, 指出高矿化度不仅对毛细水重力产生影响。苗强强等^[15]通过自制的毛细水上升试验系统, 研究了初始含水率对毛细上升高度和上升速度的影响。赵明华等^[16]分析了非饱和土路基毛细作用现象机理, 探讨了毛细水上升高度的影响因素。王生平等^[17]探讨了毛细作用下的湿度变化规律和毛细水上升高度, 分析了路基高度、

初始含水率和渗透系数对毛细作用的影响。米海存等^[18]利用竖管法试验测量风积砂毛细水上升高度和速率与时间的关系。袁玉卿等^[19]通过室内竖管法试验研究了豫东黄泛区粉砂土毛细水上升规律及控制技术, 指出级配碎石、水泥稳定土、纤维水泥稳定土能有效阻隔毛细水上升。竖管法试验测量毛细水上升高度的困难是确定毛细水前锋面, 当前缺少毛细水上升高度的计算方法^[20-22]。

杜红普等^[20]采用有限差分方法对多孔介质非饱和毛细水上升模型进行非稳态求解, 提出毛细水上升高度理论。肖红宇等^[21]基于黏性土的分形模型, 基于理想毛细管模型, 导出毛细水上升高度预测公式。粉土颗粒分布符合分形模型已被广泛证实, 采用颗粒分布分维作为描述颗粒级配的参数也是可行的^[22-26]。基于此, 本文建立粉土颗粒分布的分形模型, 采用颗粒分布分维表述颗粒分布特性, 根据 Darcy 定律导出毛细水上升高度的理论公式, 结合非饱和粉土的渗透系数的分形模型, 建立毛细水上升理论, 分析粉土颗粒分布的分维、孔隙率、进气值和渗透系数对毛细水上升高度的影响。

1 颗粒分布的分形模型

土颗粒是由母岩风化破碎而成的, 粒径为 r 的土粒, 在时刻 t 时分布函数为 $P(r, t)$, 即为粒径小于等于 r 的土颗粒的质量累积百分数。在土颗粒形成过程中, 粒径大于 r 的土颗粒风化破碎形成粒径小于等于 r 的颗粒, 同时, 粒径为 r 的土颗粒进一步风化破碎成粒径小于 r 的颗粒, 因此分布函数 $P(r, t)$ 是 r 和 t 的连续函数。在 dt 时间内, 粒径介于 $r-r+dr$ 的颗粒质量为 $(\partial/\partial t)[\partial P(r, t)/\partial r]dt dr$, 一部分颗粒风化破碎成更细的颗粒, 质量为 $A(r)dt \cdot [\partial P(r, t)/\partial r]dr$, $A(r)$ 是粒径为 r 的颗粒风化破碎速率。更大粒径 (R) 颗粒以速率 $A(r)$ 破碎成粒径为 r 的颗粒, 质量为 $\int_r^{r_{max}} A(r)dt \cdot [\partial P(R, t)/\partial a][\partial B(R, r)/\partial r]dad r (R > r)$, 这里 $B(R, r)$ 是由粒径为 R 的土粒风化成粒径为 r 的颗粒的分布函数。土颗粒形成过程中, 粒径为 r 的土颗粒的质量保持不变, 表示为^[27]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial P(r, t)}{\partial r} dt dr &= -A(r)dt \frac{\partial P(r, t)}{\partial r} dr + \\ &\int_r^{r_{max}} A(r)dt \frac{\partial P(R, t)}{\partial R} \frac{\partial B(R, r)}{\partial r} dR dr . \end{aligned} \quad (2)$$

通常情况下, $A(r)=kr^\lambda$, $B(R, r)=(r/R)^\lambda$ ^[28-30]。同时, 为了简单起见, 令 $P(r_{max}, t)=1$, 得到

$$P(r, t)=1-\exp(-ktr^\lambda) . \quad (3)$$

取 $kt=r_{max}^{-\lambda}$, 土颗粒的质量累积百分数表示为

$$P(r)=\left(\frac{r}{r_{max}}\right)^\lambda . \quad (4)$$

根据颗粒分布的分形模型, 颗粒数与颗粒半径之间的关系满足^[31]

$$N(r) = Cr^{-D} \quad . \quad (5)$$

颗粒半径小于 r 的颗粒质量由 $M(\leq r) = \rho r^3 N(r)$, 得到颗粒累积质量百分比为

$$P(\leq r) = \frac{M(\leq r)}{M_T} \propto r^{3-D} \quad . \quad (6)$$

式中: $P(\leq r)$ 为颗粒粒径小于 r 的颗粒质量累积百分数; $M(\leq r)$ 为颗粒粒径小于 r 的颗粒累积质量; M_T 为颗粒总质量。颗粒分布的分维计算公式为^[32-33]

$$D = 3 - \lambda \quad . \quad (7)$$

海安粉土的颗粒分布规律如图 3 所示。粉土颗粒分布与式(6)一致, 颗粒分布符合分形模型。根据式(7)计算粉土颗粒分布的分维, 粉土颗粒分布的分维分别为 2.70, 2.68, 2.68, 2.69。

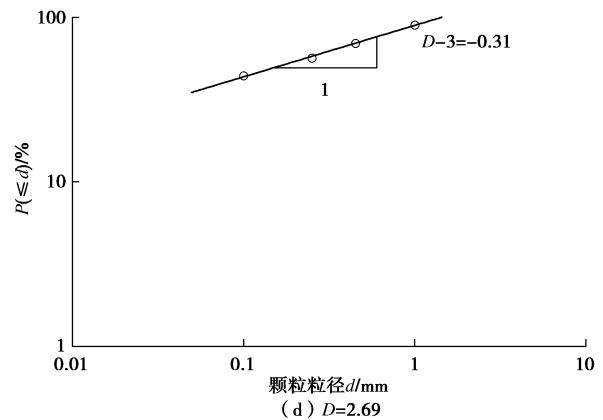
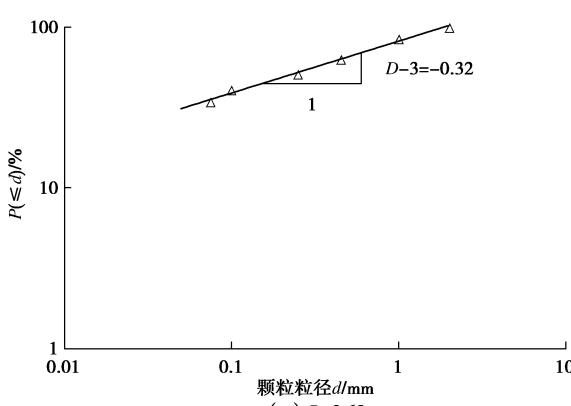
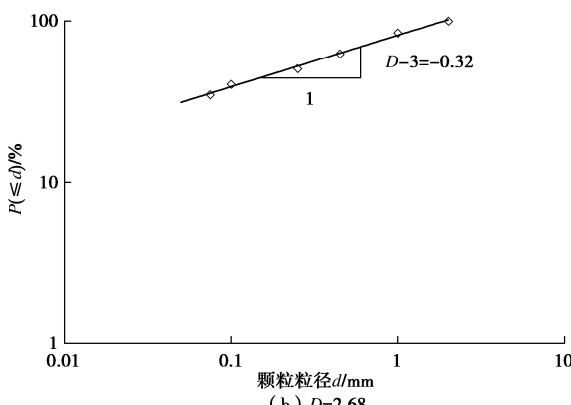
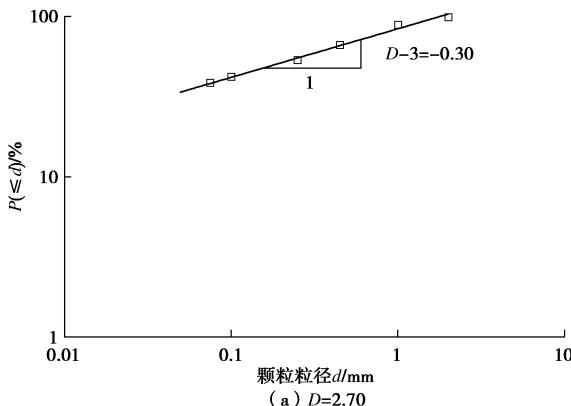


图 3 海安粉土颗粒分布的分维

Fig. 3 Fractal dimension of the particle-size distribution of Haian silt

根据击实粉土的压汞试验结果, 测量粉土的孔隙分布分维, 粉土颗粒分布和孔隙分布比较于图 4 中。粉土孔隙分布与颗粒分布一样, 满足分形模型, 且孔隙分布分维与颗粒分布相等。均匀击实土样结构的这个有趣现象, 得到理论证实。

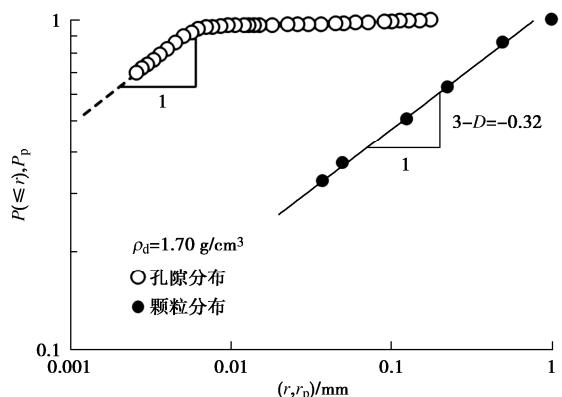


图 4 粉土孔隙分布与颗粒分布的相关关系

Fig. 4 Relationship of fractal dimension between pore-size distribution and particle-size distribution

Watabe 等^[34]给出均匀土样孔隙半径与颗粒半径的相互关系为

$$r = f r_g \quad . \quad (8)$$

式中: f 为形状系数, 一般小于 1.0。假设随机分布的土颗粒, 颗粒半径小于 r 的颗粒累积百分数为 P , 那么 $m-1$ 个颗粒半径大于 r 的质量累积百分数为 $(1-P)^{m-1}$ 。孔隙半径小于 r_p 的体积百分数为

$$dP_p = N(1-P)^{m-1} dP \quad . \quad (9)$$

式中: P_p 为孔隙体积百分数, $P_p = V(\leq r_p)/V_T$, $V(\leq r_p)$ 为孔隙半径小于 r_p 的体积, V_T 为所有孔隙的体积。如果土颗粒分布满足分形模型, 颗粒累积百分数表示为式(6)的形式, 且 $\lambda = 3-D$ 。由式(6), (8), (9) 得到孔隙体积百分数:

$$P_p = 1 - \left[1 - \left(\frac{r_p}{f \cdot r_{\max}} \right)^{3-D} \right]^m \quad (10)$$

在 $r_p/(f \cdot r_{\max}) \ll 1$ 条件下, 式 (10) 表示为

$$P_p = m \left(\frac{r_p}{f \cdot r_{\max}} \right)^{3-D} \quad (11)$$

根据式 (11) 得到孔隙分布的分维为 D , 与颗粒分布的分维相等, 图 4 中颗粒分布与孔隙分布的关系得到了理论证明。粉土毛细水上升高度和速度与孔隙分布特性密切相关, 孔隙分布的分维测量比较复杂, 需要采用压汞试验测量, 为了简单起见, 采用颗粒分布的分维代替孔隙分布的分维, 颗粒分布的分维根据筛分试验就能简单地计算, 用于分析土颗粒级配对毛细水上升高度的影响。

2 毛细水上升高度

非饱和土中毛细水上升符合 Darcy 定律, 毛细水上升与水力梯度关系表示为^[35]

$$i = \frac{h_c - z}{z} \quad (12)$$

式中: h_c 为毛细水上升的最大高度; z 为湿润锋上升高度。根据 Darcy 定律, 非饱和土的渗流与渗透系数和水力梯度相关, 取微段土柱 dz , 单位时间内毛细水上升量为

$$q = ki = n \frac{dz}{dt} \quad (13)$$

式中: k 为非饱和土的渗透系数; n 为孔隙率; t 为时间。如果非饱和土的渗透系数是常数, 对式 (13) 积分, 得到毛细水上升高度与时间的隐式函数^[35]:

$$t = \frac{nh_c}{k} \left[\ln \left(\frac{h_c}{h_c - z} \right) - \frac{z}{h_c} \right] \quad (14)$$

非饱和土的渗透系数不是常数, 且与孔隙分布分维密切相关, Xu 等^[36-37]基于孔隙分布的分形模型, 导出非饱和土渗透系数表达式:

$$k = k_s \left(\frac{z}{h_a} \right)^{3D-11} \quad (15)$$

式中: h_a 为与进气值对应的毛细水高度。吸力会随着土含水率降低而增加, 含水率低到一定程度时气泡开

始进入土的孔隙中时, 此时对应的吸力即为进气值, k_s 是饱和渗透系数。将式 (12), (15) 代入式 (13) 得到

$$\frac{dz}{dt} = \frac{k_s}{n} \left(\frac{z}{h_a} \right)^{3D-11} \frac{h_c - z}{z} \quad (16)$$

$$\int \frac{z^{12-3D}}{h_c - z} dz = \int \frac{k_s}{nh_a^{3D-11}} dt \quad (17)$$

边界条件为当 $t=0$ 时, $z=0$, 对式 (17) 积分得到

$$\frac{z^{12-3D} \left[-1 + \text{HP2F1} \left(1, 12-3D, 13-3D, \frac{z}{h_c} \right) \right]}{3D-12} = \frac{k_s}{nh_a^{3D-11}} t \quad (18)$$

式中: HP2F1() 为超几何级数, 可用幂级数定义。因此, 毛细水上升高度表示为

$$t = \frac{nh_a^{D-3}}{k_s} \frac{z^{12-3D} \left[-1 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1)_j (12-3D)_j (z/h_c)^j}{(13-3D)_j j!} \right]}{3D-12} \quad (19)$$

$$\text{式中: } (x)_j = \begin{cases} 1 & (x=0) \\ x(x+1)L(x+j-1) & (x>0) \end{cases}$$

由式 (19) 得到毛细水上升高度 z 与分维 (D)、进气值 (h_a)、孔隙率 (n)、毛细水高度 (h_c) 和饱和渗透系数 (k_s) 有关。颗粒级配一般符合分形模型, 用颗粒分布的分维表示; 颗粒最大粒径与最大孔隙半径有关, 用非饱和土的进气值表示; 密实度用孔隙率表示, 含水率直接影响毛细水的最大上升高度, 用毛细水的最大上升高度表示含水率的影响。为了探讨颗粒分布分维、进气值、孔隙率、毛细水最大上升高度和饱和土渗透系数对毛细水上升高度和速度的影响, 取 $D=2.7$, $h_a=40 \text{ cm}$, $n=0.5$, $h_c=100 \text{ cm}$, $k_s=3.0 \times 10^{-7} \text{ m/s}$ 作为基本参数, 根据式 (19) 对毛细水上升高度和速度进行参数分析, 计算参数列于表 1 中。

土颗粒级配的影响用颗粒分布分维表示, 如图 5 所示, 颗粒分布分维对毛细水上升高度和速度的影响明显。随着颗粒分布分维增加, 细颗粒越多, 在相同时间内毛细水上升高度增加; 在双对数坐标中, 随着颗粒分布分维增加, 斜率显著增加, 也就是说, 随着颗粒分布分维增加, 毛细水上升速度显著增加。颗粒

表 1 计算参数

Table 1 Calculation parameters

序号	D	h_a/m	n	$k_s/(10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$	h_c/m
1	2.1, 2.3, 2.5, 2.7, 2.9	0.4	0.5	3	1.0
2	2.7	0.2, 0.4, 0.6	0.5	3	1.0
3	2.7	0.4	0.3, 0.5, 0.7	3	1.0
4	2.7	0.4	0.5	0.3, 3, 30	1.0
5	2.7	0.4	0.5	3	0.5, 1.0, 2.0

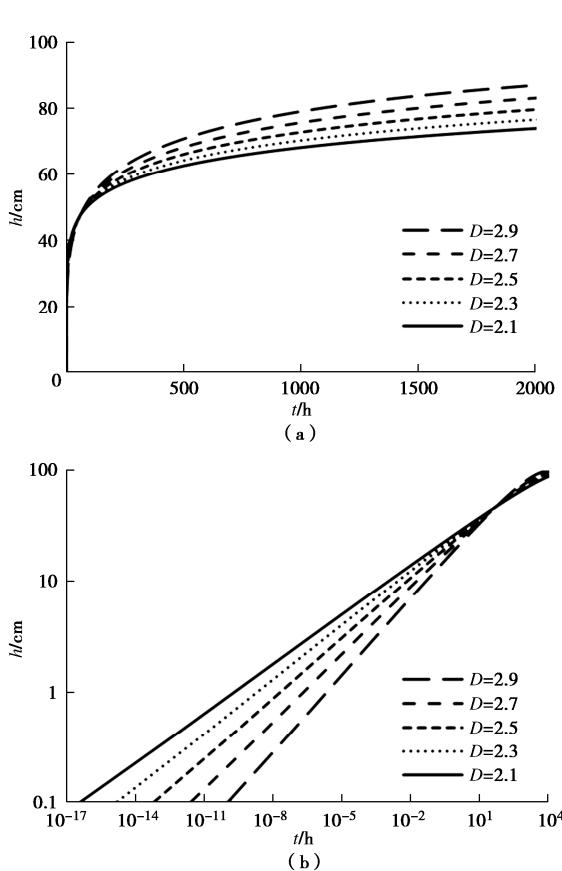


图 5 颗粒分布分维对毛细水上升高度和速度的影响

Fig. 5 Influence of fractal dimension of particle-size distribution on the rise height and velocity of capillary water

分布分维越大，颗粒排列越紧密，对应孔径越小，非饱和土的吸力越大，在毛细水上升最大高度不变的假设基础上，毛细水上升速度越大。因此，图 5 中的计算结果与毛细水上升机理一致。

非饱和土的最大粒径与最大孔隙半径有关，最大孔隙半径用非饱和土的进气值表示，图 6 表示了非饱和土的进气值对毛细水高度和速度的影响。随着非饱和土的进气值增大，毛细水上升高度增大。非饱和土的进气值指空气开始进入饱和土孔隙中所对应的基质吸力值，进气值越大，孔隙最大半径越小，毛细水上升高度越高；在双对数坐标中，随着非饱和土进气值增加，斜率没有变化，也就是说，毛细水上升速度不受非饱和土进气值的影响。

土的密实程度用孔隙率表示，孔隙率对毛细水高度和速度的影响如图 7 所示。粉土的相对质量密度 $G_s=2.70$ ，孔隙率 $n=0.3, 0.5, 0.7$ 对应的干密度分别为 $\rho_d=1.62, 1.35, 1.08 \text{ g/cm}^3$ 。随着孔隙率增大，孔隙半径增大，毛细水上升高度减小。在双对数坐标中，随着孔隙率增大，斜率不变，表明毛细水上升速度不受孔隙率变化的影响。

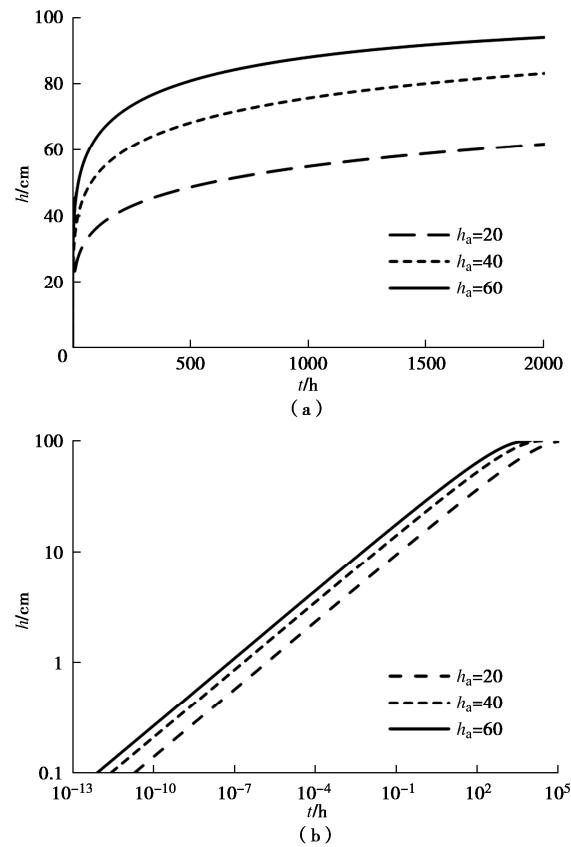


图 6 进气值对毛细水上升高度和速度的影响

Fig. 6 Influence of air-entry value on the rise height and velocity of capillary water

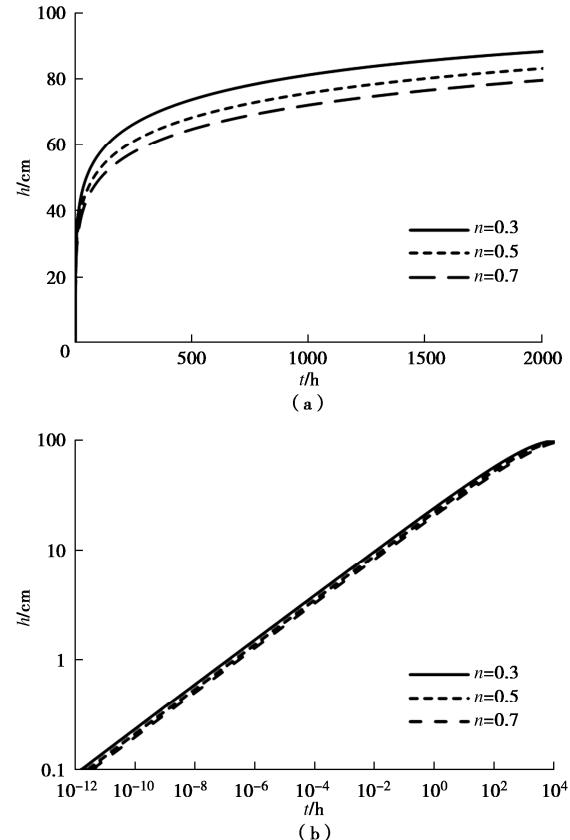


图 7 孔隙率对毛细水上升高度和速度的影响

Fig. 7 Influence of porosity on the rise height and velocity of capillary water

毛细水的最大上升高度直接取决于含水率的大小,毛细水的含水率越小,毛细水上升的最大高度越大。毛细水的最大上升高度对毛细水高度和速度的影响如图 8 所示,随着毛细水最大上升高度增加,毛细水上升高度按照最大高度同比例上升,表现在双对数坐标上,斜率相同,即毛细水上升速度相同,毛细水上升速度不受最大上升高度和含水率影响。

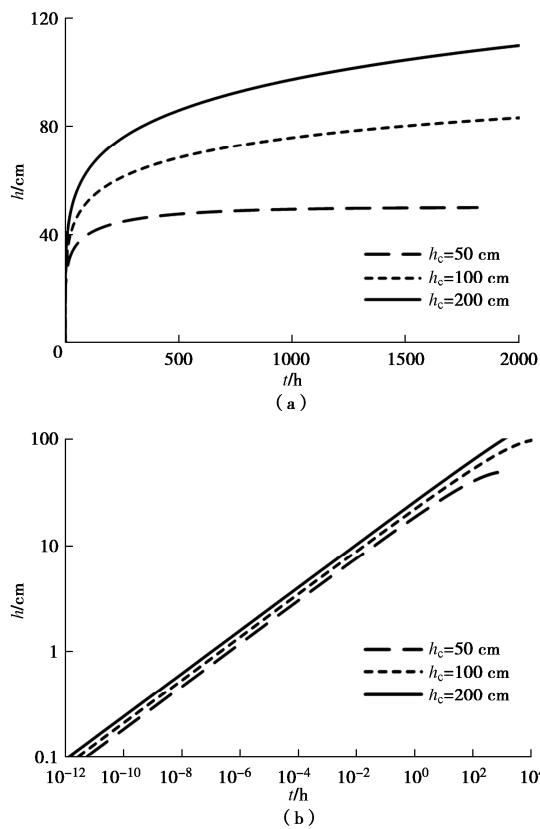


图 8 毛细水最大上升高度对毛细水上升高度和速度的影响

Fig. 8 Influence of maximum rise height on the rise height and velocity of capillary water

饱和渗透系数 k_s 对毛细水上升高度和速度的影响如图 9 所示。随着饱和渗透系数增大,毛细水上升高度增大。饱和渗透系数反映土的透水能力大小,其他条件不变的情况下,饱和渗透系数越大,单位时间内水分迁移量越大,毛细水上升高度越高。在双对数坐标中,随着饱和渗透系数增大,斜率不变,表明毛细水上升速度不受饱和渗透系数影响。

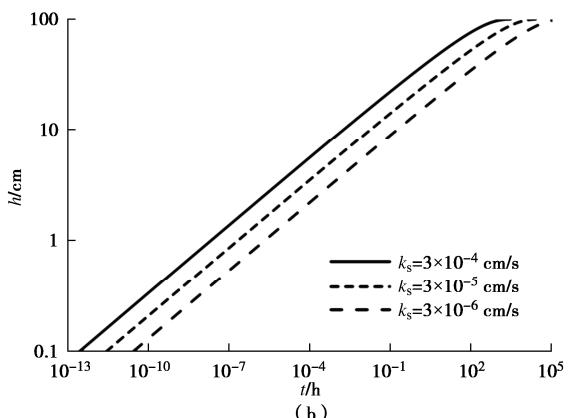
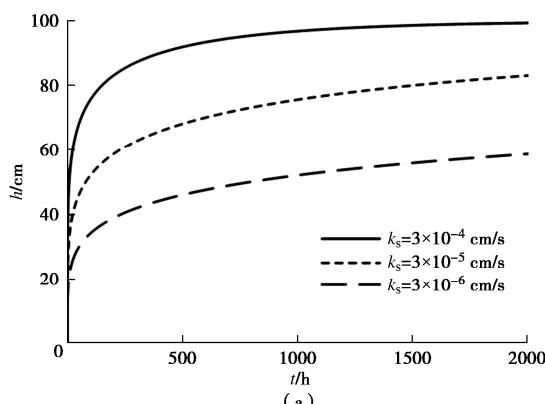


图 9 饱和渗透系数对毛细水上升高度和速度的影响

Fig. 9 Influence of saturated permeability on the rise height and velocity of capillary water

3 结 论

毛细水上升现象是低路堤公路常见的,也是毛细水病害的主要诱因,毛细水上升高度的测量一直都不不是很精确的,想要准确测出毛细水上升速度就更加困难。影响毛细水上升高度和速度的因素主要有颗粒级配、颗粒最大粒径、密实度、含水率和渗透性,分别采用颗粒分布的分维、非饱和土的进气值、孔隙率、毛细水最大上升高度和饱和土渗透系数表示。本文基于颗粒分布的分形模型假设,系统研究了颗粒分布分维、非饱和土的进气值、孔隙率、毛细水最大上升高度和饱和土渗透系数对毛细水上升高度和速度的影响,主要得到以下 3 点主要结论。

(1) 粉土颗粒分布满足分形模型,颗粒分布的分维大约为 2.70;与颗粒分布一样,粉土孔隙分布液满足分形模型,且同一土样的颗粒分布的分维与孔隙分布的分维相同。

(2) 在达到毛细水的最大上升高度之前,毛细水上升高度随颗粒分布的分维增加而增加,随进气值增加而增加,随孔隙率增加而减小,随最大上升高度增加而增加,随饱和渗透系数增加而增加。

(3) 毛细水的上升高度与时间呈幂函数正相关关系,在 $\lg h-\lg t$ 坐标上,呈直线正相关,直线斜率反映了毛细水上升速度。毛细水的上升速度只随颗粒分布的分维变化,随着颗粒分布的分维增加,毛细水上升速度增加。毛细水上升速度不受进气值、孔隙率、最大上升高度和饱和渗透系数的影响。

参 考 文 献:

- [1] 张睿,徐永福,于波.交通荷载下低路堤高速公路基沉降计算[J].地下空间与工程学报,2016,12(4): 952-957.
(ZHANG Rui, XU Yongfu, YU Bo. Cumulative settlement of

- highway subgrade with low embankment induced by traffic load[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2016, **12**(4): 952-957. (in Chinese))
- [2] 张睿, 徐永福, 于波, 等. 低路堤高速公路路基路面处理措施分析[J]. 地下空间与工程学报, 2013, **9**(增刊1): 1675-1680. (ZHANG Rui, XU Yongfu, YU Bo, et al. Analysis of measures to reduce the traffic-load-settlement of low embankment highway[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2013, **9**(S1): 1675-1680. (in Chinese))
- [3] 江国勤, 管同心, 徐永福. 天然软土地基上路堤临界高度分析[J]. 路基工程, 2011(2): 47-49. (JIANG Guoqin, GUAN Tongxin, XU Yongfu. Analysis on critical height of embankment on natural soft foundation[J]. Subgrade Engineering, 2011(2): 47-49. (in Chinese))
- [4] 宋国森, 徐永福, 林飞, 等. 滨海盐渍土用于路基填料的关键技术研究[J]. 公路, 2013, **58**(12): 56-60. (SONG Guosen, XU Yongfu, LIN Fei, et al. Study on key technology of coastal saline soil used as subgrade filler[J]. Highway, 2013, **58**(12): 56-60. (in Chinese))
- [5] 赵海, 周进华, 徐永福, 等. 低液限粉土路基填筑施工现场试验分析[J]. 中外公路, 2013, **33**(2): 34-38. (ZHAO Hai, ZHOU Jinhua, XU Yongfu, et al. Field test analysis of low liquid limit silt subgrade filling construction[J]. Journal of China & Foreign Highway, 2013, **33**(2): 34-38. (in Chinese))
- [6] 陶涛, 陈志明, 徐永福, 等. 吹填海砂路基包边土厚度确定方法研究[J]. 中外公路, 2016, **36**(1): 32-36. (TAO Tao, CHEN Zhiming, XU Yongfu, et al. Study on the method of determining the thickness of wrapping soil for subgrade with blown sea sand[J]. Journal of China & Foreign Highway, 2016, **36**(1): 32-36. (in Chinese))
- [7] 胡明鉴, 张晨阳, 崔翔, 等. 钙质砂中毛细水高度与影响因素试验研究[J]. 岩土力学, 2019, **40**(11): 4157-4164. (HU Mingjian, ZHANG Chenyang, CUI Xiang, et al. Experimental study on capillary rise and influencing factors in calcareous sand[J]. Rock and Soil Mechanics, 2019, **40**(11): 4157-4164. (in Chinese))
- [8] 邓改革, 何建国, 康宁波. 基于多物理场耦合的毛细水高度研究[J]. 水土保持研究, 2021, **28**(4): 136-141. (DENG Gaige, HE Jianguo, KANG Ningbo. Research on capillary water height based on multi-physical field coupling[J]. Research of Soil and Water Conservation, 2021, **28**(4): 136-141. (in Chinese))
- [9] WASHBURN EW. The dynamics of capillary flow[J]. Physics Review, 1921, **17**(3): 273-283.
- [10] RICHARDS LA. Capillary conduction of liquids through porous mediums[J]. Physics, 1931, **1**(5): 318-333.
- [11] AGHAJANI H F, SOROUSH A, SHOURIJEH P T. An improved solution to capillary rise of water in soils[J]. International Journal of Civil Engineering, 2011, **9**(4): 275-281.
- [12] 张平, 吴昊, 殷洪建, 等. 颗粒级配对毛细水上升影响的研究[J]. 节水灌溉, 2010(7): 24-26. (ZHANG Ping, WU Hao, YIN Hongjian, et al. Effect of particle size distribution on capillary water upward movement[J]. Water Saving Irrigation, 2010(7): 24-26. (in Chinese))
- [13] 夏宁, 黄琴龙. 长江口细砂毛细水上升高度试验研究[J]. 粉煤灰综合利用, 2009, **22**(6): 3-5. (XIA Ning, HUANG Qinlong. The experimental research of the capillarity water rising height of Changjiang delta fine sand[J]. Fly Ash Comprehensive Utilization, 2009, **22**(6): 3-5. (in Chinese))
- [14] 栗现文, 周金龙, 赵玉杰, 等. 高矿化度对砂性土毛细水上升影响[J]. 农业工程学报, 2011, **27**(8): 84-89. (LI Xianwen, ZHOU Jinlong, ZHAO Yujie, et al. Effects of high-TDS on capillary rise of phreatic water in sand soil[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 2011, **27**(8): 84-89. (in Chinese))
- [15] 苗强强, 陈正汉, 田卿燕, 等. 非饱和含黏土砂毛细上升试验研究[J]. 岩土力学, 2011, **32**: 327-333. (MIAO Qiangqiang, CHEN Zhenghan, TIAN Qinyan, et al. Experimental study of capillary rise in unsaturated clayey sand[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, **32**: 327-333. (in Chinese))
- [16] 赵明华, 刘小平, 陈安. 非饱和土路基毛细作用分析[J]. 公路交通科技, 2008, **25**(8): 26-30. (ZHAO Minghua, LIU Xiaoping, CHEN An. Analysis of capillary action in unsaturated soil roadbeds[J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2008, **25**(8): 26-30. (in Chinese))
- [17] 王生平, 李涛. 非饱和土路基的毛细作用及其影响因素分析[J]. 公路, 2012, **57**(6): 124-128. (WANG Shengping, LI Tao. Analysis of capillary action and its influencing factors of unsaturated soil subgrade[J]. Highway, 2012, **57**(6): 124-128. (in Chinese))
- [18] 米海存, 何红曼, 段吉波. 风干砂毛细上升实验研究[J]. 节水灌溉, 2014(6): 26-28, 31. (MI Haicun, HE Hongman, DUAN Jibo. Experimental study on aeolian sand capillary rise[J]. Water Saving Irrigation, 2014(6): 26-28, 31. (in Chinese))

- [19] 袁玉卿, 李伟, 赵丽敏. 豫东黄泛区粉砂土毛细水上升研究[J]. 公路交通科技, 2016, 33(2): 33-38. (YUAN Yuqin, LI Wei, ZHAO Limin. Study on capillary water rise in chalky sandy soils in the yellow floodplain of east Henan province[J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2016, 33(2): 33-38. (in Chinese))
- [20] 杜红普, 刘波, 王华军, 等. 基于土水特征曲线预测多孔介质毛细上升过程[J]. 工程地质学报, 2013, 21(3): 345-350. (DU Hongpu, LIU Bo, WANG Huajun, et al. Prediction of capillary rise in porous media based on soil water characteristic curve[J]. Journal of Engineering Geology, 2013, 21(3): 345-350. (in Chinese))
- [21] 肖红宇, 刘明寿, 彭鹏程, 等. 基于黏性土分形特征的毛细水上升高度研究[J]. 水文地质工程地质, 2016, 43(6): 48-52, 58. (XIAO Hongyu, LIU Mingshou, PENG Pengcheng, et al. A study of the height of capillary water rise based on fractal characteristics of cohesive soil[J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2016, 43(6): 48-52, 58. (in Chinese))
- [22] LAGO M, ARAUJO M. Capillary rise in porous media[J]. J Colloid Interface Sci, 2001, 234(1): 35-43.
- [23] XU Y F. Fractal approach to unsaturated shear strength[J]. Journal of Geotechnical & Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2004, 3: 264-274.
- [24] 徐永福. 颗粒破碎对粗颗粒填料剪切强度的影响[J]. 固体力学学报, 2018, 39(5): 513-521. (XU Yongfu. Effect of particle breakage on shear strength of coarse granular materials[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2018, 39(5): 513-521. (in Chinese))
- [25] 徐永福. 考虑颗粒破碎影响的粗粒土的剪切强度理论[J]. 岩土工程学报, 2018, 40(7): 1171-1179. (XU Yongfu. Theory of shear strength of granular materials based on particle breakage[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2018, 40(7): 1171-1179. (in Chinese))
- [26] 徐永福. 固体颗粒破碎的分维演化规律[J]. 工程地质学报, 2017, 25(5): 1287-1292. (XU Yongfu. Evolution of fractal dimension of particle breakage[J]. Journal of Engineering Geology, 2017, 25(5): 1287-1292. (in Chinese))
- [27] OCHIAI M, OZAO R, YAMAZAKI Y. Self-similarity law of particle size distribution and energy law in size reduction of solids[J]. Physica A, 1992, 191: 295-300.
- [28] KAPUR P C. Kinetics of granulation by non-random coalescence mechanism[J]. Chemical Engineering Science, 1972, 27(10): 1863-1869.
- [29] AUSTIN L G, ROGERS R S C. Powder technology in industrial size reduction[J]. Powder Technology, 1985, 42(1): 91-109.
- [30] FRANCES C, LINÉ A. Comminution process modelling based on the monovariate and bivariate direct quadrature method of moments[J]. AIChE Journal, 2014, 60(5): 1621-1640.
- [31] MANDELBROT B B. The Fractal Geometry of Nature[M]. San Francisco: W H Freeman, 1982.
- [32] 徐永福, 孙婉莹, 吴正根. 我国膨胀土的分形结构的研究[J]. 河海大学学报, 1997, 25(1): 18-25. (XU Yongfu, SUN Wanying, WU Zhenggen. A study of the fractal structure of our expansive soils[J]. Journal of Hohai University, 1997, 25(1): 18-25. (in Chinese))
- [33] 刘松玉, 方磊, 陈浩东. 论我国特殊土粒度分布的分形结构[J]. 岩土工程学报, 1993, 15(1): 23-30. (LIU Songyu, FANG Lei, CHEN Haodong. On the fractal structure of particle size distribution of special soils in China[J]. Journal of Hohai University, 1993, 15(1): 23-30. (in Chinese))
- [34] WATABE Y, LEROUAIL S, LE BIHAN J-P. Influence of compaction conditions on pore-size distribution and saturated hydraulic conductivity of a glacial till[J]. Can Geotech J, 2000, 37: 1184-1194.
- [35] TERZAGHI K. Theoretical Soil Mechanics[M]. New York: Wiley, 1843.
- [36] XU Y F, DONG P. Fractal approach to hydraulic properties in unsaturated porous media[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2004, 19(2): 327-337.
- [37] XU Y F. Calculation of unsaturated hydraulic conductivity using a fractal model for the pore-size distribution[J]. Computers and Geotechnics, 2004, 31(7): 549-557.