

DOI: 10.11779/CJGE20230420

# 圆化离散单元法的改进及其在岩体断裂过程中的应用

张德沧, 毛佳\*, 戴妙林, 邵琳玉, 赵兰浩

(河海大学水利水电学院, 江苏 南京 210024)

**摘要:** 为精确模拟岩体断裂的演化过程, 将有限单元法与圆化多面体离散元法相结合, 提出一种用于模拟断裂全过程的三维可变形圆化多面体离散单元法。为模拟块体的真实破坏状态, 该方法将每个岩体颗粒都离散成有限单元, 沿有限单元的边界嵌入无厚度节理单元, 最后采用判断节理单元状态的方式来捕捉断裂过程产生的裂缝, 岩体颗粒与断裂表面之间的接触相互作用通过圆化多面体离散元法求解。通过 5 个算例说明新方法的准确性和有效性, 可用于模拟准脆性材料的断裂全过程, 且能够捕捉裂缝萌生和扩展以及块体之间的碰撞和变形。

**关键词:** 圆化多面体离散元法; 有限单元法; 断裂; 节理单元; 准脆性材料

中图分类号: TU45

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2024)09-1974-10

作者简介: 张德沧(1999—), 男, 硕士研究生, 主要从事离散元方面的研究工作。E-mail: zdc@hhu.edu.cn。

## Improvement of spheropolyhedral-based discrete element method and its application in fracture process of rock mass

ZHANG Decang, MAO Jia, DAI Miaolin, SHAO Linyu, ZHAO Lanhao

(College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing 210024, China)

**Abstract:** In order to accurately simulate the evolution process of fractures, a three-dimensional deformable spheropolyhedral-based discrete element method is proposed by combining the finite element method with the spheropolyhedral-based discrete element method to simulate the complete fracture process. This method simulates the failure state of rock masses in real life, discretizing each rock particle into a finite element and embedding the zero thickness joint element along the boundary of the finite element. Finally by judging the state of the joint element, the cracks generated during the fracture process are captured, and the contact interaction between rock particles and fracture surfaces is resolved by the spheropolyhedral-based discrete element method. The accuracy and effectiveness of the new method are demonstrated through five numerical examples. The numerical results show that the proposed method is feasible in simulating the complete fracture process of quasi-brittle materials, and can capture crack initiation and propagation, as well as collision and deformation between fragments.

**Key words:** spheropolyhedral-based discrete element method; finite element method; fracture; joint element; quasi-brittle material

## 0 引言

自然界中的岩体常年受复杂水文地质条件等环境因素影响, 因此岩体内部结构通常存在着裂缝等不连续结构面, 表现出较强的非连续性。岩体裂缝的力学效应作为岩体力学的中心内容, 且岩体裂缝扩展和贯通的原理是预防和控制重大工程地质灾害的基础, 所以研究岩体裂缝的力学效应具有十分重要的现实意义和理论价值。然而, 基于连续介质的方法只能够模拟裂缝形成之前的断裂过程, 无法模拟裂缝形成后岩石块体间的碰撞、运动过程<sup>[1]</sup>。相反, 基于不连续介质的数值方法, 例如非连续变形分析方法 (discontinuous

deformation analysis, 简称 DDA)<sup>[2]</sup>、数值流形方法 (numerical manifold method, 简称 NMM)<sup>[3]</sup>、离散单元法 (discrete element method, 简称 DEM)<sup>[4-5]</sup>和光滑粒子流体动力学方法 (smoothed particle hydrodynamics, 简称 SPH)<sup>[6]</sup>可以作为有效的替代方法弥补此类不足, 已广泛应用于分析岩体之间的相互作用<sup>[7]</sup>。其中, 离散单元法 (DEM) 因其理论的成熟性, 已广

基金项目: 国家重点研发计划项目 (2022YFC3005402); 国家自然科学基金项目 (52009034); 河海大学水安全与水科学协同创新中心项目  
收稿日期: 2023-05-15

\*通信作者 (E-mail: maojia@hhu.edu.cn)

泛应用于研究离散颗粒的力学行为<sup>[8-9]</sup>。

球体单元因其简单有效的接触模式常被用于离散单元法的数值模拟。但是, 它不能准确模拟不规则形状的块体。多面体单元因其形状和岩体具有相似性, 在离散元中常被用于模拟不规则块体。但是, 对于不同的接触模式, 多面体单元缺少一个简单统一的数学模型。在计算块体单元之间的接触力之前, 需要确定块体之间的接触模式, 例如点-面接触、点-边接触、点-点接触、面-面接触、边-边接触和边-面接触<sup>[10]</sup>。此外, 由于顶点处法向接触力的不确定性, 它不能解决点-点接触模式的问题。这也导致了法向接触力不一致, 进而带来能量失衡和数值不正确的问题。

Munjiza 等<sup>[11]</sup>提出了有限-离散单元耦合分析方法 (combined finite-discrete element method, 简称 FDEM), 与传统离散单元法相比, 能够在不考虑多变的接触模式的情况下实现接触力的计算。在该方法中, 接触力是由分布力代替中心接触力进行计算, 通过对嵌入区域的势函数进行积分, 实现接触力的计算, 既方便又统一, 并保证了能量平衡和动量守恒。大量的应用实践已经证实了 FDEM 的优越性<sup>[12-13]</sup>。但 FDEM 的计算过程是基于复杂的布尔运算, 这会大幅度提高计算成本。此外, 它对单元类型有严格的限制, 复杂模型只能离散成四面体单元而不能离散成其他多面体单元, 这会导致单元数量巨增<sup>[14]</sup>, 大幅度降低计算效率。

相比于 FDEM, 圆化多面体离散单元法具有计算效率高、接触力计算形式简单等优点。圆化多面体是由多面体和球体的闵可夫斯基和生成<sup>[15]</sup>, 是一个和多面体具有同等尺寸但角点已经圆化的多面体<sup>[16]</sup>, 因此两个多面体的接触类似于两球体之间的接触, 简化接触模式的判断, 提高了计算效率。虽然圆化多面体离散单元法是可行的, 但由于该方法认为离散单元服从刚体假设, 因此它并不能模拟软颗粒或弹性颗粒的变形。此外, 该方法还缺少一个合适的模型来模拟断裂的全过程, 包括岩体的变形、断裂和接触相互作用。颗粒的变形会影响岩体的应力分布, 进而影响断裂破坏过程。准确模拟岩体的断裂全过程需要既能反映颗粒的相互作用, 又能反映颗粒自身的变形。

为解决上述问题, 提出一种可用于模拟断裂全过程的三维可变形圆化多面体离散单元法, 并建立了一个三维断裂模型用于该方法预测断裂的演化过程。该方法将岩体离散成有限单元, 并沿着有限单元的边界嵌入无厚度节理单元。采用虚拟裂缝模型<sup>[17]</sup>和 Mohr-Coulomb 准则来判断节理单元的破坏状态。圆化多面体离散单元法解决了离散岩体之间的接触力问题, 单元的应力应变问题则由有限单元法求解。与现有的圆化多面体离散单元法相比, 该方法能够反映颗粒的应力应变, 并能够模拟岩体的断裂全过程, 包括

变形、断裂和接触相互作用。与 FDEM 相比, 该方法在计算接触力时避免了复杂的布尔运算, 大幅度提高了计算效率。此外, 它还突破四面体单元的限制, 能够应用于更多类别的单元类型。

### 1 三维可变形圆化多面体离散单元法

在本文提出的方法中, 每个岩体用一个离散块体表示, 并离散成多个有限单元来捕捉弹性响应。如图 1 所示, 在有限单元的边界嵌入无厚度节理单元用来模拟岩石材料的破坏过程。一旦节理单元处的应力达到破坏条件, 就会在有限单元的表面产生新的裂缝。在此情况下, 采用圆化多面体计算颗粒和断裂面之间的接触相互作用。

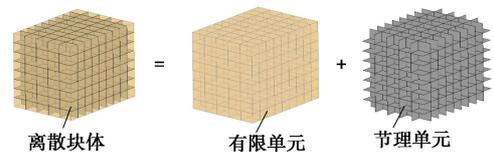


图 1 有限单元边界嵌入节理单元

Fig. 1 Boundary of finite elements inserted into joint elements

#### 1.1 连续体到非连续体之间的过渡

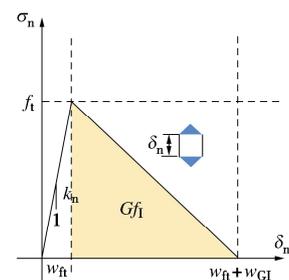
断裂破碎通常被认为是从连续体到非连续体之间的过渡过程。节理单元和有限单元的结点相互重合, 节理单元表面分离会产生应力  $\sigma$ , 它是节理单元在两边界之间相对位移  $\delta$  的函数。节理单元的位移  $\delta$  和应力  $\sigma$  定义为

$$\delta = (\delta_n, \delta_s)^T, \quad (1)$$

$$\sigma = (\sigma_n, \sigma_s) \quad (2)$$

式中:  $\sigma_n$  为法向应力分量, 与法向位移  $\delta_n$  相对应;  $\sigma_s$  为切向应力分量, 与切向位移  $\delta_s$  相对应。

根据断裂力学可知, 节理单元的破坏模式可分为 3 种: 模式 I (拉伸破坏), 模式 II (剪切破坏), 复合模式 I/II (拉剪破坏)。本文研究的断裂模型是 Hillerborg 等所提出的虚拟裂缝模型<sup>[17]</sup>, 如图 2 所示, 节理单元的应力计算是基于应力-位移曲线完成的。如图 2 (a), (b) 所示, 在应力峰值后的曲线形状有相同的变化过程, 而且峰后曲线可以用任意脆性材料的具体数据集来定义。



(a) 模式 I

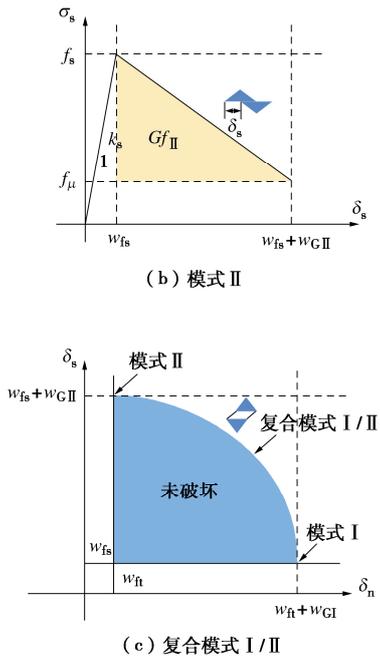


图2 节理单元的本构特性

Fig. 2 Constitutive characteristics of joint elements

拉伸荷载作用下，每个节理单元的变化状态是由抗拉强度  $f_t$  和模式 I 的断裂能  $Gf_I$  决定，断裂能的价值等于图 2 (a) 中曲线阴影部分的面积。法向应力  $\sigma_n$  与法向位移  $\delta_n$  之间的关系表示为

$$\sigma_n = \begin{cases} k_n \delta_n & (\delta_n < w_{ft}) \\ f_t \left( 1 - \frac{\delta_n - w_{ft}}{w_{GI}} \right) & (w_{ft} < \delta_n < w_{ft} + w_{GI}) \\ 0 & (\delta_n > w_{ft} + w_{GI}) \end{cases} \quad (3)$$

式中： $k_n$ 为法向接触因子的值； $w_{ft}$ 为对应于抗拉强度  $f_t$  法向位移的值； $w_{ft} + w_{GI}$ 为法向位移的最大值。

如图 2 (a) 所示，当法向应力  $\sigma_n$  未达到材料的抗拉强度  $f_t$ ，它与法向位移之间的关系是线性的。当  $\sigma_n$  的值达到抗拉强度  $f_t$  时，它随着法向位移  $\delta_n$  的增大而减小。如图 3 所示，一旦节理单元的法向位移超过最大法向位移  $w_{ft} + w_{GI}$ ，相互连接的两个有限单元就会完全分开，由此产生裂缝，块体间的相互作用由离散单元法计算。

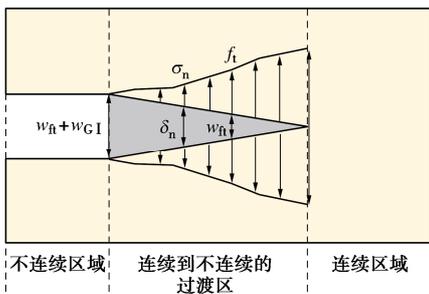


图3 岩体破裂过程的应力和位移

Fig. 3 Stress and displacements of rock mass during failure process

剪切荷载作用下，各个节理单元的状态是由剪切强度  $f_s$  和模式 II 的断裂能  $Gf_{II}$  决定，后者等于图 2 (b) 中曲线阴影部分的面积。模式 II 断裂的法向应力  $\sigma_s$  和切向位移  $\delta_s$  之间的关系为

$$\sigma_s = \begin{cases} k_s \delta_s & \delta_s < w_{fs} \\ f_s \left( 1 - \frac{\delta_s - w_{fs}}{w_{GII}} \right) & w_{fs} < \delta_s < w_{fs} + w_{GII} \\ -\sigma_n \tan \varphi & \delta_s > w_{fs} + w_{GII} \end{cases} \quad (4)$$

式中： $k_s$ 为剪切接触因子的值； $w_{fs}$ 为对应于剪切强度  $f_s$  的切向位移；剪切强度  $f_s$  为由发生拉伸截断破坏的 Mohr-Coulomb 准则来定义的：

$$f_s = \begin{cases} -\sigma_n \tan \varphi + c & (\sigma_n < f_t) \\ -f_t \tan \varphi + c & (\sigma_n \geq f_t) \end{cases} \quad (5)$$

式中： $c$ 为内部凝聚力； $\varphi$ 为材料的摩擦角。

当剪切应力  $\sigma_s$  达到剪切强度  $f_s$  时，裂缝就会产生。随着切向位移  $\delta_s$  的增加，切向应力  $\sigma_s$  就会逐渐减小，直到切向位移超过最大剪切位移  $w_{fs} + w_{GII}$ 。如图 2 (b) 所示，切向应力  $\sigma_s$  逐渐减小到与纯摩擦阻力相对应的残余值  $f_\mu = -\sigma_n \tan \varphi$ 。

岩体的破坏是复合型破坏模式而不是单一的破坏模式。当发生复合型破坏时，法向位移或者切向位移可能还没达到单个模式断裂的破坏值，但断裂已经发生。图 2 (c) 为复合模式 (I/II) 的断裂模型，两个有限单元之间的最大分裂距离可以分解为水平轴和垂直轴上的法向位移和切向位移。法向位移和切向位移之间的关系若符合以下条件，复合模式的节理单元就会发生断裂：

$$\left( \frac{\delta_n - w_{ft}}{w_{GI}} \right)^2 + \left( \frac{\delta_s - w_{fs}}{w_{GII}} \right)^2 \geq 1 \quad (6)$$

节理单元的应力沿着它的边界是呈非线性变化的，节理单元变形所产生的结点力  $f_{joint}$  需进行数值积分：

$$f_{joint} = \int N^T \sigma d\Omega \quad (7)$$

式中： $N$ 为对应节理单元的形函数。

### 1.2 接触力计算

圆化多面体是由多面体和球体的闵可夫斯基和构成。圆化多面体生成过程如图 4 所示，多面体  $P$  先收缩成多面体骨架  $H$ ，然后经球体  $S$  膨胀得到圆化多面体  $SP$ ，由于收缩和膨胀过程都是基于相同的球半径开展，故圆化多面体与原始多面体具有相同尺寸，只是角点已被圆化<sup>[16]</sup>。

圆化多面体  $SP_1$  有一组顶点  $\{V_1^i\}$ ，边  $\{E_1^i\}$ ，面  $\{F_1^i\}$ 。圆化多面体  $SP_2$  有一组  $\{V_2^i\}$ ，边  $\{E_2^i\}$ ，面  $\{F_2^i\}$ 。假定  $SP_1$  和  $SP_2$  相互接触，如图 5 所示，它们之间的接

触方式有点-点接触, 点-边接触, 点-面接触, 边-边接触。\$SP\_1\$ 和 \$SP\_2\$ 之间的法向接触力 \$\mathbf{P}\_n(SP\_1, SP\_2)\$, 它是考虑了所有接触方式的法向接触力的矢量和, 可以由以下公式表示:

$$\mathbf{P}_n(SP_1, SP_2) = \sum_{\substack{i=1, NV_1 \\ j=1, NV_2}} \mathbf{P}_n(V_1^i, V_2^j) + \sum_{\substack{i=1, NE_1 \\ j=1, NE_2}} \mathbf{P}_n(E_1^i, E_2^j) + \left( \sum_{\substack{i=1, NV_1 \\ j=1, NE_2}} \mathbf{P}_n(V_1^i, E_2^j) + \sum_{\substack{i=1, NE_1 \\ j=1, NV_2}} \mathbf{P}_n(E_1^i, V_2^j) \right) + \left( \sum_{\substack{i=1, NV_1 \\ j=1, NF_2}} \mathbf{P}_n(V_1^i, F_2^j) + \sum_{\substack{i=1, NF_1 \\ j=1, NV_2}} \mathbf{P}_n(F_1^i, E_2^j) \right) \quad (8)$$

式中: \$NV\_1, NE\_1, NF\_1\$ 分别为圆化多面体 \$SP\_1\$ 顶点、边和面的数量; \$NV\_2, NE\_2, NF\_2\$ 分别为 \$SP\_2\$ 顶点、边和面的数量。

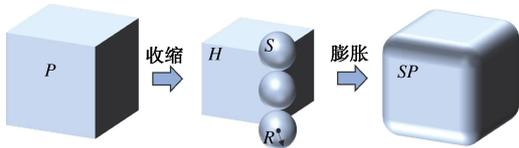


图 4 多面体 \$H\$ 和球体 \$S\$ 的闵可夫斯基和构成

Fig. 4 Polyhedral \$H\$ and sphere \$S\$ under Minkowski sum

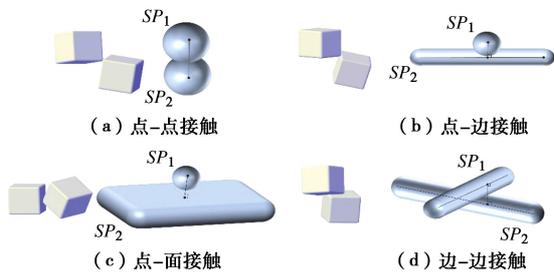


图 5 接触对的几何模型

Fig. 5 Geometrically-shaped contact pair model

此外, \$SP\_1\$ 由法向接触力引起的力矩 \$\mathbf{M}\_n\$ 表示为

$$\mathbf{M}_n = \mathbf{P}_n \times \mathbf{r}_n \quad (9)$$

式中: \$\mathbf{r}\_n\$ 为法向接触力 \$\mathbf{P}\_n\$ 的作用点位置到 \$SP\_1\$ 质心的矢量, 可以由下式计算得到

$$\mathbf{r}_n = \frac{\sum_{i=1}^m (\mathbf{r}_n^i |P_n^i|)}{\sum_{i=1}^m |P_n^i|} \quad (10)$$

式中: \$m\$ 为 \$SP\_1\$ 接触对的数量, \$P\_n^i\$ 为 \$SP\_1\$ 一个接触对得到的法向接触力。

法向接触力的作用点 \$p\_0(x\_0, y\_0, z\_0)\$ 位置是根据力矩平衡原理来确定的

$$p_0(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{r}_n + p_c(x_c, y_c, z_c) \quad (11)$$

式中: \$p\_0(x\_0, y\_0, z\_0)\$ 和 \$p\_c(x\_c, y\_c, z\_c)\$ 分别为法向接触力作用点的位置和 \$SP\_1\$ 质心的位置。

切向接触力作用点的位置与法向接触力的相同。通常情况下, 法向接触力合力的矢量方向在每个时间步长与切向接触力是相互垂直的。在 \$t + \Delta t\$ 时间内 \$SP\_1\$ 的切向接触力 \$\mathbf{P}\_s^{t+\Delta t}\$ 可以表示为

$$\mathbf{P}_s^{t+\Delta t} = \mathbf{R}_{t_0} \times \mathbf{P}_s^t + K_s \cdot \Delta \boldsymbol{\delta}_s^{t+\Delta t} \quad (12)$$

式中: \$K\_s\$ 为切向接触刚度; \$\Delta \boldsymbol{\delta}\_s^{t+\Delta t}\$ 为切向位移增量; \$\mathbf{R}\_{t\_0}\$ 为旋转矩阵; \$\mathbf{P}\_s^t\$ 为 \$t\$ 时刻的切向力。

切向力 \$\mathbf{P}\_s^{t+\Delta t}\$ 用 Mohr-Coulomb 准则校核, 表示为

$$\mathbf{P}_s^{t+\Delta t} = \min(|\mathbf{P}_s^{t+\Delta t}|, \mu |\mathbf{P}_n^{t+\Delta t}|) \cdot \mathbf{n}_s \quad (13)$$

式中: \$\mu\$ 为摩擦系数; \$\mathbf{n}\_s\$ 为 \$t + \Delta t\$ 时刻切向方向的单位向量。

由切向接触力产生的力矩 \$\mathbf{M}\_s\$ 表示为

$$\mathbf{M}_s = \mathbf{P}_s \times \mathbf{r}_s \quad (14)$$

式中: \$\mathbf{r}\_s\$ 为切向作用力 \$\mathbf{P}\_s\$ 作用点到 \$SP\_1\$ 质心的矢量。

\$SP\_1\$ 接触力的结果表示为

$$\mathbf{P}_{\text{contact}} = \mathbf{P}_n + \mathbf{P}_s \quad (15)$$

### 1.3 等效结点力

本文提出的方法中, 每个块体都离散成有限单元来模拟块体的变形情况, 为更好捕捉各离散块体之间的力学响应, 需要将接触单元间的接触力转换成有限单元的等效结点力。

如图 6 (a) 所示, 计算 \$SP\_1\$ 和 \$SP\_2\$ 两个圆化多面体接触单元之间的接触力时, 会忽略角点处的接触力。故在求解等效结点力时, 如图 6 (b) 所示, 接触单元应当恢复原始形状, 等效结点力采用虚功原理进行换算, \$SP\_1\$ 单元的等效结点力,

$$\mathbf{f}_{\text{contact}}^i = N_{SP_1}^i \mathbf{P}_{\text{contact}}, \quad i = 1, 2, \dots, n_{SP_1} \quad (16)$$

式中: \$N\_{SP\_1}^i\$ 为 \$SP\_1\$ 单元的形函数, \$n\_{SP\_1}\$ 为接触单元 \$SP\_1\$ 的结点数。

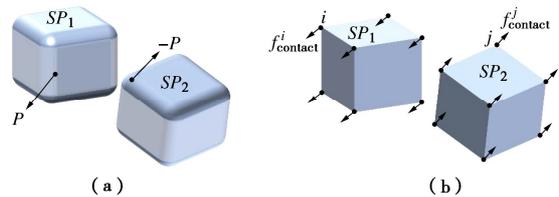


图 6 虚功法的换算方法

Fig. 6 Conversion method of virtual work principle

### 1.4 应力应变计算

几何非线性, 例如大位移和大应变, 常发生于单个块体的运动中。大应变等几何非线性问题通过非线性有限单元法求解, 本节用改进的拉格朗日公式 (U.L.) 来解释说明可变形块体的增量平衡方程<sup>[18-19]</sup>。所有单元 \$e\$ 的内部结点力 \$\mathbf{f}\_{\text{in}}^{t+\Delta t}\$ 可由下式计算:

$$\mathbf{f}_{\text{in}}^{t+\Delta t} = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\tau}^{t+\Delta t} dV \quad (17)$$

式中: \$\mathbf{B}\$ 为应变-位移变换矩阵。\$t + \Delta t\$ 时刻的柯西应

力  $\tau^{t+\Delta t}$  可以表示为

$$\tau^{t+\Delta t} = (\tau^t + \Delta \mathbf{S}) \quad (18)$$

式中:  $\tau^t$  表示在  $t$  时刻的应力。  $\Delta \mathbf{S}$  表示在  $t$  到  $t + \Delta t$  时刻应力增量, 可按下式计算:

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (19)$$

式中:  $\mathbf{D}$  为弹性矩阵,  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  表示在  $t$  到  $t + \Delta t$  时刻应变增量。

$t + \Delta t$  时刻应变  $\boldsymbol{\varepsilon}^{t+\Delta t}$  可表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{t+\Delta t} = \boldsymbol{\varepsilon}^t + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (20)$$

式中:  $\boldsymbol{\varepsilon}^t$  表示在  $t$  时刻的应变。

## 1.5 控制方程

由 1.4 节提到的内部节点力  $\mathbf{f}_{in}$  和外力  $\mathbf{f}_{ext}$  的计算方法可知, 单个颗粒的运动是由作用在它上面的不平衡力决定的<sup>[11]</sup>。单个颗粒的运动方程为

$$\mathbf{M} \mathbf{a} = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{in} - \mathbf{C} \mathbf{v} \quad (21)$$

式中:  $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{C}$  分别为质量矩阵和瑞利阻尼矩阵;  $\mathbf{v}$  和  $\mathbf{a}$  分别为速度和加速度的矢量;  $\mathbf{f}_{in}$  和  $\mathbf{f}_{ext}$  分别为内力和外荷载的矢量。

外力  $\mathbf{f}_{ext}$  的矢量包括接触力矢量  $\mathbf{f}_{contact}$ , 外荷载矢量  $\mathbf{f}_{load}$  和节理单元的结点力  $\mathbf{f}_{joint}$ :

$$\mathbf{f}_{ext} = \mathbf{f}_{joint} + \mathbf{f}_{contact} + \mathbf{f}_{load} \quad (22)$$

运动方程采用显式求解格式, 结合集中质量法进行求解, 可以避免整体刚度矩阵的计算。采用 Velocity Verlet 算法对运动方程进行积分, 能够稳定求解可变形块体的位移和速度<sup>[20]</sup>。假定在时间步  $t$  完成计算, 算法将会执行  $t + \Delta t$  时间步的计算,  $t + \Delta t$  时刻的运动方程可表示为

$$\mathbf{M} \mathbf{a}^{t+\Delta t} = \mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{in}^{t+\Delta t} - \mathbf{C} \mathbf{v}^{t+\Delta t} \quad (23)$$

本文所提方法的技术路线如图 7 所示, 下面列出了进行模拟计算的步骤:

(1) 建立几何模型。将块体分解为有限单元并在其边界嵌入节理单元。输入外荷载和约束条件。

(2) 计算节理单元的应力。采用虚拟裂缝模型和 Mohr-Coulomb 准则来判断节理单元的破坏状态。当应力达到破坏条件时, 块体发生断裂。

(3) 对分离的块体和裂缝表面进行接触检测。圆化多面体用来计算作用在它们之间的接触力。

(4) 将接触力转换成有限单元的等效结点力。在此步骤中, 单元不再是圆化多面体, 而是恢复到单元的初始形状。

(5) 采用 Velocity Verlet 算法求解运动方程。

(6) 更新所有有限单元的结点坐标。

## 2 数值试验

为验证本文提出的模拟断裂全过程的三维可变形

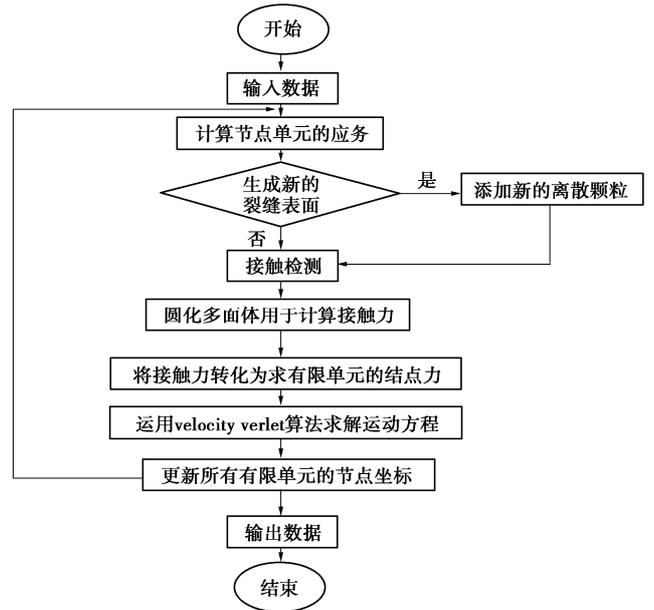


图 7 本文方法的技术方案

Fig. 7 Technical proposal of proposed method

圆化多面体离散单元法的准确性和可行性, 本节给出 5 个算例加以佐证。首先, 通过对颗粒堆积试验的模拟, 验证了该方法计算的高效性; 然后通过巴西圆盘劈裂试验验证了所提出的方法能够模拟脆性材料的断裂过程; 随后, 通过单缺口梁裂缝扩展试验的数值模拟验证了该方法能够捕捉裂缝的萌生和扩展; 最后, 通过四点弯曲梁试验和球体冲击试验验证了该方法可以模拟岩石承受冲击载荷后断裂的过程。

### 2.1 颗粒堆积试验模拟

本节通过模拟四面体颗粒在  $16.0 \text{ m} \times 13.8 \text{ m} \times 15.2 \text{ m}$  的刚性盒子里的堆积过程, 来验证本文提出方法的高效性。为便于比较, 采用 FDEM 对同一个算例进行了模拟。四面体颗粒材料属性为: 密度  $\rho$  为  $2000 \text{ kg/m}^3$ , 阻尼比  $\xi$  为  $0.0005$ 。两种方法均采用相同的计算时间, 时间步长和迭代次数, 所有结果均在一台电脑上获得。

采用上述两种方法模拟 5346 个四面体颗粒的最终堆积形式如图 8 所示, FDEM 模拟结果如图 8 (a) 所示, 本文提出方法的模拟结果图 8 (b) 所示, 两种方法模拟出来的结果相似。本文提出的方法模拟消耗的时间为  $62060 \text{ s}$ , FDEM 模拟消耗的时间为  $117813 \text{ s}$ , 节省将近一半的时间。本文提出的方法在颗粒间的接触采用非均匀颗粒快速线性接触检测算法, 该算法的复杂度为  $O(n)$ , 当颗粒增加时, 会节省大量的接触检测时间, 计算效率线性增加。因此, 该方法在计算效率方面大幅度提高。

### 2.2 巴西圆盘劈裂试验模拟

巴西圆盘劈裂试验是一个间接测量脆性材料抗拉

强度简单有效的方式。试验的三维模型是由一个圆盘与两块板组成。如图 9 所示, 在顶板和底板施加恒定的垂直速度  $v_y = 0.02 \text{ m/s}$ , 该圆盘被离散成 12335 个有限单元。该试验的材料属性为: 杨氏模量  $E = 25.8 \text{ GPa}$ , 泊松比  $\nu = 0.15$ , 抗拉强度  $f_t = 2.3 \text{ MPa}$ , I 型断裂能  $Gf_I = 10 \text{ N/m}$ , 凝聚力  $c = 20 \text{ MPa}$ , 内摩擦角  $\varphi = 45^\circ$ , II 型断裂能  $Gf_{II} = 1500 \text{ N/m}$ 。

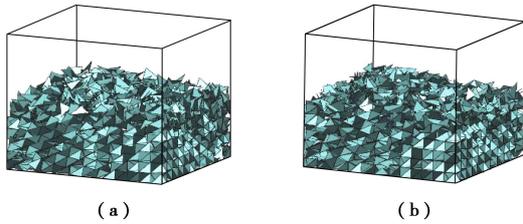


图 8 5346 个四面体颗粒最终堆积形式

Fig. 8 Final packing morphology exhibited by 5346 tetrahedral particles

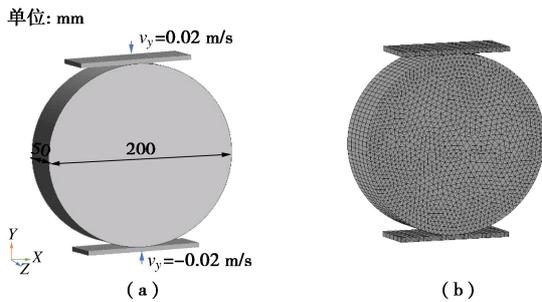


图 9 模型网格剖分图

Fig. 9 Mesh configuration of model

本文提出的方法模拟圆盘的断裂过程如图 10 所示。在断裂发生之前, 拉应力沿着圆盘的垂直直径分布, 加载板附近有小范围的压应力分布。在  $t = 1 \text{ ms}$ , 如图 10 (a) 所示, 未观察到任何裂缝。在  $t = 57 \text{ ms}$ , 如图 10 (b) 所示, 裂缝出现在圆盘的纵轴上。在  $t = 58 \text{ ms}$ , 如图 10 (c) 所示, 圆盘处于完全破坏的状态。为更清晰地了解圆盘沿直径方向上的应力分布, 进一步分析试样表面和中心的两条压缩径线 ( $AB$  和  $CD$ ) 上的拉应力  $\sigma_{xx}$  和压应力  $\sigma_{yy}$ 。直径线  $AB$  上的拉应力  $\sigma_{xx}$  和压应力  $\sigma_{yy}$  的理论值可按下式计算<sup>[21]</sup>:

$$\sigma_{xx} = \frac{2P}{\pi DL} \quad (24)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{2P}{\pi DL} \left( 1 - \frac{4D^2}{D^2 - 4y^2} \right) \quad (25)$$

圆盘试验在 33.0 kN 荷载下沿轴线上的应力分布如图 11 所示,  $\sigma_{xx}$  和  $\sigma_{yy}$  的数值计算和解析解的结果是一致的。外荷载施加在上板处和试件中心处拉应力  $\sigma_{xx}$  的结果如图 12 所示, 上板处的最大荷载为 40.6 kN, 用公式求得的抗拉强度的数值结果是 2.54 MPa,

与输入值相比减小了 1.57%, 结果差别相对较小, 说明该方法模拟脆性材料的断裂过程是可行的。

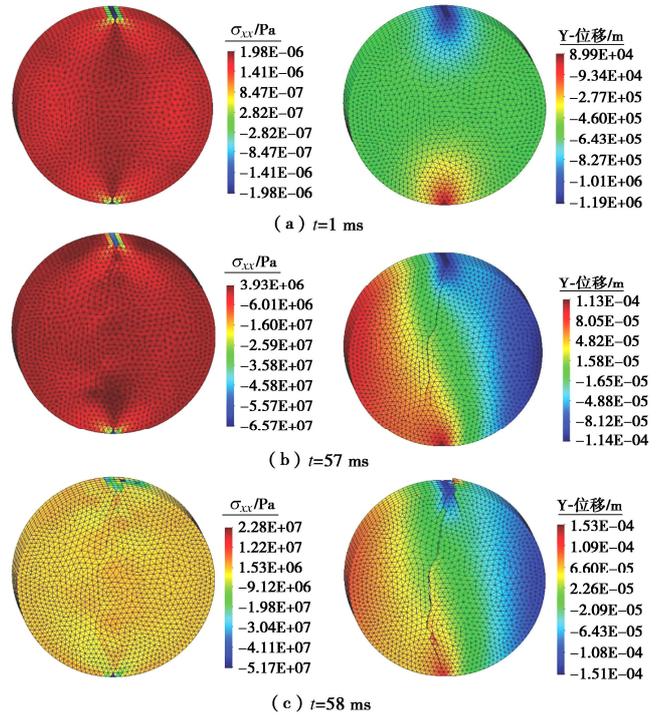


图 10 本文提出方法预测圆盘的断裂演化过程

Fig. 10 Prediction of fracture evolution process of disk by proposed method

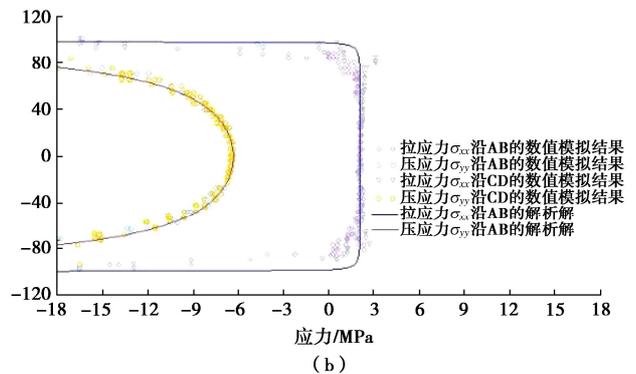
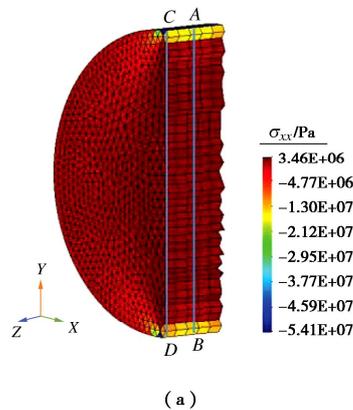


图 11 本文提出方法进行巴西圆盘数值试验

Fig. 11 Numerical tests of Brazilian disk by proposed method

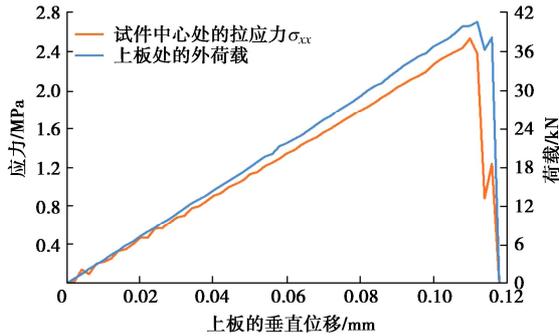


图 12 上板处的外荷载和试件中心处的拉应力

Fig. 12 External loads on upper plate and tensile stresses at center of specimen

### 2.3 单缺口梁裂缝扩展模拟

本节对单缺口梁的裂缝扩展试验进行模拟，验证本文提出的方法能够捕捉裂缝的萌生与扩展。Gálvez 等<sup>[22]</sup>进行的试验研究被认为是基准性研究，梁的几何形状、边界条件和网格结构如图 13 所示。梁的下部由两个支座点支撑，当上部施加恒定速度  $v_y=0.005$  m/s，梁会发生变形。单缺口位于梁的底边中心，裂缝将在这块区域内产生。梁的材料属性为：杨氏模量  $E=41.8$  GPa，泊松比  $\nu=0.2$ ，抗拉强度  $f_t=30.0$  MPa，凝聚力  $c=15.59$  MPa，内摩擦角  $\varphi=30^\circ$ ，I型断裂能  $Gf_I=69$  N/m，II型断裂能  $Gf_{II}=1380$  N/m。

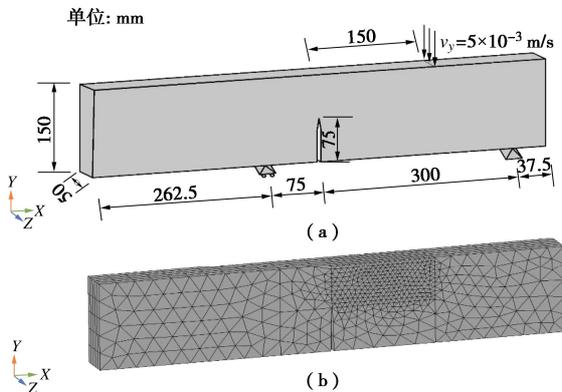


图 13 梁的网格结构

Fig. 13 Mesh configuration of beam

单缺口梁断裂之后的几何形状如图 14 所示。如图 15 所示，数值模拟得到的裂缝轨迹与试验结果是一致的。如图 16 所示，荷载-裂缝口张开位移曲线表示该方法的结果与试验记录的结果相似。因此，该方法可以有效模拟拉剪混合应力作用下的裂缝扩展。

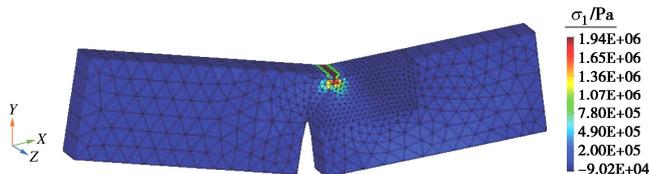


图 14 单缺口梁的变形结构 (放大 100 倍)

Fig. 14 Deformation structure of single notched beam (Amplified 100 times)

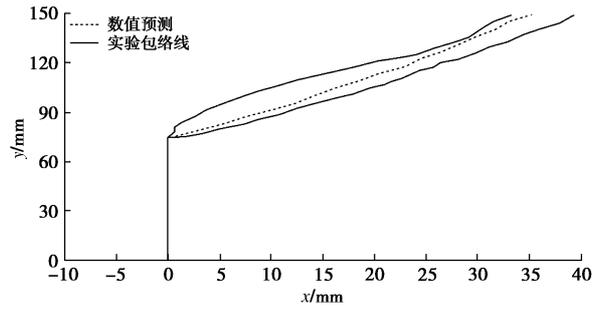


图 15 裂缝轨迹数值模拟结果与试验结果的对比

Fig. 15 Comparison between numerical and experimental results of crack trajectory

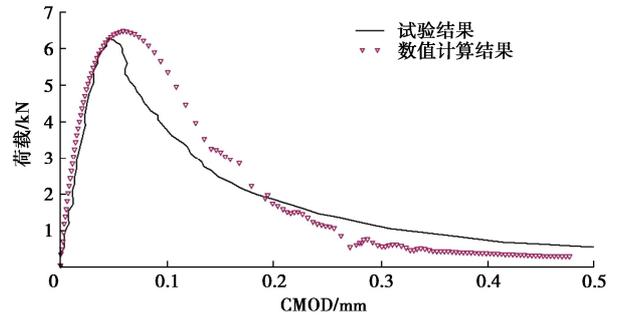


图 16 荷载与 CMOD 数值模拟与试验结果的对比

Fig. 16 Comparison of numerical simulation and experimental results of load and CMOD

### 2.4 四点弯曲梁的冲击试验模拟

以四点弯曲梁为例进行冲击试验，验证本文提出来的方法能够模拟承受冲击载荷后混凝土材料的断裂状态。实验室试验是由 Murray 等<sup>[23]</sup>开展进行的，在该试验中，两块金属块以  $v_y=5$  m/s 的速度撞击混凝土简支梁。如图 17 所示，梁试件的尺寸为  $1524$  mm  $\times$   $114.3$  mm  $\times$   $100$  mm，梁的顶部和底部的块体简化为半径为  $16$  mm 的圆柱体，混凝土梁被离散成  $4080$  个六面体单元。梁的材料属性为：杨氏模量  $E=25.8$  GPa，泊松比  $\nu=0.15$ ，抗拉强度  $f_t=2.7$  MPa，I型断裂能  $Gf_I=98$  N/m。为确保发生I型断裂，将剪切强度设置得足够大。

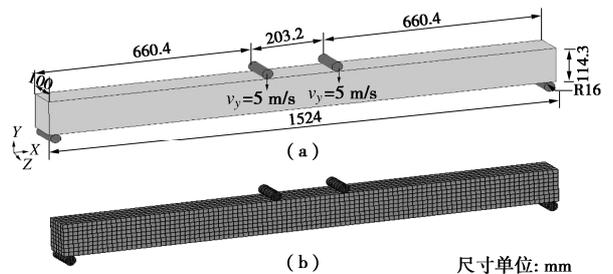


图 17 模型的几何形状

Fig. 17 Geometry of model

模拟混凝土梁的破坏过程如图 18 所示，裂缝产生于冲击块正下方梁的下表面，然后梁端 1/4 处出现裂

缝。最后，梁断裂成 5 个部分，这与试验结果完全一致，如图 19 所示。如图 20 所示，梁在断裂过程中最大挠度曲线数值模拟的计算结果与试验结果是一致的，表明数值模拟结果是可靠的。

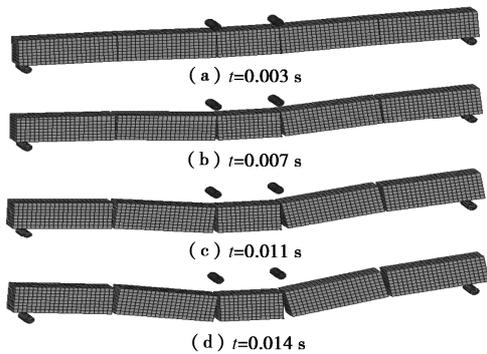


图 18 本文提出方法预测混凝土梁的断裂变化过程

Fig. 18 Change process of fracture of concrete beam by proposed method



图 19 素混凝土最终断裂成 5 个部分<sup>[23]</sup>

Fig. 19 Eventually fractured five parts of plain concrete beams

### 2.5 球体冲击模拟

该算例涉及到岩石系统的瞬态动力学，将直径为 200 mm 的岩石球体放置在刚性板附近，如图 21 所示，在负 Y 方向以不同的速度与刚性板发生碰撞，将球体离散为 4539 个四面体单元。球体的材料属性：杨氏模量  $E=50.0$  GPa，密度  $\rho=2500$  kg/m<sup>3</sup>，泊松比  $\nu=0.2$ ，抗拉强度  $f_t=3.0$  MPa，凝聚力  $c=55$  MPa，内摩擦角  $\varphi=30^\circ$ ，I 型断裂能  $Gf_I=80$  N/m，II 型断裂能

$Gf_{II} = 200$  N/m。

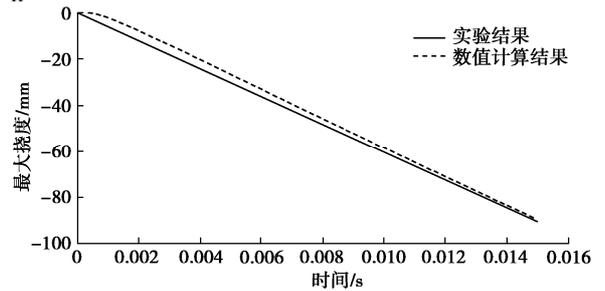


图 20 梁的最大挠度数值模拟与试验结果的对比

Fig. 20 Comparison between numerical and experimental results of maximum deflection

球体在不同冲击速度下的破裂形态如图 22 所示，当冲击速度小于 5 m/s 时，观察不到明显裂缝。当速度为 7.5 m/s 时，可以识别出一些裂缝，此时球体被分割成几个比较大的区域。一旦冲击速度达到 20 m/s，球体底部破碎为多个块体。随着冲击速度的进一步增大，球体的破坏则更加明显，在球体底部可以观察到更多的破碎块体。

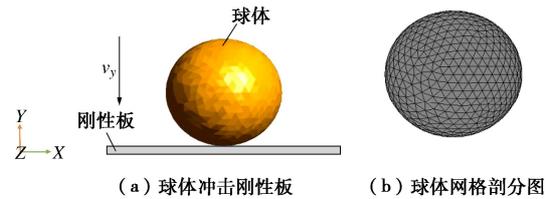


图 21 模型的几何形状

Fig. 21 Geometry of model

如图 23 所示，采用 FDEM 获得的混凝土球体破碎模式和 Khanal 等<sup>[24]</sup>观察到的实验室结果与本文提出方法模拟的结果相似。结果表明，该方法能够成功获得承受冲击载荷后岩体裂缝的主要特征。

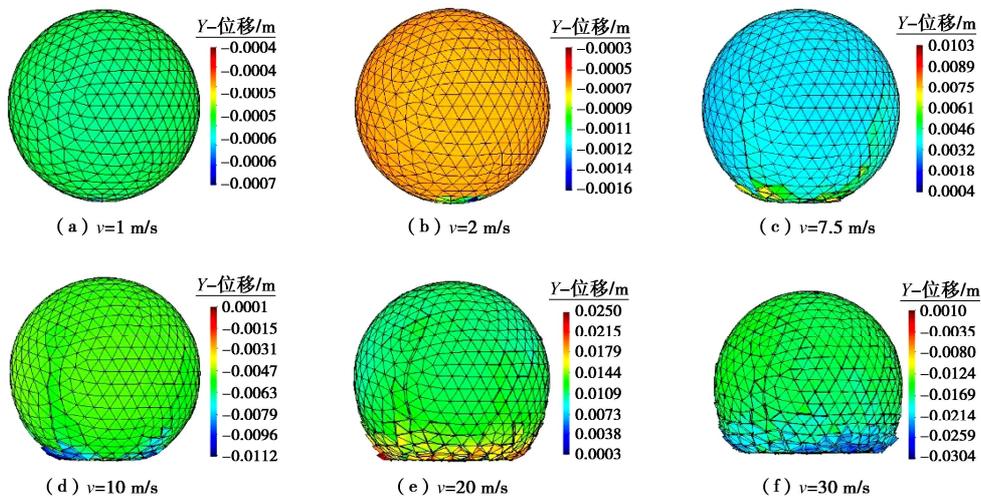


图 22  $t=0.75$  ms 时刻不同冲击速度下的断裂形态

Fig. 22 Fracture patterns under different impact velocities when  $t=0.75$  ms

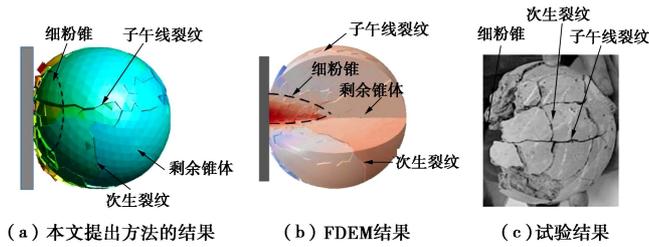


图 23 破碎模式

Fig. 23 Broken patterns

### 3 结 论

(1) 本文提出了一种用于模拟断裂全过程的三维可变形圆化多面体离散单元法。该方法将圆化多面体离散单元法与有限单元法相结合, 有限单元法计算颗粒的应力应变, 圆化多面体离散单元法计算颗粒之间的接触相互作用, 在有限单元的边界嵌入无厚度节理单元, 通过判断节理单元的破坏状态来捕捉裂缝萌生与扩展, 可以有效模拟岩体断裂的全过程。

(2) 通过 5 个算例来验证该方法的有效性和可行性, 其中颗粒堆积试验模拟结果表明, 该方法比 FDEM 更高效; 巴西圆盘劈裂试验验证了该方法在处理拉伸问题的准确性; 单缺口梁试验证明了该方法能够捕捉到拉剪复合应力下的断裂裂缝扩展; 最后, 四点弯曲梁试验和球体冲击试验表明, 该方法能够准确捕捉岩体受冲击载荷后裂缝的萌生和扩展。因此, 该方法为模拟准脆性材料的断裂全过程提供了一个简单高效的工具。

#### 参考文献:

[1] 陈旭东, CHAN A H C, 杨 健. 普通玻璃受冲击破坏的有限离散元方法分析[C]// 全国结构工程学术会议, 厦门, 2015. (CHEN Xudong, CHAN A H C, YANG Jian. Analysis of the impact damage of monolithic glass using the combined finite-discrete element method[C]// National Conference on Structural Engineering, Xiamen, 2015. (in Chinese))

[2] 张开雨, 刘 丰, 夏开文. 模拟脆性材料动态裂纹扩展的非连续变形分析方法[J]. 岩土工程学报, 2022, 44(1): 125-133. (ZHANG Kaiyu, LIU Feng, XIA Kaiwen. Numerical study on dynamic crack propagation of brittle materials by discontinuous deformation analysis[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2022, 44(1): 125-133. (in Chinese))

[3] 喻志发, 于长一, 刘 丰, 等. 数值流形法在裂纹扩展中的应用[J]. 岩土工程学报, 2020, 42(4): 751-757. (YU Zhifa, YU Changyi, LIU Feng, et al. Application of numerical

manifold method in crack propagation[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2020, 42(4): 751-757. (in Chinese))

- [4] CUNDALL P A., STRACK O D L. A discrete numerical model for granular assemblies[J]. Géotechnique, 1979, 29: 47-65.
- [5] 陈凌霄, 田文祥, 马 刚, 等. 模拟准脆性材料热开裂的热力耦合格构离散单元法[J]. 浙江大学学报(工学版), 2022, 56(9): 1750-1760, 1771. (CHEN Lingxiao, TIAN Wenxiang, MA Gang, et al. Thermal-mechanical coupled lattice discrete element method for simulating thermal cracking of quasi-brittle materials[J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2022, 56(9): 1750-1760, 1771. (in Chinese))
- [6] 张卫杰, 高玉峰, 黄 雨, 等. 水土耦合 SPH 数值模型的正则化修正及其应用[J]. 岩土工程学报, 2018, 40(2): 262-269. (ZHANG Weijie, GAO Yufeng, HUANG Yu, et al. Normalized correction of soil-water-coupled SPH model and its application[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2018, 40(2): 262-269. (in Chinese))
- [7] 李腊梅, 冯 春. 一种非连续介质中热传导过程的数值模拟方法[J]. 工程力学, 2016, 33(1): 25-31, 46. (LI Lamei, FENG Chun. A numerical simulation method for heat conduction in discontinuous media[J]. Engineering Mechanics, 2016, 33(1): 25-31, 46. (in Chinese))
- [8] 毛 佳, 赵兰浩, 刘勋楠, 等. 滑坡过程数值模拟的三维距离势离散元法[J]. 中国矿业大学学报, 2020, 49(6): 1094-1100. (MAO Jia, ZHAO Lanhao, LIU Xunnan, et al. Numerical simulation of landslides with the three-dimensional distance potential discrete element method[J]. Journal of China University of Mining & Technology, 2020, 49(6): 1094-1100. (in Chinese))
- [9] 严成增, 孙冠华, 郑 宏, 等. 基于局部单元劈裂的 FEM/DEM 自适应分析方法[J]. 岩土力学, 2014, 35(7): 2064-2070. (YAN Chengzeng, SUN Guanhua, ZHENG Hong, et al. Adaptive FEM/DEM analysis method based on local splitting elements[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, 35(7): 2064-2070. (in Chinese))
- [10] ZHANG H, CHEN G Q, ZHENG L, et al. Detection of contacts between three-dimensional polyhedral blocks for discontinuous deformation analysis[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2015, 78: 57-73.
- [11] MUNJIZA A. The Combined Finite-Discrete Element Method[M]. Chichester, West Sussex, England: Wiley, 2004.

- [12] 叶继红, 齐念. 基于离散元法与有限元法耦合模型的网壳结构倒塌过程分析[J]. 建筑结构学报, 2017, **38**(1): 52-61. (YE Jihong, QI Nian. Collapse process simulation of reticulated shells based on coupled DEM/FEM model[J]. Journal of Building Structures, 2017, **38**(1): 52-61. (in Chinese))
- [13] 严成增. FDEM-TM 方法模拟岩石热破裂[J]. 岩土工程学报, 2018, **40**(7): 1198-1204. (YAN Chengzeng. Simulating thermal cracking of rock using FDEM-TM method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2018, **40**(7): 1198-1204. (in Chinese))
- [14] ZHAO L H, LIU X N, MAO J, et al. A novel discrete element method based on the distance potential for arbitrary 2D convex elements[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2018, **115**: 238-67.
- [15] 刘璐, 龙雪, 季顺迎. 基于扩展多面体的离散单元法及其作用于圆桩的冰载荷计算[J]. 力学学报, 2015, **47**(6): 1046-1057. (LIU Lu, LONG Xue, JI Shunying. Dilated polyhedra based discrete element method and its application of ice load on cylindrical pile[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2015, **47**(6): 1046-1057. (in Chinese))
- [16] GALINDO-TORRES S A, PEDROSO D M. Molecular dynamics simulations of complex-shaped particles using Voronoi-based spheropolyhedra[J]. Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys, 2010, **81**(6 pt 1): 061303.
- [17] HILLERBORG A, MODÉER M, PETERSSON P E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements[J]. Cement and Concrete Research, 1976, **6**(6): 773-781.
- [18] ZHOU X P, CHENG H. Multidimensional space method for geometrically nonlinear problems under total lagrangian formulation based on the extended finite-element method [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2017, **143**(7): 04017036.
- [19] 王璐, 徐绯, 杨扬. 完全拉格朗日 SPH 在冲击问题中的改进和应用[J]. 力学学报, 2022, **54**(12): 3297-3309. (WANG Lu, XU Fei, YANG Yang. Improvement of the total Lagrangian sph and its application in impact problems[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2022, **54**(12): 3297-3309. (in Chinese))
- [20] ZHENG F, LEUNG Y F, ZHU J B, et al. Modified predictor-corrector solution approach for efficient discontinuous deformation analysis of jointed rock masses [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2019, **43**(2): 599-624.
- [21] PATEL S, MARTIN C D. Evaluation of tensile Young's modulus and Poisson's ratio of a Bi-modular rock from the displacement measurements in a Brazilian test[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 2018, **51**(2): 361-373.
- [22] GÁLVEZ J C, ELICES M, GUINEA G V, et al. Mixed mode fracture of concrete under proportional and nonproportional loading[J]. International Journal of Fracture, 1998, **94**(3): 267-284.
- [23] MURRAY Y, ABU-ODEH A, BLIGH R. Evaluation of LS-DYNA Concrete material model 159[R]. United States: Federal Highway Administration, Office of Research, Development, and Technology, 2007.
- [24] KHANAL M, SCHUBERT W, TOMAS J. Ball impact and crack propagation-simulations of particle compound material[J]. Granular Matter, 2004, **5**(4): 177-184.