

DOI: 10.11779/CJGE20230212

分配特殊群桩空间作用效应的双向 m 法

廖立坚¹, 苏伟¹, 杨新安², 王雨权¹

(1. 中国铁路设计集团有限公司, 天津 300308; 2. 同济大学交通运输工程学院, 上海 201804)

摘要: 群桩到单桩的作用分配是桩基计算的关键问题, 针对规范中的单向 m 法只适用于平面作用的局限性, 从单桩刚度、群桩刚度、受力平衡方程 3 个层面进行公式推导, 建立了变形协调的群桩刚度矩阵和空间受力平衡方程, 形成了适用于空间作用的双向 m 法, 并以对称等长直桩、双向斜桩、不对称桩为计算实例, 对比分析了单向 m 法和双向 m 法的计算结果。结果表明: 单向 m 法计算对称等长直桩时, 结果准确, 计算双向斜桩时, 单桩的弯矩和剪力波动较大, 最大值偏小 20% 左右, 计算不对称桩时, 单桩外力之和与总外力不闭合, 可信度低; 而双向 m 法的理论解可覆盖这些桩基类型, 结果更接近有限元数值解。研究成果为特殊桩基提供了一种快速且简便的计算方法, 扩展了公路和铁路桥梁桩基设计规范的适用范围。

关键词: 群桩; 作用分配; 空间作用; m 法; 双向斜桩; 不对称桩

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2024)06-1197-09

作者简介: 廖立坚(1982—), 男, 硕士, 正高级工程师, 主要从事桥梁基础结构计算与桥梁设计软件开发。E-mail: liaolijian82@163.com。

A bidirectional m -method for allocating spatial effects of special pile groups

LIAO Lijian¹, SU Wei¹, YANG Xinan², WANG Yuquan¹

(1. China Railway Design Corporation, Tianjin 300308, China; 2. College of Transportation Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China)

Abstract: The load distribution from a pile group to a single pile is the key issue in calculation of pile foundations. Aiming at the limitation that the one-way m -method in the Chinese specifications and codes is only applicable to plane action, the formulas are derived from three levels: stiffness of a single pile, stiffness of pile groups and equation for force balance, and the stiffness matrix for a deformation-coordinated pile group and the equation for spatial force balance are established, forming a bidirectional m -method suitable for spatial loads. Based on the examples of symmetric straight piles with equal length, bidirectional inclined piles and asymmetric piles, the calculated results by the one-way m -method and the bidirectional m -method are compared and analyzed. The results show that when using the one-way m -method to calculate the symmetric straight piles with equal length, the results are accurate. When calculating the bidirectional inclined piles, the bending moment and shear force of a single pile fluctuate greatly, with the maximum value being about 20% smaller. When calculating the asymmetric piles, the sum of external forces of a single pile is not closed to the total external force, and the reliability is low. The theoretical solutions for the bidirectional m -method can cover these pile foundation types, and the results are closer to the finite element numerical solutions. The research results provide a fast and simple method for special pile foundations, expanding the scope of application of the Chinese design specifications and codes for pile foundations of highway and railway bridges.

Key words: pile group; load distribution; spatial effect; m -method; bidirectional inclined pile; asymmetric pile

0 引言

公路和铁路桥梁中为了便于计算, 桩基础多设计为对称的等长直桩, 但随着应用的不断深入, 特殊桩基出现得越来越多, 例如在水平荷载较大的地方使用斜桩可以减小桩长^[1]、在岩溶区硬质岩起伏需要设计成不等长桩^[2]、施工时发生断桩需要进行不对称补桩^[3]

等。

群桩到单桩的受力分配是桩基计算的关键, 桥梁

基金项目: 国家重点研发计划项目 (2022YFB2603400); 中国国家铁路集团有限公司科技研究开发计划项目 (K2022G009); 中国国家铁路集团有限公司科技研究开发计划项目 (N2022G064)

收稿日期: 2023-03-13

基础设计规范^[4-5]中采用的 m 法计算参数少、效率高, 在桥梁桩基计算中广泛应用^[6]。但是规范中的 m 法其实是一种单向 m 法, 并不适用于双向斜桩、不等长桩、不对称桩的计算, 采用有限元法^[7-13]虽然计算精度高, 但是效率低无法在大规模设计中批量应用。研究表明^[14]规范中的单向 m 法仍适用于受较大水平力的群桩, 并可推广应用到单向斜桩, 但因未能考虑到两个方向上的变形协调^[15], 使得计算结果不正确。因此, 为了解决单向 m 法存在的不足, 并且扩展规范中桩基计算的适用范围, 从单桩刚度、群桩刚度及平衡方程 3 个方面对其进行改进, 并以具体项目中遇到的特殊桩基为例, 通过与单向 m 法进行对比, 验证了改进的双向 m 法计算的正确性, 为后续特殊桩基的计算提供合理可靠的计算方法。

1 单向 m 法

1.1 规范中的 m 法

公路和铁路桥涵地基与基础设计规范^[4-5]中, 群桩作用效应分配到单桩的方法均采用 m 法, 见图 1, 其原理主要按照以下 3 步进行。

(1) 计算单桩刚度, 由单桩刚度形成群桩刚度。首先, 计算参数 l_0 , h , φ , 各参数的示意图见图 1。 l_0 为桩头到地面或局部冲刷线的距离; h 为地面或局部冲刷线到桩底的距离; φ 为桩的倾斜角, 按图 1 中方向给出正负号。

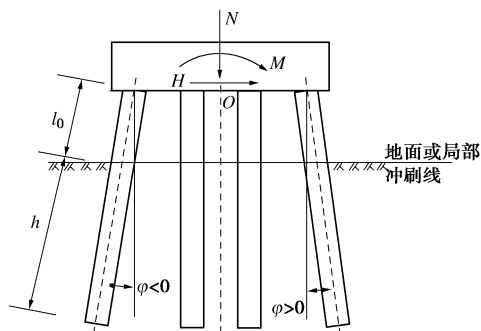


图 1 群桩作用效应图

Fig. 1 Effects of loads on a pile group

然后, 由 l_0 , h , φ 这些参数计算单桩的刚度:

$$(l_0, h, \varphi) \Rightarrow (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) \quad (1)$$

式中: ρ_1 为沿单桩轴线方向产生单位位移时引起单桩顶面处的轴向力 (kN/m); ρ_2 为沿单桩轴线方向产生单位横向位移时引起单桩顶面处的横向力 (kN/m); ρ_3 为沿单桩轴线方向产生单位横向位移时引起单桩顶面处的弯矩 (kN·m/m), 或沿单桩顶面弯矩方向产生单位转角时引起单桩顶面处的横向力 (kN/rad); ρ_4 为沿单桩顶面弯矩方向产生单位转角时引起单桩顶面处的弯矩 (kN·m/rad)。

式 (1) 的具体的表达式参见公路和铁路桥涵地基与基础设计规范。

最后, 计算群桩刚度, 群桩刚度就是当承台发生单位位移时, 所有单桩产生的反力之和, 可用单桩刚度表示为

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{ba} &= \sum (\rho_1 - \rho_2) \sin \varphi \cdot \cos \varphi, \\ \gamma_{aa} &= \sum (\rho_1 \sin^2 \varphi + \rho_2 \cos^2 \varphi), \\ \gamma_{\beta a} &= \sum [(\rho_1 - \rho_2) x \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \rho_3 \cos \varphi], \\ \gamma_{bb} &= \sum (\rho_1 \cos^2 \varphi + \rho_2 \sin^2 \varphi), \\ \gamma_{ab} &= \gamma_{ba}, \\ \gamma_{\beta b} &= \sum [(\rho_1 \cos^2 \varphi + \rho_2 \sin^2 \varphi) x + \rho_3 \sin \varphi], \\ \gamma_{b\beta} &= \gamma_{\beta b}, \\ \gamma_{a\beta} &= \gamma_{\beta a}, \\ \gamma_{\beta\beta} &= \sum [(\rho_1 \cos^2 \varphi + \rho_2 \sin^2 \varphi) x^2 + 2x\rho_3 \sin \varphi + \rho_4]. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: γ_{ba} , γ_{aa} , $\gamma_{\beta a}$ 为由于承台产生单位水平位移时, 群桩顶产生的竖向反力之和、水平反力之和以及其对坐标原点 O 的反弯矩之和; γ_{bb} , γ_{ab} , $\gamma_{\beta b}$ 为由于承台产生竖向位移时, 群桩顶产生的竖向反力之和、水平反力之和以及其对坐标原点 O 的反弯矩之和; $\gamma_{b\beta}$, $\gamma_{a\beta}$, $\gamma_{\beta\beta}$ 为由于承台绕 O 点产生单位转角时, 群桩顶产生的竖向反力之和、水平反力之和以及其对坐标原点 O 的反弯矩之和。

(2) 由群桩刚度和群桩所受外力计算承台位移。对图 1 所示的群桩, 在单一方向上, 可列出方程式:

$$\left. \begin{aligned} a\gamma_{ba} + b\gamma_{bb} + \beta\gamma_{\beta b} - N &= 0, \\ a\gamma_{aa} + b\gamma_{ab} + \beta\gamma_{a\beta} - H &= 0, \\ a\gamma_{\beta a} + b\gamma_{\beta b} + \beta\gamma_{\beta\beta} - M &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: N , H , M 为作用于承台底面坐标原点 O 上的轴向力、水平力和弯矩; b , a , β 为承台竖直位移、水平位移、绕 O 点转角。

(3) 由单桩刚度和承台位移计算单桩顶外力。对图 2 所示的单桩, 所受外力可写为

$$\left. \begin{aligned} N_i &= \rho_1 [a \sin \varphi + (b + x\beta) \cos \varphi], \\ Q_i &= \rho_2 [a \cos \varphi - (b + x\beta) \sin \varphi] - \rho_3 \beta, \\ M_i &= \rho_4 \beta - \rho_3 [a \cos \varphi - (b + x\beta) \sin \varphi]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中: N_i , Q_i , M_i 为第 i 根桩顶的轴向力、剪力和弯矩。

1.2 m 法在实际工程中的应用

规范中给出了群桩单向受力的分配公式, 实际工程应用时可以把规范中 1.1 节提到的 3 个步骤进行如下修改来适用于双向受力情况:

(1) 将群桩在纵横两个方向进行投影, 如图 3。分别按照式 (1), (2) 计算纵向单桩刚度和横向单桩

刚度, 再形成纵向群桩刚度和横向群桩刚度。

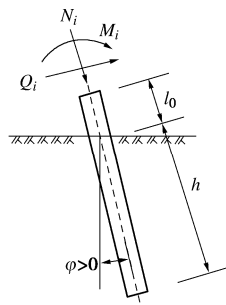


图2 单桩分配的外力

Fig. 2 Distribution of external force on a single pile

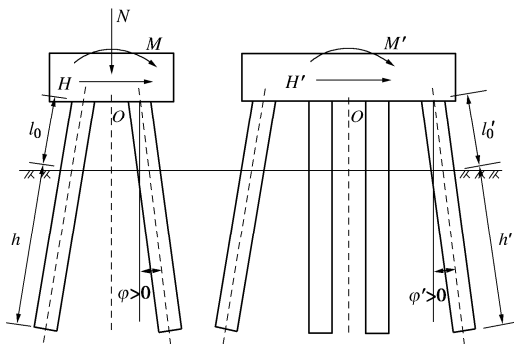


图3 群桩上双向作用分配图

Fig. 3 Distribution of bidirectional loads on a pile group

(2) 将承台底外力分解到纵向和横向上, 竖向力则全部作用在纵桥向^[16-17], 如图3所示。分别按式(3)计算出承台纵向位移和横向位移。

(3) 分别按式(4)计算桩顶纵向外力和横向外力, 再进行力的合成, 得到桩顶外力:

$$\left. \begin{aligned} N_i &= N_{xi} + N_{zi}, \\ Q_i &= \sqrt{Q_{xi}^2 + Q_{zi}^2}, \\ M_i &= \sqrt{M_{xi}^2 + M_{zi}^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中: N_i , Q_i , M_i 为第 i 根桩顶的轴向力、剪力和弯矩; N_{xi} , Q_{xi} , M_{xi} 为承台底纵向作用在第 i 根桩顶产生的轴向力、剪力和弯矩; N_{zi} , Q_{zi} , M_{zi} 为承台底横向作用在第 i 根桩顶产生的轴向力、剪力和弯矩。

1.3 讨论

单向 m 法的计算公式存在 3 点局限性。

(1) 单向 m 法的计算公式是基于纵向斜桩 ($\varphi \neq 0$ 且 $\varphi' = 0$) 推导的, 对于双向斜桩 ($\varphi \neq 0$ 且 $\varphi' \neq 0$), 只有将其投影到 $\varphi \neq 0$ 且 $\varphi' = 0$ 的正交面上, 计算公式才能成立, 但是其他斜桩在这个正交面上不一定是单向斜桩。

(2) 单向 m 法将竖向力全部分配在纵向上计算的方法不合理, 按式(3)计算的承台底在纵向力作用下的竖向位移 b 和在横向力作用下的竖向位移 b' , 只有满足 $b=b'$ 的竖向力分配比例才能满足变形协调。

(3) 单向 m 法忽略了纵横向之间的联系, 认为承台纵向水平位移、纵向转角不会产生横向力, 但是对于横向不对称的群桩, 纵向转角会产生横向弯矩, 纵向水平位移也会产生横向水平力。

因此, 单向 m 法仅适用于对称且等长的直桩, 对于斜桩、不对称、不等长桩计算均存在误差。为此我们可以从建立斜桩局部坐标系、推导双向斜桩刚度、列纵横向相关联的受力平衡方程等方向着手, 提出双向 m 法来扩展规范的适用范围。

2 双向 m 法

2.1 建立局部坐标系

以承台底为中心, 纵桥向为 X 轴, 横桥向为 Z 轴, 竖直方向为 Y 轴建立整体坐标系, 见图4。

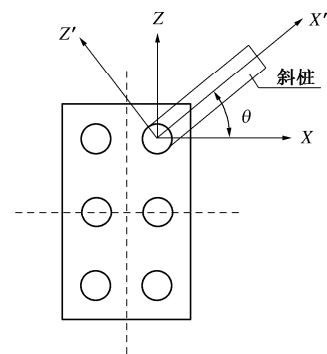
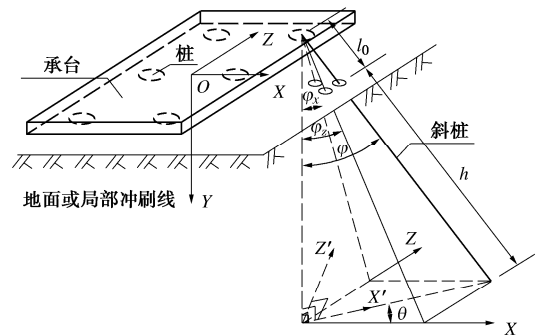


图4 群桩的坐标系

Fig. 4 Coordinate system of a pile group

斜桩在 XY 面上投影的倾斜角为 φ_z , 在 ZY 面上投影的倾斜角为 φ_x , 斜桩与 y 轴的夹角就是斜桩的倾斜角 φ , 可采用下式计算:

$$\varphi = \arctan \sqrt{\tan^2 \varphi_x + \tan^2 \varphi_z} \quad (6)$$

如果将 X 轴旋转到倾斜角 φ 的面内, 建立局部坐标系 $X'OZ'$, 双向斜桩问题就变成了单向斜桩问题, 旋转角 θ 可采用下式计算:

$$\theta = \arctan \frac{\tan \varphi_x}{\tan \varphi_z} \quad (7)$$

2.2 地基比例系数 m 值

桩侧土的地基比例系数 m 值应根据每根桩实际所

在土层分别计算, 当无试验实测值时, m 值可按公路或铁路规范查取, 当桩侧有多层土时, 应将地面或局部冲刷线以下 h_m 深度内的各层土, 换算成一个 m 值作为该桩整个深度 h 内的 m 值。计算公式与规范一致, 但 h_m , h_1 , h_2 , h_3 均为沿桩的长度方向, 见图 5。

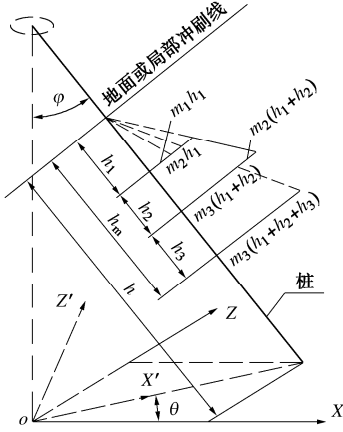


图 5 桩侧土 m 值计算示意图

Fig. 5 Calculation of m -value of soils at pile side

2.3 双向斜桩刚度计算

在局部坐标系 $X'OZ'$ 上, 由参数 l_0 , h , φ 计算出单桩在 X' 轴上的单桩刚度 ρ_1 , ρ_2^x , ρ_3^x , ρ_4^x , 再由参数 l_0 , h , 0 计算出单桩在 Z' 轴上的单桩刚度 ρ_2^z , ρ_3^z , ρ_4^z 。

$$\left. \begin{aligned} (l_0 \quad h \quad \varphi) &\Rightarrow (\rho_1 \quad \rho_2^x \quad \rho_3^x \quad \rho_4^x) \\ (l_0 \quad h \quad 0) &\Rightarrow (\rho_2^z \quad \rho_3^z \quad \rho_4^z) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中: ρ_1 为沿单桩轴线方向产生单位位移时引起单桩顶面处的轴向力 (kN/m); ρ_2^x , ρ_2^z 为沿单桩轴线方向产生 X' 轴或 Z' 轴的单位位移时引起单桩顶面处的横向力 (kN/m); ρ_3^x , ρ_3^z 为沿单桩轴线方向产生 X' 轴或 Z' 轴的单位横向位移时引起单桩顶面处的弯矩 (kN·m/m); 或沿单桩顶面 X' 轴或 Z' 轴方向的弯矩产生单位转角时引起单桩顶面处的横向力 (kN/rad); ρ_4^x , ρ_4^z 为沿单桩顶面 X' 轴或 Z' 轴方向的弯矩产生单位转角时引起单桩顶面处的弯矩 (kN·m/rad)。

在整体坐标系上, 当沿 X 轴方向产生单位水平位移时, 见图 6, 承台底产生的竖向反力之和 γ_{ba}^x , 对 X 轴的水平反力之和 γ_{xaa}^x , 对 Z 轴的水平反力之和 γ_{zaa}^x , 对 X 轴的反弯矩之和 $\gamma_{x\beta a}^x$, 对 Z 轴的反弯矩之和 $\gamma_{z\beta a}^x$, 可按下列式计算:

$$\begin{aligned} \gamma_{ba}^x &= \sum (\rho_1 \cos \theta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \rho_2^x \cos \theta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi) \\ &= \sum (\rho_1 - \rho_2^x) \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta \quad , \quad (9) \\ \gamma_{xaa}^x &= \sum (\rho_1 \cos \theta \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos \theta + \rho_2^x \cos \theta \cdot \cos^2 \varphi \cdot \cos \theta + \\ &\quad \rho_2^z \cdot \sin^2 \theta) \\ &= \sum [(\rho_1 \sin^2 \varphi + \rho_2^x \cos^2 \varphi) \cdot \cos^2 \theta + \rho_2^z \cdot \sin^2 \theta] \quad , \quad (10) \end{aligned}$$

$$\gamma_{zaa}^x = \sum [(\rho_1 \sin^2 \varphi + \rho_2^x \cos^2 \varphi) \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta - \rho_2^z \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta] \quad , \quad (11)$$

$$\gamma_{x\beta a}^x = \sum [(\rho_1 - \rho_2^x) x \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta - \rho_3^x \cos \varphi \cos^2 \theta - \rho_3^z \sin^2 \theta] \quad , \quad (12)$$

$$\gamma_{z\beta a}^x = \sum [(\rho_1 - \rho_2^x) z \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta - \rho_3^x \cos \varphi \cos \theta \sin \theta + \rho_3^z \sin \theta \cos \theta] \quad . \quad (13)$$

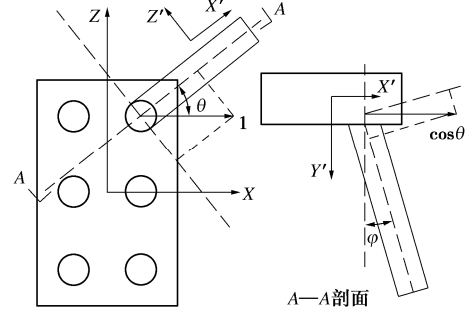


图 6 承台沿 X 轴方向产生单位水平位移

Fig. 6 Unit horizontal displacements of pile cap along X -axis direction

同理, 当沿 Z 轴方向产生单位水平位移时, 承台底产生的竖向反力之和 γ_{ba}^z , 对 X 轴的水平反力之和 γ_{xaa}^z , 对 Z 轴的水平反力之和 γ_{zaa}^z , 对 X 轴的反弯矩之和 $\gamma_{x\beta a}^z$, 对 Z 轴的反弯矩之和 $\gamma_{z\beta a}^z$, 可按照下列式计算:

$$\gamma_{ba}^z = \sum (\rho_1 - \rho_2^x) \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta \quad , \quad (14)$$

$$\gamma_{xaa}^z = \sum [(\rho_1 \sin^2 \varphi + \rho_2^x \cos^2 \varphi) \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta - \rho_2^z \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta] \quad , \quad (15)$$

$$\gamma_{zaa}^z = \sum [(\rho_1 \sin^2 \varphi + \rho_2^x \cos^2 \varphi) \cdot \sin^2 \theta + \rho_2^z \cdot \cos^2 \theta] \quad , \quad (16)$$

$$\gamma_{x\beta a}^z = \sum [(\rho_1 - \rho_2^x) x \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta - \rho_3^x \cos \varphi \sin \theta \cos \theta + \rho_3^z \cos \theta \sin \theta] \quad , \quad (17)$$

$$\gamma_{z\beta a}^z = \sum [(\rho_1 - \rho_2^x) z \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta - \rho_3^x \cos \varphi \sin^2 \theta - \rho_3^z \cos^2 \theta] \quad . \quad (18)$$

在整体坐标系上, 当沿竖向产生单位位移时, 见图 7, 承台底产生的竖向反力之和 γ_{bb} , 对 X 轴的水平反力之和 γ_{ab}^x , 对 Z 轴的水平反力之和 γ_{ab}^z , 对 X 轴的反弯矩之和 $\gamma_{\beta b}^x$, 对 Z 轴的反弯矩之和 $\gamma_{\beta b}^z$, 可按照下列式计算:

$$\gamma_{bb} = \sum (\rho_1 \cos^2 \varphi + \rho_2^x \sin^2 \varphi) \quad , \quad (19)$$

$$\gamma_{ab}^x = \gamma_{ba}^x \quad , \quad (20)$$

$$\gamma_{ab}^z = \gamma_{ba}^z \quad , \quad (21)$$

$$\gamma_{\beta b}^x = \sum [(\rho_1 \cos^2 \varphi + \rho_2^x \sin^2 \varphi) x + \rho_3^x \sin \varphi \cdot \cos \theta] \quad , \quad (22)$$

$$\gamma_{\beta b}^z = \sum [(\rho_1 \cos^2 \varphi + \rho_2^x \sin^2 \varphi) z + \rho_3^x \sin \varphi \cdot \sin \theta] \quad . \quad (23)$$

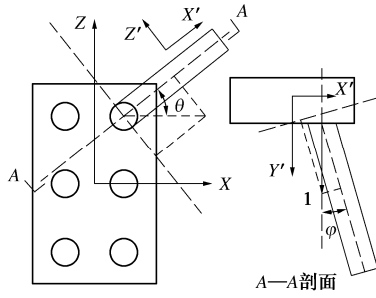


图7 承台产生单位竖向位移

Fig.7 Unit vertical displacements of pile cap

在整体坐标系上,当沿 X 轴方向产生单位转角时,见图8,承台底产生的竖向反力之和 γ_{bb}^x ,对 X 轴的水平反力之和 $\gamma_{xa\beta}^x$,对 Z 轴的水平反力之和 $\gamma_{za\beta}^x$,对 X 轴的反弯矩之和 $\gamma_{z\beta\beta}^z$,对 Z 轴的反弯矩之和 $\gamma_{x\beta\beta}^z$,可按照下式计算:

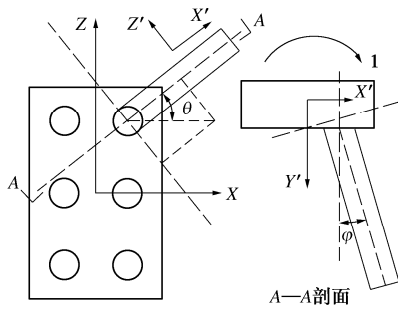
$$\gamma_{bb}^x = \gamma_{\beta b}^x, \quad (24)$$

$$\gamma_{xa\beta}^x = \gamma_{x\beta a}^x, \quad (25)$$

$$\gamma_{za\beta}^x = \gamma_{z\beta a}^x, \quad (26)$$

$$\gamma_{z\beta\beta}^z = \sum [(\rho_1^x \cos^2 \varphi + \rho_2^x \sin^2 \varphi)x^2 + 2x\rho_3^x \sin \varphi \cdot \cos \theta + \rho_4^x \cdot \cos^2 \theta + \rho_4^z \cdot \sin^2 \theta], \quad (27)$$

$$\gamma_{x\beta\beta}^z = \sum [(\rho_1^x \cos^2 \varphi + \rho_2^x \sin^2 \varphi)xz + 2z\rho_3^x + \rho_4^x \cdot \cos \theta \sin \theta + \rho_4^z \cdot \sin \theta \cos \theta]. \quad (28)$$

图8 承台沿 X 轴方向产生单位转角Fig. 8 Unit rotation angles of pile cap along X -axis direction

同理,当沿 Z 轴方向产生单位转角时,承台底产生的竖向反力之和 γ_{bb}^z ,对 X 轴的水平反力之和 $\gamma_{xa\beta}^z$,对 Z 轴的水平反力之和 $\gamma_{za\beta}^z$,对 X 轴的反弯矩之和 $\gamma_{z\beta\beta}^x$,对 Z 轴的反弯矩之和 $\gamma_{x\beta\beta}^x$,可按下列式计算:

$$\gamma_{bb}^z = \gamma_{\beta b}^z, \quad (29)$$

$$\gamma_{xa\beta}^z = \gamma_{x\beta a}^z, \quad (30)$$

$$\gamma_{za\beta}^z = \gamma_{z\beta a}^z, \quad (31)$$

$$\gamma_{z\beta\beta}^x = \sum [(\rho_1^z \cos^2 \varphi + \rho_2^z \sin^2 \varphi)zx + 2x\rho_3^z \sin \varphi \cdot \cos \theta + \rho_4^z \cdot \sin \theta \cos \theta + \rho_4^x \cdot \cos \theta \sin \theta], \quad (32)$$

$$\gamma_{x\beta\beta}^x = \sum [(\rho_1^z \cos^2 \varphi + \rho_2^z \sin^2 \varphi)z^2 +$$

$$2z\rho_3^z \sin \varphi \cdot \sin \theta + \rho_4^z \cdot \sin^2 \theta + \rho_4^x \cdot \cos^2 \theta]. \quad (33)$$

2.4 纵横相关的受力平衡方程

根据以上推导的纵横向相关的群桩刚度,结合承台底受力与位移,见图9,可在承台底建立受力平衡方程:

$$\left. \begin{aligned} b\gamma_{bb}^x + a_x\gamma_{ba}^x + \beta_z\gamma_{bb}^z + a_z\gamma_{ba}^z + \beta_x\gamma_{bb}^x - N &= 0, \\ b\gamma_{ab}^x + a_x\gamma_{xaa}^x + \beta_z\gamma_{xab}^x + a_z\gamma_{xaa}^z + \beta_x\gamma_{xab}^z - H_x &= 0, \\ b\gamma_{\beta b}^z + a_x\gamma_{x\beta a}^x + \beta_z\gamma_{z\beta b}^z + a_z\gamma_{x\beta a}^z + \beta_x\gamma_{z\beta b}^x - M_z &= 0, \\ b\gamma_{ab}^z + a_x\gamma_{zaa}^x + \beta_z\gamma_{zab}^x + a_z\gamma_{zaa}^z + \beta_x\gamma_{zab}^z - H_z &= 0, \\ b\gamma_{\beta b}^x + a_x\gamma_{z\beta a}^x + \beta_z\gamma_{x\beta b}^z + a_z\gamma_{z\beta a}^z + \beta_x\gamma_{x\beta b}^x - M_x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

式中: b 为承台竖向位移 (m); a_x, a_z 为 X 轴方向承台板水平位移, Z 轴方向承台板水平位移 (m); β_z, β_x 为承台绕 Z 轴和绕 X 轴的转角 (rad); N, H_x, M_z, H_z, M_x 为作用于承台板底面坐标原点 O 上的外力。

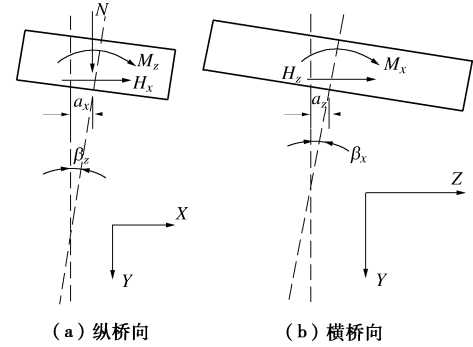


图9 群桩双向受力与位移示意图

Fig. 9 Bidirectional forces and displacements of a pile group

2.5 单桩受力计算

根据承台底位移和单桩刚度,见图10,可求出第 i 根桩所受的轴力 N_i ,剪力 Q_i^x, Q_i^z 和弯矩 M_i^z, M_i^x :

$$\left. \begin{aligned} N_i &= \rho_1[a_x \sin \varphi \cos \theta + a_z \sin \varphi \sin \theta + (b + x\beta_z + z\beta_x) \cos \varphi], \\ Q_i^x &= \rho_2^x[a_x \cos \varphi \cos \theta + a_z \cos \varphi \sin \theta - (b + x\beta_z + z\beta_x) \sin \varphi] - \rho_3^x(\beta_z \cos \theta + \beta_x \sin \theta), \\ M_i^z &= \rho_4^x(\beta_z \cos \theta + \beta_x \sin \theta) - \rho_3^x[a_x \cos \varphi \cos \theta + a_z \cos \varphi \sin \theta - (b + x\beta_z + z\beta_x) \sin \varphi], \\ Q_i^z &= \rho_2^z(a_z \cos \theta - a_x \sin \theta) - \rho_3^z(\beta_x \cos \theta - \beta_z \sin \theta), \\ M_i^x &= \rho_4^z(\beta_x \cos \theta - \beta_z \sin \theta) - \rho_3^z(a_z \cos \theta - a_x \sin \theta). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

3 工程实例对比

为了进一步验证双向 m 法的计算效果,以工程中正在使用的单向 m 法作为参照,选取对称等长直桩、双向斜桩、不对称桩3组实例,采用两种方法分别计算,再对比两者的计算结果。

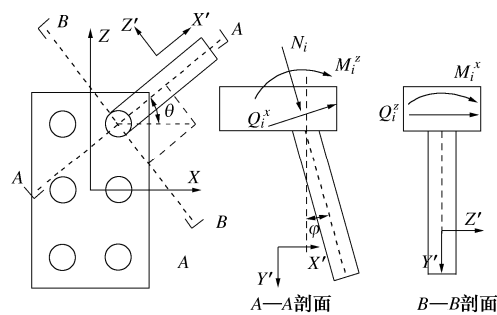


图 10 单桩受力示意图

Fig. 10 Forces on a single pile

3.1 对称等长直桩

选取京雄和宣绩高铁桥梁段有代表性的桩基共计 2000 个作为计算实例，分别采用单向 m 法和双向 m 法进行计算，经计算后发现，两种计算方法的结果完全一致，所以这里不再列出计算结果。

3.2 双向斜桩实例

某项目跨海段特大桥采用双向斜桩基础，桩基的结构形式和地质情况示意图 11。

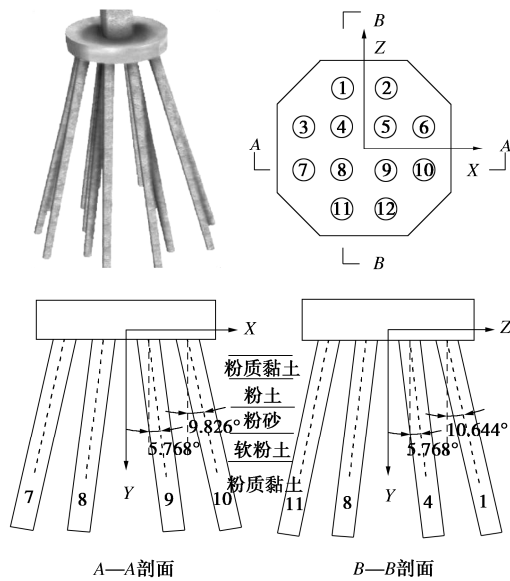


图 11 跨海特大桥双向斜桩示意图

Fig. 11 Bidirectional inclined piles of cross-sea bridge

该基础的斜桩选取的是 12 根外径为 2 m，壁厚为 22 mm 的钢管桩，各桩的坐标和倾斜角度见表 1。

为了更好的说明问题，选取两组有代表性的工况作为承台底外力，见表 2，工况 1 是仅有竖直力的荷载，工况 2 是从主+附工况中选出的控制荷载。

按照单向 m 法和双向 m 法分别对两组工况进行计算，并采用有限元法进行验证，计算结果见表 3。首先分析只有竖直力作用的工况 1，对于一个完全对称结构，相同位置上的桩其分配的剪力和弯矩应该相同，

据此#2 桩，#3 桩的剪力和弯矩应该相同。从表 3 中可以看到，双向 m 法的计算结果与此前的分析一致，而单向 m 法的计算结果却出现了偏差^[18-19]。查找表 1 后发现，单向 m 法计算的剪力和弯矩与“XY 面倾角 φ_z ”参数相关，而双向 m 法计算的剪力和弯矩与“倾角 φ ”参数相关，显然双向 m 法的计算结果更合理，而单向 m 法未能考虑竖向力在纵横向上的变形协调。再来分析工况 2，工况 2 中水平力以横桥向为主，上半部分的桩基轴向力可以抵消一部分水平力，从而减小桩顶剪力和弯矩，而下半部分的桩基轴向力会增加剪力和弯矩，因此#7~#12 桩的剪力和弯矩会比#1~#6 桩大，#1，#2 号桩的轴向力大，抵消的剪力和弯矩也越多，双向 m 法的计算结果与此前的分析更吻合。

表 1 斜桩基础中的桩坐标与倾斜角

Table 1 Pile coordinates and inclination angles in foundation with inclined piles

桩号	X 坐标/ m	Z 坐标/ m	倾角 φ / (°)	XY 面倾角 φ_z /(°)	ZY 面倾角 φ_x /(°)
1	-2.0	5.5	11.31	-3.913	10.644
2	2.0	5.5	11.31	3.913	10.644
3	-5.5	2.0	11.31	-9.826	5.711
4	-2.0	2.0	8.13	-5.768	5.768
5	2.0	2.0	8.13	5.768	5.768
6	5.5	2.0	11.31	9.826	5.711
7	-5.5	-2.0	11.31	-9.826	-5.711
8	-2.0	-2.0	8.13	-5.768	-5.768
9	2.0	-2.0	8.13	5.768	-5.768
10	5.5	-2.0	11.31	9.826	-5.711
11	-2.0	-5.5	11.31	-3.913	-10.644
12	2.0	-5.5	11.31	3.913	-10.644

表 2 斜桩的承台底外力

Table 2 External forces at bottom of cap with inclined piles

工况 序号	工况名称	竖直力	X 方向		Z 方向	
		N/ kN	M _x / (kN·m)	H _x / kN	M _z / (kN·m)	H _z / kN
1	竖向力	21811	0	0	0	0
2	主+附	76838	-35708	-1002	120826	7752

同时利用 MIDAS 建立有限元模型进行对比，承台采用板单元，桩基采用梁单元，并在桩头位置共用节点。桩土相互作用通过在桩节点上加弹性支承来实现，桩侧加水平刚度，桩底加竖向刚度和转动刚度，斜桩需要设立节点局部坐标系，见图 12。

对比表 3 中两种方法的计算结果，双向 m 法的理论解与有限元法误差较小，比单向 m 法的结果更合理。两种方法计算的桩顶轴向力差别不大，而双向 m 法计算桩顶剪力和弯矩比单向 m 法大 20% 左右。

3.3 不对称桩实例

某单线桥梁桩基采用 5 根直径为 1 m 的直桩，在施工过程中#5 桩出现了断桩情况，因此在边上进行了补桩，桩基布置如图 13 所示。

表 3 斜桩的计算结果对比表
Table 3 Comparison of calculated results for inclined piles

工况 序号	桩号	单向 m 法			双向 m 法			有限元法			单向 m 法与有限元法误差			双向 m 法与有限元法误差		
		$N_i/$ kN	$Q_i/$ kN	$M_i/$ (kN·m)	$N'_i/$ kN	$Q'_i/$ kN	$M'_i/$ (kN·m)	$N''_i/$ kN	$Q''_i/$ kN	$M''_i/$ (kN·m)	$\Delta N_i/\%$	$\Delta Q_i/\%$	$\Delta M_i/\%$	$\Delta N'_i/\%$	$\Delta Q'_i/\%$	$\Delta M'_i/\%$
1	1	1836	9.98	72.4	1834	29.16	211.6	1835	29.07	209.7	0.1	-65.7	-65.5	-0.1	0.3	0.9
	2	1836	9.98	72.4	1834	29.16	211.6	1835	29.07	209.7	0.1	-65.7	-65.5	-0.1	0.3	0.9
	3	1808	24.96	181.1	1829	29.16	211.6	1822	29.07	209.7	-0.8	-14.1	-13.6	0.4	0.3	0.9
	4	1843	14.86	107.4	1864	21.26	153.7	1863	21.15	149.7	-1.1	-29.7	-28.3	0.1	0.5	2.7
	5	1843	14.86	107.4	1864	21.26	153.7	1863	21.15	149.7	-1.1	-29.7	-28.3	0.1	0.5	2.7
	6	1808	24.96	181.1	1829	29.16	211.6	1822	29.07	209.7	-0.8	-14.1	-13.6	0.4	0.3	0.9
	7	1808	24.96	181.1	1829	29.16	211.6	1822	29.07	209.7	-0.8	-14.1	-13.6	0.4	0.3	0.9
	8	1843	14.86	107.4	1864	21.26	153.7	1863	21.15	149.7	-1.1	-29.7	-28.3	0.1	0.5	2.7
	9	1843	14.86	107.4	1864	21.26	153.7	1863	21.15	149.7	-1.1	-29.7	-28.3	0.1	0.5	2.7
	10	1808	24.96	181.1	1829	29.16	211.6	1822	29.07	209.7	-0.8	-14.1	-13.6	0.4	0.3	0.9
	11	1836	9.98	72.4	1834	29.16	211.6	1835	29.07	209.7	0.1	-65.7	-65.5	-0.1	0.3	0.9
	12	1836	9.98	72.4	1834	29.16	211.6	1835	29.07	209.7	0.1	-65.7	-65.5	-0.1	0.3	0.9
	最大值	1843	24.96	181.1	1864	29.16	211.6	1863	29.07	209.7	-1.1	-14.1	-13.6	0.1	0.3	0.9
2	1	11469	204.9	740.1	11560	120.9	1077.6	11580	122.86	1104.2	-1.0	66.8	-33.0	-0.2	-1.6	-2.4
	2	10639	205.0	420.4	10668	95.1	346.1	10647	92.52	334.0	-0.1	121.6	25.9	0.2	2.8	3.6
	3	9391	271.5	1329.5	9571	261.1	1559.6	9504	264.13	1596.9	-1.2	2.8	-16.7	0.7	-1.1	-2.3
	4	8881	262.3	1083.0	9019	221.1	1159.8	8933	218.70	1138.4	-0.6	19.9	-4.9	1.0	1.1	1.9
	5	7981	262.0	781.5	8043	203.9	399.2	8034	202.21	394.8	-0.7	29.6	97.9	0.1	0.8	1.1
	6	7174	263.8	785.9	7157	231.1	575.5	7110	228.86	566.3	0.9	15.3	38.8	0.7	1.0	1.6
	7	5565	271.5	1329.5	5734	345.9	1662.6	5764	342.48	1643.8	-3.5	-20.7	-19.1	-0.5	1.0	1.1
	8	5004	262.3	1083.0	5094	330.0	1446.4	5135	325.92	1406.5	-2.6	-19.5	-23.0	-0.8	1.3	2.8
	9	4103	262.0	781.5	4117	316.1	1209.3	4136	313.95	1190.4	-0.8	-16.5	-34.3	-0.5	0.7	1.6
	10	3348	263.8	785.9	3319	311.4	1152.6	3370	318.67	1203.0	-0.7	-17.2	-34.7	-1.5	-2.3	-4.2
	11	2293	204.9	740.1	2256	312.1	1292.9	2217	301.20	1242.4	3.4	-32.0	-40.4	1.8	3.6	4.1
	12	1464	205.0	420.4	1365	297.8	1157.5	1370	299.58	1169.7	6.9	-31.6	-64.1	-0.4	-0.6	-1.0
	最大值	11469	271.5	1329.5	11560	345.9	1662.6	11580	342.48	1643.8	-1.0	-20.7	-19.1	-0.2	1.0	1.1

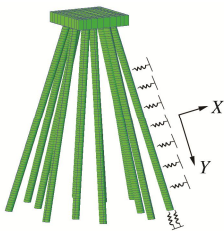


图 12 斜桩基础的有限元模型

Fig. 12 Finite element model for foundation with inclined piles

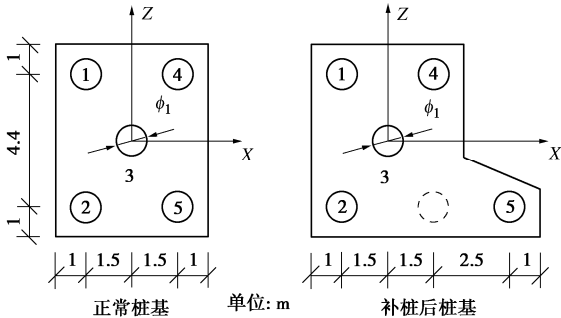


图 13 某桥不对称桩基布置图

Fig. 13 Layout of foundation of a bridge with asymmetric piles

选择一组桩长控制工况，见表 4。

表 4 不对称桩的承台底外力

Table 4 External forces at bottom of cap with asymmetric piles

工况 序号	工况名称	竖直力	X 方向		Z 方向	
		$N/$ kN	$M_x/$ (kN·m)	$H_x/$ kN	$M_z/$ (kN·m)	$H_z/$ kN
1	桩长控制	12886.3	1257.8	26.6	3296.7	280.7

采用单向 m 法、双向 m 法和有限元法 3 种方法分别对补桩桩基进行计算，结果见表 5。双向 m 法与有限元法计算结果基本一致，单向 m 法结果与其他方法差别较大。

为了查看分配效果，将各桩顶的外力进行汇总，再与原承台底外力进行对比，对比结果见表 6。结果表明，对于不对称结构，采用单向 m 法分配的各桩顶外力之和与原外力相差甚远，而双向 m 法分配的结果与原外力一致^[20]。

4 结 论

(1) 单向 m 法是以群桩基础单向受力为原型进行的公式推导，在计算双向受力时，不能考虑两个方向的耦合关系，也无法协调竖直力在纵横向分配的比例，因此，在计算双向斜桩、不等长桩、不对称桩等

表 5 不对称桩的计算结果
Table 5 Calculated results of asymmetric piles

桩号	单向 m 法			双向 m 法			有限元法		
	$N_i/$ kN	$M_{iz}/$ kN	$M_{ix}/$ (kN·m)	$N'_i/$ kN	$M'_{iz}/$ kN	$M'_{ix}/$ (kN·m)	$N''_i/$ %	$M''_{iz}/$ %	$M''_{ix}/$ %
1	3555.3	-81.4	-64.1	3317.3	-70.3	-82.7	3317.3	-69.8	-82.1
2	2581.7	-73.3	-64.1	2641.5	-62.1	-82.7	2641.5	-61.8	-82.2
3	2674.3	-77.3	-61.4	2643	-66.2	-79.9	2643	-66.1	-79.7
4	2766.9	-81.4	-58.6	2644.5	-70.3	-77.2	2644.5	-70.4	-77.3
5	1308.1	-73.3	-53.9	1640.1	-62.1	-72.5	1640.1	-62.0	-72.4

表 6 不对称桩顶外力汇总表
Table 6 Summary of external forces on top of asymmetric piles

		计算结果校核	计算结果	原外力	误差/%
单向 m 法	$\sum N$	$N_1+N_2+N_3+N_4+N_5=$	12886.3	12886.3	0.00
	$\sum M_z$	$4\times N_5+1.5\times(N_4-N_1-N_2)+\sum M_{iz}=$	-209.5	1257.8	-116.66
	$\sum M_x$	$2.2\times(N_1+N_4-N_2-N_5)+\sum M_{ix}=$	5049.2	3296.7	53.16
双向 m 法	$\sum N$	$N_1+N_2+N_3+N_4+N_5=$	12886.4	12886.3	0.00
	$\sum M_z$	$4\times N_5+1.5\times(N_4-N_1-N_2)+\sum M_{iz}=$	1257.95	1257.8	0.01
	$\sum M_x$	$2.2\times(N_1+N_4-N_2-N_5)+\sum M_{ix}=$	3301.4	3296.7	0.14

特殊情况时，会出现计算结果不正确的问题。

(2) 双向 m 法是以群桩空间受力为原型进行的公式推导，在组建群桩刚度时考虑了单桩刚度在各方向上的叠加效应，在空间坐标系下建立的受力平衡方程考虑了纵横向的相关性，因此，在计算特殊桩基时，具有更强的适用性。

(3) 对比两种方法，计算对称等长直桩时，两者结果一致；计算双向斜桩时，两者竖直力差别不大，但是在单桩的最大弯矩和剪力上，双向 m 法比单向 m 法大 20% 左右；计算不对称桩时，单向 m 法分配的单桩外力之和与总外力不闭合，双向 m 法能自我闭合。通过有限元数值仿真验证，双向 m 法的计算结果更准确。

参考文献:

[1] 顾明, 陈仁朋, 孔令刚, 等. 水平偏心荷载下斜桩群桩受力性状的离心机模型试验[J]. 岩土工程学报, 2014, 36(11): 2018-2024. (GU Ming, CHEN Renpeng, KONG Linggang, et al. Centrifugal model tests on batter pile groups under eccentric lateral loads[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, 36(11): 2018-2024. (in Chinese))

[2] 李永贵. 岩溶地区修建客运专线勘察及设计对策研究[J]. 铁道工程学报, 2017, 34(6): 1-7. (LI Yonggui. Research on the reconnaissance and design countermeasures of passenger dedicated line in karst area[J]. Journal of Railway Engineering Society, 2017, 34(6): 1-7. (in Chinese))

[3] 郑辉. 客运专线铁路桥梁桩基础补桩方案研究[J]. 铁道勘察, 2015, 41(6): 88-90. (ZHENG Hui. Study on the scheme

of bridge pile foundation in passenger dedicated line[J]. Railway Investigation and Surveying, 2015, 41(6): 88-90. (in Chinese))

[4] 公路桥涵地基与基础设计规范: JTG 3363—2019[S]. 北京: 人民交通出版社, 2019. (Specifications for Design of Foundation of Highway Bridges and Culverts: JTG 3363—2019[S]. Beijing: China Communications Press, 2019. (in Chinese))

[5] 铁路桥涵地基和基础设计规范: TB 10093—2017[S]. 北京: 中国铁道出版社, 2017. (Code for Design of Subsoil and Foundation for Railway Bridge and Culvert: TB 10093—2017[S]. Beijing: China Railway Publishing House, 2017. (in Chinese))

[6] 蒋翔, 彭冉. 基于 m 法的桩基分析程序开发[J]. 中外公路, 2016, 36(5): 173-175. (JIANG Xiang, PENG Ran. Development of pile foundation analysis program based on M method[J]. Journal of China & Foreign Highway, 2016, 36(5): 173-175. (in Chinese))

[7] SUBRAMANIAN R M, BOOMINATHAN A. Dynamic experimental studies on lateral behaviour of batter piles in soft clay[J]. International Journal of Geotechnical Engineering, 2016, 10(4): 317-327.

[8] KAMPITSIS A E, SAPOUNTZAKIS E J, GIANNAKOS S K, et al. Seismic soil-pile-structure kinematic and inertial interaction—a new beam approach[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2013, 55: 211-224.

[9] 邹盛堂, 戴自航. 抗滑桩计算的综合刚度与三参数法数值解[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, 33(增刊 2): 3718-3723.

- (ZOU Shengtang, DAI Zihang. Numerical solutions of composite stiffness and tri-parameter method for calculation of anti-slide piles[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2014, **33**(S2): 3718-3723. (in Chinese))
- [10] 张磊, 焦丹. 轴、横向荷载下微倾单桩地基反力法的解析解[J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版), 2016, **48**(6): 862-867. (ZHANG Lei, JIAO Dan. Analytical solutions for slightly inclined single piles under simultaneous axial and lateral loading by subgrade reaction method[J]. Journal of Xi'an University of Architecture & Technology (Natural Science Edition), 2016, **48**(6): 862-867. (in Chinese))
- [11] XIE Y F, LIU C L, GAO S Y, et al. Lateral load bearing capacity of offshore high-piled wharf with batter piles[J]. Ocean Engineering, 2017, **142**: 377-387.
- [12] 邓涛, 林聪煜, 柳志鹏, 等. 大位移条件下水平受荷单桩的简明弹塑性计算方法[J]. 岩土力学, 2020, **41**(1): 95-102. (DENG Tao, LIN Congyu, LIU Zhipeng, et al. A simplified elastoplastic method for laterally loaded single pile with large displacement[J]. Rock and Soil Mechanics, 2020, **41**(1): 95-102. (in Chinese))
- [13] 张永亮, 陈兴冲, 孙建飞. 桥梁群桩基础非线性静力计算模型及拟静力试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, **32**(9): 1799-1806. (ZHANG Yongliang, CHEN Xingchong, SUN Jianfei. Nonlinear static calculation model and pseudo-static test of pile group bridge foundations[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2013, **32**(9): 1799-1806. (in Chinese))
- [14] 刘陕南, 侯胜男, 蔡忠祥. m 法计算单桩水平承载力在上海地区的适用性分析[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(增刊 2): 721-724. (LIU Shannan, HOU Shengnan, CAI Zhongxiang. Applicability of m -method for horizontal bearing capacity of single pile in Shanghai area[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(S2): 721-724. (in Chinese))
- [15] 张麒麟, 卓卫东, 范立础. 基于变形协调的斜桩轴向承载力计算方法[J]. 广西大学学报(自然科学版), 2013, **38**(4): 962-968. (ZHANG Qizhe, ZHUO Weidong, FAN Lichu. Calculation of axially bearing capacity of a batter pile based on mechanism of deformation compatibility[J]. Journal of Guangxi University (Natural Science Edition), 2013, **38**(4): 962-968. (in Chinese))
- [16] 铁道第三勘察设计院. 桥涵地基和基础[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2002. (The 3rd Railway Survey and Design Institute. Subsoil and Foundation of Bridge and Culvert[M]. Beijing: China Railway Publishing House, 2002. (in Chinese))
- [17] 胡人礼. 桥梁桩基础分析和设计[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1987. (HU Renli. Analysis and Design of Bridge Pile Foundation[M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1987. (in Chinese))
- [18] 邱红胜, 吴龙烽, 付张龙, 等. 斜向荷载作用下斜桩承载性能数值分析[J]. 武汉理工大学学报(交通科学与工程版), 2020, **44**(5): 794-797, 802. (QIU Hongsheng, WU Longfeng, FU Zhanglong, et al. Numerical analysis of bearing capacity of inclined piles under oblique loads[J]. Journal of Wuhan University of Technology (Transportation Science & Engineering), 2020, **44**(5): 794-797, 802. (in Chinese))
- [19] 任瑞虹. 竖向荷载作用下斜桩承载变形特性有限元分析[J]. 长江科学院院报, 2017, **34**(5): 99-102, 108. (REN Ruihong. Finite element analysis of bearing deformation behavior of batter piles under vertical load[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 2017, **34**(5): 99-102, 108. (in Chinese))
- [20] 黄茂松, 李波, 程岳. 长短桩组合路堤桩荷载分担规律离心模型试验与数值模拟[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, **29**(12): 2543-2550. (HUANG Maosong, LI Bo, CHENG Yue. Centrifuge model tests and numerical simulation of load sharing law for composite embankment with long and short piles[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, **29**(12): 2543-2550. (in Chinese))