

DOI: 10.11779/CJGE20220805

边坡稳定确定性设计与可靠度设计的安全判据 等价性充分条件

曹子君^{1,2,3}, 周强⁴, 李典庆^{2,3}

(1. 西南交通大学高速铁路线路工程教育部重点实验室智慧城市与交通学院, 四川 成都 611756; 2. 武汉大学水资源工程与调度全国重点实验室, 湖北 武汉 430072; 3. 武汉大学工程风险与防灾研究所, 湖北 武汉 430072; 4. 长江勘测规划设计研究有限责任公司, 湖北 武汉 430010)

摘要: 边坡稳定设计中不可避免地存在多种不确定性, 确定性设计方法难以合理地考虑各种不确定性。相对而言, 可靠度设计方法能够定量考虑岩土工程设计中的不确定性因素。确定性设计与可靠度设计采用了不同的安全判据, 具有相同安全系数的设计方案的可信度水平可能不同, 导致两种设计方法的设计可行域不一致 (即两种设计方法安全判据不等价), 阻碍了可靠度设计方法在工程实践中的应用。相对安全率和广义可靠指标相对安全率建立了两种设计方法安全判据之间的定量联系, 将广义可靠指标相对安全率应用于边坡稳定可靠度设计, 提出边坡稳定确定性设计与可靠度设计的安全判据等价性充分条件。基于随机场模型研究了单层和双层土质边坡确定性设计与可靠度设计的等价关系。结果表明: 考虑空间变异性条件下, 单层边坡可以满足所提充分条件, 确定性设计与可靠度设计可以得到相同的设计可行域; 相反, 双层边坡不满足所提充分条件, 难以建立两种设计安全判据的等价关系。

关键词: 边坡; 可靠度设计; 安全判据; 广义可靠指标相对安全率; 充分条件

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2023)08-1703-10

作者简介: 曹子君(1987—), 男, 博士, 教授, 主要从事岩土工程可靠度设计方法方面的研究工作。E-mail: zijuncao@swjtu.edu.cn。

Sufficient conditions for equivalence between safety factor-based deterministic design and reliability-based design of slope stability

CAO Zijun^{1,2,3}, ZHOU Qiang⁴, LI Dianqing^{2,3}

(1. MOE Key Laboratory of High-Speed Railway Engineering, Institute of Smart City and Intelligent Transportation, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China; 2. State Key Laboratory of Water Resources Engineering and Management, Wuhan University, Wuhan 430072, China; 3. Institute of Engineering Risk and Disaster Prevention, Wuhan University, Wuhan 430072, China; 4. Changjiang Survey, Planning, Design and Research Co., Ltd., Wuhan 430010, China)

Abstract: Design of stability of soil slopes inevitably involves many uncertainties, but the deterministic design method is difficult to properly consider various uncertainties. In contrast, the reliability-based design (RBD) can quantitatively consider the uncertainties in geotechnical design. Different safety criteria are adopted in the deterministic design and RBD, and possible designs with the same safety factor may have different levels of reliability and resulting in the inconsistency of feasible design domains of the two design methods (i.e., the safety criterion is not equivalent), hampering the applications of RBD in practice. The ratio of safety margin and the generalized reliability ratio of safety margin provide a useful tool to bridge the design criterion of the deterministic design method and the RBD. The generalized reliability ratio of safety margin is applied to RBD of slope stability, and the sufficient conditions for the equivalence between the deterministic design and RBD of slope stability are proposed. Based on different random field models, the equivalence between the deterministic design and RBD for two soil slope examples with one layer and two layers is studied, respectively. The results indicate that the one-layer slope satisfies the sufficient conditions when considering spatial variability, and the same feasible design domain can be obtained by the deterministic design and RBD. On the contrary, the sufficient conditions are not satisfied for the two-layer slope. The equivalence between the safety criterion of the two design methods for the two-layer slope example considering the spatial variability cannot be held.

Key words: slope; RBD; safety criterion; generalized reliability ratio of safety margin; sufficient condition

基金项目: 国家自然科学基金重点项目 (U2240211); 国家自然科学基金项目 (52278368)
收稿日期: 2022-06-27

0 引言

中国边坡工程稳定性设计仍然以确定性设计方法为主,例如《水利水电工程边坡设计规范:SL386—2007》^[1](以下简称《规范》)规定采用安全系数 F_s 作为边坡稳定分析的评价指标。确定性设计方法简单且应用广泛,然而边坡稳定设计过程中不可避免地存在诸多不确定性因素,例如荷载不确定性、土体参数不确定性和模型误差等^[2-3],影响边坡稳定的安全性和可靠度。基于安全系数的确定性设计难以合理考虑不确定性因素。近年来,岩土工程设计规范逐渐向基于可靠度设计的方法转变^[4-7]。相对而言,可靠度设计方法能够合理地考虑岩土工程中的多种不确定性。由于岩土工程确定性设计安全判据(即安全系数标准值 F_{Sk} 大于或等于允许安全系数 F_{sa})与可靠度设计安全判据(即失效概率 P_f 小于或等于目标失效概率 P_T)不同,根据两种设计方法得到的设计可行域可能不一致(即两种设计方法安全判据不等价),使得岩土工程设计方法难以平稳地向可靠度设计发展。

为了研究确定性设计与可靠度设计之间的联系,陈祖煜等^[8-11]提出了基于相对安全率的判别准则,相对安全率为合理地比较确定性设计安全判据与可靠度设计安全判据提供了有效工具。在安全系数服从正态或对数正态分布条件下,陈祖煜等^[8-11]定义了相对安全率,包括安全系数相对安全率与可靠指标相对安全率,并基于相对安全率,提出了确定性设计与可靠度设计安全判据等价性判别准则:当可靠指标相对安全率与安全系数相对安全率相等时,确定性设计与可靠度设计安全判据具有等价关系。基于二者等价关系,在给定目标可靠度条件下标定允许安全系数,能够保证满足确定性设计要求的设计方案同时满足可靠度设计要求,构建了确定性设计安全判据与可靠度设计安全判据的等价关系,使得采用两种安全判据得到的设计可行域相同。相对安全率已成功应用于重力坝抗滑稳定^[8]、重力式挡土墙抗滑稳定^[9-10]、土石坝坝坡稳定^[11]等工程结构的安全判据标定。

为了使相对安全率具有普适性,在相对安全率判别准则的基础上,李典庆等^[12]提出了安全系数服从任意概率分布时的广义可靠指标相对安全率 η_{GR} ,证明了其与可靠指标相对安全率的理论关系,克服了相对安全率在分布类型上的局限性,拓宽了相对安全率准则的应用范围。基于 η_{GR} ,确定性设计与可靠度设计安全判据等价性判别准则为:基于两种安全判据得到的设计可行域相同。广义可靠指标相对安全率已被应用于挡土墙抗滑稳定分析,根据目标可靠度指标 β_T (或目标失效概率 P_T)标定了挡土墙抗滑稳定允许安全系数。周强等^[13]进一步提出了基于广义可靠指标相

对安全率标定允许安全系数的方法和流程,并应用于地基承载力安全判据研究,验证了所提方法在地基承载力允许安全系数标定中的有效性。

上述研究中所涉及的工程结构和设计问题均具有较明确的失效模式。广义可靠指标相对安全率在具有复杂且未知失效模式的岩土工程设计问题(如考虑空间变异性的边坡稳定性设计)中的适用性尚待验证。此外,既有研究中均通过算例结果验证基于广义可靠指标相对安全率的判别准则的适用性,比如通过对比确定性设计与可靠度设计的可行域验证安全判据的等价性。对应广义可靠指标相对安全率的判别准则在不同工程设计问题中适用性及其充分条件缺乏理论探讨,亟需建立满足广义可靠指标相对安全率的判别准则(即确定性设计与可靠度设计的安全判据等价性)的充分条件及其验证方法。

本文将广义可靠指标相对安全率应用于边坡稳定可靠度设计,提出边坡稳定确定设计与可靠度设计的安全判据等价的充分条件。在考虑空间变异性条件下,研究了单层和双层土质边坡稳定确定性设计与可靠度设计的等价关系,验证了广义可靠指标相对安全率在边坡安全判据研究中的有效性以及所提充分条件。

1 广义可靠指标相对安全率

本节首先简要介绍广义可靠指标相对安全率 η_{GR} 。如图1所示,安全系数服从任意概率分布时, η_{GR} 与临界阈值 $F_s=1$ 的距离为 ΔF_s 。根据广义可靠指标相对安全率的定义, F_s 减去 ΔF_s 后小于1的概率为目标失效概率 P_T ,可表达为^[12-13]

$$P[(F_s - \Delta F_s) < 1] = P_T \quad (1)$$

将 $\Delta F_s = h_{GR} - 1$ 代入式(1)得 $P[F_s < \eta_{GR}] = P_T$ 。由此可得广义可靠指标相对安全率为 F_s 的 P_T 分位值,如图1所示。因此, η_{GR} 可表示为

$$\eta_{GR} = \text{CDF}_{F_s}^{-1}(P_T) \quad (2)$$

式中, $\text{CDF}_{F_s}^{-1}(\cdot)$ 为安全系数的累积分布函数 CDF_{F_s} 的逆函数。如图2所示,根据广义可靠指标相对安全率的定义可得以下推论:可靠度设计可行域内的设计方案满足 $P_f \leq P_T$,亦满足 $\eta_{GR} \geq 1$;反之,设计方案满足 $P_f < P_T$,亦满足 $h_{GR} < 1$ 。

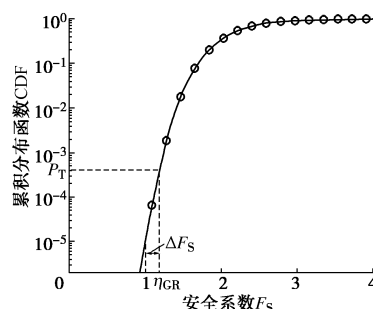
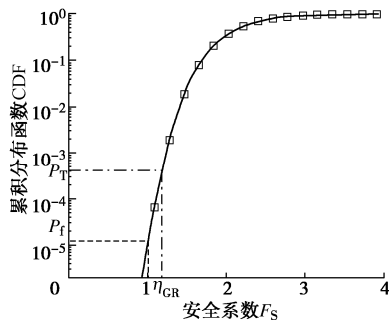


图1 广义可靠指标相对安全率示意图^[12]

Fig. 1 Illustration of generalized reliability ratio of safety margin^[12]

图2 η_{GR} , P_f 和 P_T 的相对关系Fig. 2 Relationship among η_{GR} , P_f and P_T

2 确定性设计和可靠度设计等价性的充分条件及其证明

2.1 确定性设计和可靠度设计的等价性

确定性设计安全判据通过比较安全系数标准值与允许安全系数确定设计可行域, 即^[11]

$$\eta_F = F_{Sk} / F_{Sa} \geq 1 \quad (3)$$

式中: η_F 为安全系数相对安全率; F_{Sk} 为安全系数标准值, 由强度参数取标准值 x_k 计算所得。

可靠度设计安全判据通过比较失效概率与目标失效概率确定设计可行域, 即

$$P_f = P(F_s < 1) = \int p(X|D) \cdot I(F_s < 1) dX \leq P_T \quad (4)$$

式中: X 为随机变量; D 为设计变量; $p(X|D)$ 为给定设计的随机变量联合概率密度函数; I 为指示函数。当安全系数小于 1 时, I 值取为 1, 否则取为 0。由广义可靠指标相对安全率的定义及其推论可知, 可靠度设计的安全判据可表述为

$$\eta_{GR} = CDF_{F_s}^{-1}(P_T) \geq 1 \quad (5)$$

如前所述, 如果基于确定性设计与可靠度设计安全判据得到的设计可行域相同, 则两种安全判据等价。本文基于广义可靠指标相对安全率提出确定性设计与可靠度设计的安全判据等价的充分条件及验证方法。

2.2 充分条件

如果下述两个条件同时成立, 则确定性设计与可靠度设计的安全判据等价 (即两种设计方法的设计可行域相同)。

条件 I: 设计空间 Ω 中存在临界设计 $D = d_c$ 使得安全系数相对安全率 (即 $\eta_F = F_{Sk} / F_{Sa}$) 与广义可靠指标相对安全率 (即 η_{GR}) 均等于 1, 即

$$\eta_{GR}(d_c) = \eta_F(d_c) = F_{Sk}(x_k, d_c) / F_{Sa} = 1 \quad (\exists d_c \in \Omega) \quad (6)$$

条件 II: 设计的安全系数相对安全率 (或者安全系数标准值) 与广义可靠指标相对安全率之间存在单调递增的映射关系, 即

$$\eta_F(d_c) = F_{Sk}(D) / F_{Sa} = F[\eta_{GR}(D)] \quad (\forall D \in \Omega) \quad (7)$$

式中: $F(\cdot)$ 为单调递增函数。所提充分条件 I 和条件 II 如图 3 所示。本文所提确定性设计与可靠度设计安全判据等价性的充分条件, 其充分性主要体现在以下两个方面: ①正向推论 (条件 I 和 II 满足即两种设计方法安全判据可等价): 满足所提充分条件时, 确定性设计与可靠度设计的安全判据等价, 即采用两种设计方法得到的设计可行域相同; ②逆向推论 (两种设计方法可行域不同即无法同时满足条件 I 和 II): 确定性设计与可靠度设计的安全判据不等价时 (即采用两种设计方法得到的设计可行域不相同), 上述充分条件无法同时满足。

本文将在算例中通过考虑空间变异性的单层边坡和双层边坡稳定设计问题分别说明以上两个推论。

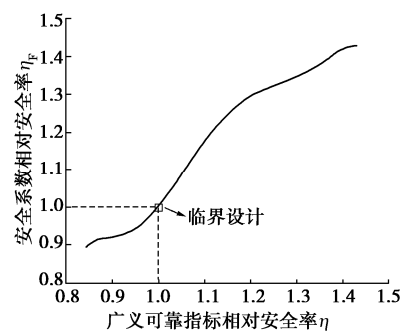


图3 充分条件示意图

Fig. 3 Illustration of proposed sufficient condition

2.3 充分性证明

证明条件 I 和条件 II 的充分性, 即证明式 (6), (7) 同时满足时, 确定性设计与可靠度设计的设计可行域相同, 如下所述。

对于给定允许安全系数, 如果条件 I 成立, 即设计空间中存在 $\eta_F = F_{Sk}(x_k, d_c) / F_{Sa} = 1$ 的临界设计 d_c , 则确定性设计可行域 (Ω_D) 满足

$$F_{Sk}(D|D \in \Omega_D) / F_{Sa} \geq F_{Sk}(x_k, d_c) / F_{Sa} = 1 \quad (8)$$

如果条件 II 同时成立, 由式 (7), (8) 可得

$$\eta_{GR}(D|D \in \Omega_D) \geq \eta_{GR}(x_k, d_c) = 1 \quad (9)$$

由式 (5) 可得, 满足可靠度设计安全判据的设计可行域 Ω_R 为

$$\eta_{GR}(D|D \in \Omega_R) \geq 1 \quad (10)$$

比较式 (9), (10) 可知, 满足确定性设计要求的可行设计必然满足可靠度要求 ($\Omega_D \subseteq \Omega_R$)。

另一方面, 对于给定目标可靠度, 如果条件 I 成立, 即设计空间中存在 $\eta_{GR}(x_k, d_c) = 1$ 的临界设计 d_c , 则可靠度设计可行域 (Ω_R) 满足

$$\eta_{GR}(D|D \in \Omega_R) \geq \eta_{GR}(x_k, d_c) = 1 \quad (11)$$

如果条件 II 同时成立, 由式 (7), (11) 可得

$$F_{Sk}(D|D \in \Omega_R) / F_{Sa} \geq F_{Sk}(x_k, d_c) / F_{Sa} = 1 \quad (12)$$

因此, 满足可靠度设计要求的可行设计方案必然满足

确定性设计要求 ($\Omega_R \subseteq \Omega_D$)。

综上,当条件 I 和条件 II 同时满足时,确定性设计可行域 Ω_D 与可靠度设计可行域 Ω_R 相同,即 $\Omega_R = \Omega_D$ 。

2.4 充分条件的验证方法

对于给定的允许安全系数 F_{sa} , 临界设计的安全系数标准值等于允许安全系数。通过计算临界设计的失效概率确定目标失效概率,则可以满足条件 I。换言之,对于给定的允许安全系数,通过选择对应目标失效概率,充分条件 I 必然可以满足。然而,需要指出的是,在不同的设计问题和工况下,条件 II 未必成立。因此,在给定的设计问题和工况下,需要验证充分条件 II,以确定两种设计方法的等价性是否存在。

本文通过计算边坡广义可靠指标相对安全率与安全系数标准值的相关性验证二者的单调递增关系(即充分条件 II)。选定目标失效概率(例如 10^{-3})计算设计方案的广义可靠指标相对安全率和安全系数标准值,再通过二者的拟合优度判断是否满足充分条件。对于边坡稳定设计问题,可采用随机模拟方法(如直接蒙特卡罗模拟 DMCS)计算不同设计方案的广义可靠指标相对安全率。由于随机模拟存在一定的波动,本文将 0.99 作为判断阈值,当线性拟合优度 R^2 大于 0.99 则认为满足单调性要求。

考虑空间变异性的边坡稳定系统可靠度分析需要搜索安全系数最小的临界滑动面,计算效率较低,可在设计空间中抽取部分可能设计方案验证充分条件,本文采用拉丁超立方抽样(LHS)^[14]选择设计方案。此外,当采用 LHS 方法抽取设计方案时,难以抽到设计空间角点(即设计变量最大值或最小值对应的设计方案)设计方案,为了保证所选设计覆盖整个设计空间,可以额外加上设计空间各角点设计方案。对于抽取的每个设计方案,本文采用子集模拟方法计算其对应的广义可靠指标相对安全率 η_{GR} , 如下节所述。

2.5 基于子集模拟计算 η_{GR}

子集模拟是一种改进的蒙特卡罗模拟方法,其利用中间条件概率自适应地引入中间事件,将小失效概率转化为一列中间条件概率的乘积,即^[15]

$$P_t = P(F) = P(F_m) = P(F_m | F_{m-1})P(F_{m-1}) \\ = \dots = P(F_1) \prod_{i=2}^m P(F_i | F_{i-1}) \quad (13)$$

式中: F 为目标失效事件, P_t 为其失效概率; $F_i = \{F_s \leq f_{s_i}, i = 1, 2, \dots, m\}$ 为中间失效事件,满足 $F = F_m \subset \dots \subset F_2 \subset F_1$; f_{s_i} 为中间失效事件对应的安全系数阈值,满足 $f_s = f_{sm} < f_{sm-1} < \dots < f_{s1}$; m 为中间失效事件个数。

采用子集模拟方法计算 η_{GR} 的过程如下:

(1) 子集模拟第一层为 DMCS, 产生 N 个随机样本并计算它们对应的边坡稳定安全系数 F_s , 按照 F_s 升序排列随机样本。

(2) 选择前 $p_0 N$ 个的样本作为“种子”, 产生下一层样本。

(3) 利用马尔科夫链蒙特卡罗算法产生 $(1-p_0)N$ 个条件随机样本, 与 $p_0 N$ 个“种子”样本组成新一层的样本集, 计算新样本集中 N 个条件样本对应的 F_s , 并按照 F_s 升序排列条件样本。

(4) 重复步骤(2)和(3), 直到随机模拟到达相应的目标失效概率水平, 进而可以计算每个样本的对应的发生概率值, 并通过累加每个样本的概率值计算样本的累积分布函数。其中, 第 t 层中每个样本对应的概率为

$$P_t = \frac{1}{N} \times p_0^{t-1} \quad (t = 1, 2, \dots, m) \quad (14)$$

此外, 根据子集模拟算法以及中间失效事件的定义可计算广义可靠指标相对安全率。第 t 个失效事件(对应第 t 层样本)的概率为

$$P(F_t) = P(F_s < f_{s_t}) = p_0^{t-1} \frac{n}{N} \quad (15)$$

式中, n 为第 t 层样本对应 F_s 值升序序列中 f_{s_t} 对应的位次。根据式(15)和累积分布函数的定义, f_{s_t} 对应的累积分布函数值为 np_0^{t-1}/N 。因此, 根据广义可靠指标相对安全率的定义(见式(5)), 能够得到 η_{GR} 的计算表达式为

$$\eta_{GR} = F_{S(t)}^{(n)} = F_{S(t)}^{(NP_T / p_0^{t-1})} \quad (16)$$

式中: $F_{S(t)}^{(n)}$ 为第 t 层样本对应 F_s 值升序序列中位次为 n 的安全系数值, 即 $F_{S(t)}^{(n)} = f_{s_t}$; n 根据 $np_0^{t-1}/N = P_T$ 计算求得, 即 $n = NP_T / p_0^{t-1}$ 。为了提高子集模拟结果的准确性, 子集模拟需执行至 $n/N \geq p_0$ (即 $P_T / p_0^{t-1} \geq p_0$), 以保证到达目标失效概率水平, 进而根据式(16)计算广义可靠指标相对安全率。例如, 取 $P_T = 10^{-3}$, $N = 2000$, $p_0 = 0.1$ 时, 计算可得 $t = 3$, $n = 200$, $\eta_{GR} = F_{S(3)}^{(200)}$, 即子集模拟第三层中按升序排列的第 200 个安全系数为 η_{GR} 。

3 边坡稳定确定性设计和可靠度设计等价性的验证流程

边坡稳定确定性设计与可靠度设计的等价性验证流程包括以下步骤:

(1) 建立边坡稳定确定性分析模型, 可采用极限平衡法、有限元法等方法计算边坡稳定安全系数。

(2) 确定随机变量(如土体参数和荷载)及其统计特征、设计参数(如边坡高度和坡角)的设计空间。

(3)采用子集模拟方法验证边坡稳定性设计是否满足本文所提充分条件。验证时, 首先确定目标失效概率, 进而计算广义可靠指标相对安全率, 取不确定性参数的某分位值(如 0.2 分位值)计算安全系数标准值。如果验证结果满足充分条件, 则边坡稳定可靠度设计与确定性设计间存在等价关系。

为了进一步验证确定性设计与可靠度设计的等价关系, 需继续执行以下步骤:

(4)依据《规范》选择允许安全系数, 并据此确定临界设计。本文采用响应面法确定临界设计, 首先构建设计变量与安全系数标准值之间的响应面, 然后计算所有设计的安全系数标准值, 取安全系数标准值等于允许安全系数的设计为临界设计。

(5)计算临界设计的失效概率作为边坡稳定可靠度设计的目标失效概率。值得注意的是, 基于允许安全系数标定的目标失效概率与步骤(3)中验证充分条件所采用的目标失效概率无需一致, 本文所提充分条件与验证过程中采用的目标失效概率无关。

(6)比较确定性设计可行域 Ω_D 与可靠度设计可行域 Ω_R 以验证边坡稳定确定性设计与可靠度设计安全判据的等价性, 说明所提充分条件的有效性。

4 算例 I: 单层边坡

本节通过一个单层土质边坡稳定算例^[16]说明基于广义可靠指标相对安全率的边坡稳定可靠度设计与确定性设计的等价性充分条件的正向推论。本算例中边坡稳定确定性分析模型中采用简化毕肖普方法^[17]。如图 4 所示, 单层土质边坡的坡高为 H , 坡角为 α 。

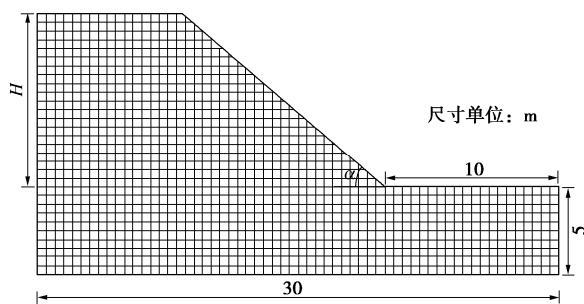


图 4 单层土质边坡示意图

Fig. 4 Schematic diagram of a slope with a single layer

本算例中 H 和 α 为设计变量, 其中 H 为 8.0~10.0 m, 设计方案间隔为 0.2 m; α 为 35.0°~45.0°, 设计方案间隔为 0.5°。因此, 设计空间为 $\Omega = \{(H, \alpha | H=8.0, 8.2, \dots, 10.0 \text{ m}; \alpha = 35.0^\circ, 35.5^\circ, \dots, 45.0^\circ)\}$, 共 231 个设计方案。土体重度 γ 取为 20 kN/m³。黏聚力 c 和内摩擦角 φ 为不确定性参数, 其统计特征如表 1 所示。

计算安全系数标准值时, 不确定性参数取 0.2 分位值。采用指数型自相关函数描述土体抗剪强度参数的空间自相关性^[18], 同时考虑了黏聚力与内摩擦角的互相关性。如图 4 所示, 本算例采用基于乔列斯基分解的中点法离散随机场^[19], 随机场网格单元尺寸为 0.5 m×0.5 m。为了研究空间变异性对单层土质边坡稳定设计的影响, 随机场水平波动范围 δ_h 和竖直波动范围 δ_v 取两种组合, 即 $\delta_h = \delta_v = 10000 \text{ m}$ 以及 $\delta_h = 40 \text{ m}$ 和 $\delta_v = 8 \text{ m}$ 。第一种参数组合 ($\delta_h = \delta_v = 10000 \text{ m}$) 中波动范围远大于模型尺寸, 此时随机场模型近似为随机变量模型, 忽略了空间变异性。

表 1 单层土质边坡土体参数统计特征

Table 1 Schematic diagram of a slope with a single layer						
土体参数	均值	变异系数	分布类型	自相关函数	波动范围	互相关系数
c/kPa	10	0.3	对数正态	指数型	$[\delta_h = \delta_v = 10000 \text{ m}]$	-0.5
$\varphi/(^\circ)$	30	0.2	对数正态		$[\delta_h = 40 \text{ m}, \delta_v = 8 \text{ m}]$	

4.1 充分条件的正向推论验证

采用拉丁超立方抽样方法从设计空间中随机抽取 8 个设计方案(即 D1~D8), 附加 4 个角点设计方案(即 D9~D12)验证充分条件, 如表 2 所示。

表 2 单层边坡代表性设计方案及其计算结果

Table 2 Representative design of a slope with a single layer and their calculated results						
设计方案	设计方案		F_{sk}	$\eta_{GR} (P_T = 10^{-3})$		
	编号	H/m	$\alpha/(^\circ)$	$\delta_h=10000 \text{ m}$ $\delta_v=10000 \text{ m}$	$\delta_h=40 \text{ m}$ $\delta_v=8 \text{ m}$	
LHS 抽取设计方案	D1	9.4	39.3	1.089	0.941	1.008
	D2	8.3	36.5	1.209	1.009	1.120
	D3	8.6	37.9	1.157	0.985	1.073
	D4	8.9	35.1	1.220	1.072	1.128
	D5	8.0	40.7	1.117	0.952	1.038
	D6	10.0	42.1	1.004	0.833	0.930
	D7	9.1	45.0	0.977	0.857	0.907
	D8	9.7	43.6	0.983	0.867	0.912
附加角点设计方案	D9	8.0	35.0	1.267	1.075	1.174
	D10	8.0	45.0	1.025	0.885	0.954
	D11	10.0	35.0	1.179	0.972	1.088
	D12	10.0	45.0	0.944	0.798	0.876

本算例采用子集模拟计算广义可靠指标相对安全率, 子集模拟中 p_0 取 0.1, N 取 2000。验证充分条件时目标失效概率选取为 10^{-3} , 以计算 η_{GR} 。如图 5(a) 和图 5(b) 所示分别为 $\delta_h = \delta_v = 10000 \text{ m}$ 以及 $\delta_h = 40 \text{ m}$ 和 $\delta_v = 8 \text{ m}$ 时 12 个代表性设计方案边坡稳定 F_s 的累积分布图。表 2 汇总了代表性设计方案的安全系数标准值和广义可靠指标相对安全率的计算结果。

图 6 所示为 F_{sk} 与 η_{GR} 之间的变化关系。当 $\delta_h = \delta_v = 10000 \text{ m}$ 时, 设计过程中忽略了空间变异性, F_{sk} 与 η_{GR} 拟合优度为 0.991, 大于本文所设置的阈值 0.99,

满足所提确定性设计与可靠度设计的安全判据等价性充分条件；当 $\delta_h = 40\text{ m}$ ， $\delta_v = 8\text{ m}$ ，设计过程中同时考虑水平和竖向空间变异性， F_{Sk} 与 η_{GR} 拟合优度达0.999，大于本文所设置的阈值0.99，满足所提确定性设计与可靠度设计的安全判据等价性充分条件。上述结果说明单层土质边坡稳定确定性设计与可靠度设计的安全判据之间存在较明确的对应关系，使得两种设计方法对应的可行域相同。

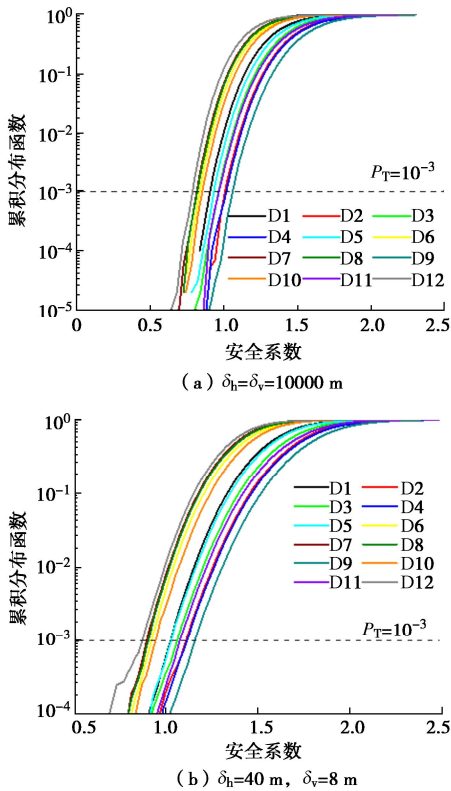


图5 安全系数累积分布图

Fig. 5 Cumulative distribution function of F_S

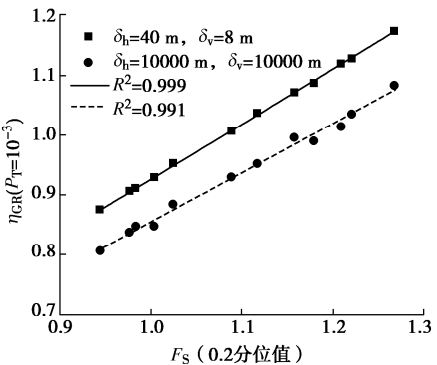


图6 单层边坡代表性设计方案的 F_{Sk} 与 η_{GR} 对比

Fig. 6 Comparison between F_{Sk} and η_{GR} of representative design of soil slope with a single layer

4.2 设计可行域对比

为了完成所提充分条件的正向推论验证，需要对比两种设计安全判据下设计可行域的关系。本文依据

《规范》选取允许安全系数1.05，1.15和1.25分别标定目标失效概率，对比两种设计方法的可行域。为了确定临界设计（即安全系数标准值等于允许安全系数的设计方案），根据表2中已经计算的12个代表性设计方案的安全系数标准值构建 F_{Sk} 的响应面如下：

$$F_{Sk} = 3.6327 - 0.1329H - 0.0642\alpha + 0.0042H^2 + 3.7379 \times 10^{-4}\alpha H + 4.6270 \times 10^{-4}\alpha^2 \quad (17)$$

式(17)与简化毕肖普法计算的 F_{Sk} 之间的拟合优度 R^2 为0.999，表明其具有足够的准确性。根据式(17)计算设计方案的 F_{Sk} 并确定临界设计，如表3所示。

表3 单层土质边坡目标失效概率标定结果

Table 3 Target failure probabilities calibrated for soil slope example with a single layer

随机场参数	F_{Sa}	临界设计		$P_T = P_f$
		H/m	$\alpha/(\text{^\circ})$	
$\delta_h = \delta_v = 10000\text{ m}$	1.05	9.4	40.9	1.39×10^{-2}
$\delta_h = 40\text{ m}, \delta_v = 8\text{ m}$				1.29×10^{-3}
$\delta_h = \delta_v = 10000\text{ m}$	1.15	8.6	38.2	1.51×10^{-3}
$\delta_h = 40\text{ m}, \delta_v = 8\text{ m}$				4.38×10^{-5}
$\delta_h = \delta_v = 10000\text{ m}$	1.25	8.0	35.7	1.50×10^{-4}
$\delta_h = 40\text{ m}, \delta_v = 8\text{ m}$				5.21×10^{-7}

确定临界设计后，采用子集模拟算法计算其失效概率作为目标失效概率(见表3)。对于设计空间中231个设计方案，由式(17)计算各设计方案的安全系数标准值，并根据允许安全系数确定性设计可行域。采用表3中的目标失效概率分别对12个代表性设计方案进行可靠度分析，计算 η_{GR} ，构建 η_{GR} 与设计参数之间的响应面。 $F_{Sa} = 1.25$ 时，式(18)，(19)分别表示忽略和考虑空间变异性条件下的 η_{GR} 的响应面：

$$\eta_{GR} = 2.8473 - 0.1924H - 0.0281\alpha + 0.0094H^2 - 3.5144 \times 10^{-4}\alpha H + 1.5387 \times 10^{-4}\alpha^2 \quad (18)$$

$$\eta_{GR} = 3.9001 - 0.1141H - 0.1014\alpha + 0.0013H^2 + 1.5771 \times 10^{-3}\alpha H + 8.5911 \times 10^{-4}\alpha^2 \quad (19)$$

式(18)，(19)对应的 η_{GR} 响应面拟合优度分别为0.996和0.994，说明所构建的响应面具有较高准确性。同理，在另外两组允许安全系数对应目标失效概率下，可得到不考虑和考虑空间变异性时广义可靠指标相对安全率与设计参数的响应面。根据响应面求得所有设计方案的 η_{GR} ，确定 $\eta_{GR} \geq 1$ 对应的可靠度设计可行域。

图7对比了忽略空间变异性条件下(即 $\delta_h = \delta_v = 10000\text{ m}$)不同允许安全系数对应的确定性设计可行域(灰色阴影)与可靠度设计可行域(红色方形)。忽略空间变异性条件下单层土质边坡稳定确定性设计可行域与可靠度设计可行域基本相同，说明确定性设计与可靠度设计的安全判据等价关系以及所提充分条件的有效性。考虑空间变异性时($\delta_h = 40\text{ m}$ ， $\delta_v = 8\text{ m}$)

计算结果相似, 单层土质边坡稳定确定性设计可行域与可靠度设计可行域基本相同, 如图 8 所示。此外, 如表 3 所示, 对于给定的允许安全系数 (如 1.05), 考虑空间变异性时, 标定所得目标失效概率 (即 1.29×10^{-3}) 小于忽略空间变异性时标定的结果 (即 1.39×10^{-2})。因此, 考虑空间变异性条件下, 相同的 F_{Sa} 对应的目标可靠度水平更高。

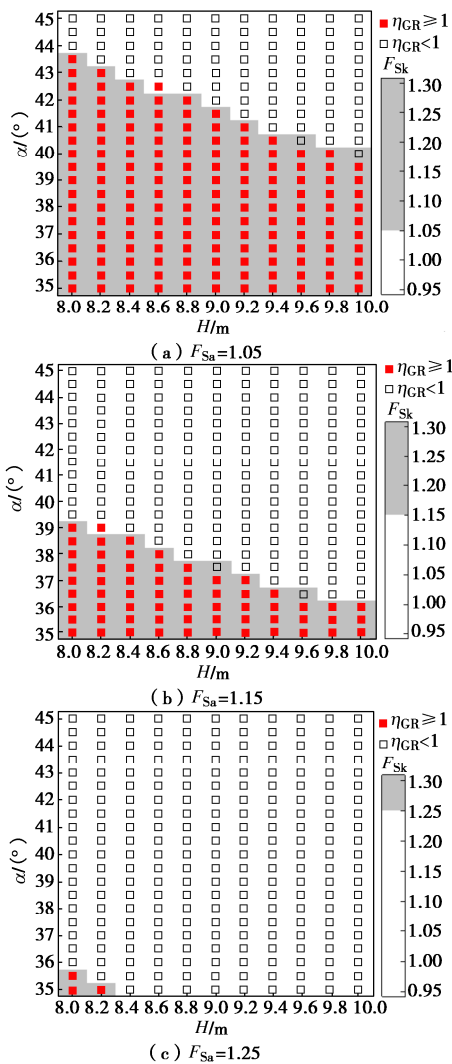


图 7 确定性设计与可靠度设计可行域对比 ($\delta_h = \delta_v = 10000$ m)

Fig. 7 Comparison of feasible design domains between deterministic design and RBD ($\delta_h = \delta_v = 10000$ m)

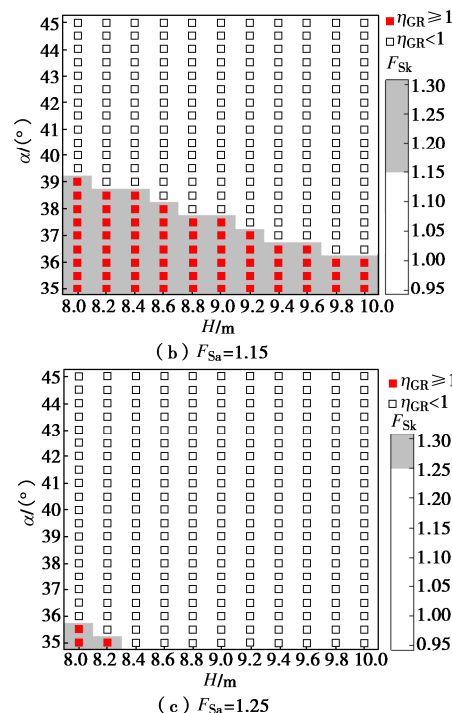
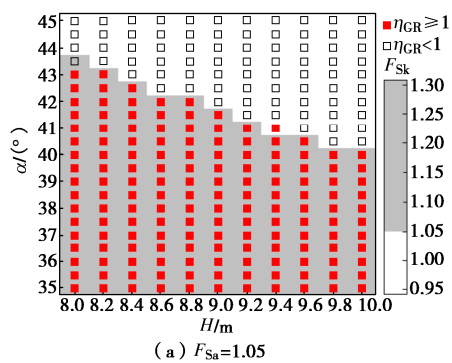


图 8 确定性设计与可靠度设计可行域对比 ($\delta_h = 40$ m $\delta_v = 8$ m)

Fig. 8 Comparison of feasible design domains between deterministic design and RBD ($\delta_h = 40$ m, $\delta_v = 8$ m)

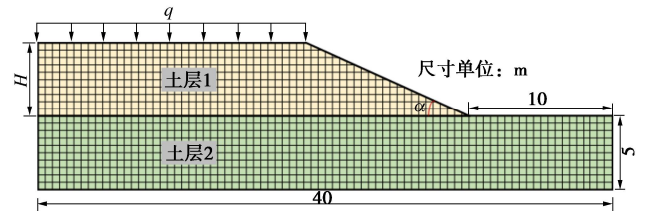


图 9 双层土质边坡示意图

Fig. 9 Schematic diagram of a soil slope with two layers

5 算例 II：双层边坡

第 4 节采用单层土质边坡说明了所提充分条件的正向推论。本节采用的双层土质边坡算例说明所提充分条件的逆向推论, 即确定性设计与可靠度设计可行域不相同无法满足所提充分条件。通过一个双层土质边坡算例进一步探讨基于广义可靠指标相对安全率的边坡稳定确定性设计与可靠度设计的安全判据等价性问题, 边坡稳定确定性分析模型中采用简化毕肖普方法计算边坡稳定安全系数。如图 9 所示, 双层土质边坡坡高为 H , 坡角为 α ^[20]。

本算例中 H 和 α 为设计变量, 其中 H 为 4.0~5.0 m, 设计方案间隔为 0.1 m; α 为 $16.0^\circ \sim 26.5^\circ$, 设计方案间隔为 0.5° 。因此, 设计空间为 $\Omega = \{(H, \alpha | H = 4.0, 4.1, \dots, 5.0 \text{ m}; \alpha = 16.0^\circ, 16.5^\circ, \dots, 26.5^\circ)\}$, 共计 242 个设计方案。土体重度为确定性参数, 上层土的重度 γ_1 为 19 kN/m³, 下层土的重度 γ_2 为 20 kN/m³。上下层土体的黏聚力 c 、内摩擦角 φ 以及顶部荷载 q 为不确定性参数, 它们的统计特征如表 4 所示。计算

表 4 双层边坡不确定性参数统计特征

Table 4 Statistics of uncertainty parameters of two-layer slope

土坡中不确定参数		均值	变异系数	分布类型	自相关函数	波动范围	互相关系数
土层I	c_1/kPa	5	0.3	对数正态		$[\delta_h = 20\text{ m}, \delta_v = 2\text{ m}]$	-0.5
	$\varphi_1/(^\circ)$	30	0.2	对数正态	指数型	$[\delta_h = 20\text{ m}, \delta_v = 0.5\text{ m}]$	
土层II	c_2/kPa	30	0.3	对数正态		$[\delta_h = \delta_v = 10000\text{ m}]$	—
荷载	$q/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-1})$	20	0.1	对数正态	—		—

表 5 双层边坡代表性设计方案及其计算结果

Table 5 Representative design of slope with two layers and their calculated results

设计 方案	设计方案			F_{Sk}	$\eta_{GR} (P_T = 10^{-3})$		
	编号	H/m	$\alpha/(^\circ)$		$\delta_h = 20\text{ m } \delta_v = 2\text{ m}$	$\delta_h = 20\text{ m } \delta_v = 0.5\text{ m}$	$\delta_h = 10000\text{ m } \delta_v = 10000\text{ m}$
LHS 抽 取计 方案	D1	5.0	23.4	1.161	0.976	1.115	0.656
	D2	4.3	16.1	1.406	1.220	1.341	0.805
	D3	4.7	22.0	1.228	1.052	1.174	0.697
	D4	4.9	19.1	1.246	1.071	1.194	0.716
	D5	4.6	25.0	1.211	1.009	1.132	0.688
	D6	4.0	17.6	1.433	1.226	1.364	0.815
	D7	4.2	26.5	1.273	1.045	1.183	0.730
	D8	4.4	20.6	1.304	1.090	1.225	0.738
附加角 点设计 方案	D9	4.0	16.0	1.467	1.255	1.403	0.849
	D10	4.0	26.5	1.316	1.065	1.205	0.714
	D11	5.0	16.0	1.298	1.149	1.259	0.782
	D12	5.0	26.5	1.129	0.967	1.073	0.650

安全系数标准值时，不确定性参数取 0.2 分位值。采用单指数型自相关函数描述土体抗剪强度参数的空间相关性，上层土考虑了黏聚力与内摩擦角之间的互相关性。如图 9 所示，采用基于乔列斯基分解的中点法离散随机场，随机场网格单元尺寸为 0.5 m×0.5 m。为了研究空间变异性对双层土质边坡稳定确定性设计与可靠度设计安全判据等价性设计的影响，随机场水平波动范围和竖直波动范围取 3 种组合，即 $\delta_h = 20\text{ m}$ ， $\delta_v = 2\text{ m}$ ； $\delta_h = 20\text{ m}$ ， $\delta_v = 0.5\text{ m}$ 以及 $\delta_h = \delta_v = 10000\text{ m}$ 。

5.1 设计可行域对比

与单层边坡算例相同，采用 12 个代表性设计方案验证充分条件，包括采用拉丁超立方抽样从设计空间中随机抽取的 8 个设计样本（即 D1~D8）和 4 个设计空间角点（即 D9~D12），如表 5 所示。依据《规范》选取允许安全系数为 1.25 标定目标失效概率，对比两种设计方法的可行域。为了确定临界设计，首先计算 12 个代表性设计方案的 F_{Sk} 值（见表 5），构建 F_{Sk} 与设计参数之间的响应面：

$$F_{Sk} = 3.1620 - 0.4089H - 0.0381\alpha + 0.0298H^2 - 0.0018\alpha H + 7.2496 \times 10^{-4} \alpha^2 \quad (20)$$

式（20）与简化毕肖普法计算的 F_{Sk} 之间的拟合优度为 0.999。根据响应面计算设计方案的 F_{Sk} 值，并确定临界设计为坡高 $H = 5.0\text{ m}$ 和坡角 $\alpha = 18.1^\circ$ ，取其失效概率为目标失效概率，如表 6 所示。

对于设计空间中的 242 个设计方案，由式（20）计算其安全系数标准值，并允许安全系数确定性设计

可行域。基于子集模拟对 12 个代表性设计方案进行可靠度分析，根据目标失效概率计算 η_{GR} 。本算例中子集模拟参数 p_0 取 0.1， N 取 2000， η_{GR} 的计算结果见表 5，并构建 η_{GR} 与设计参数之间的响应面， $\delta_h = 20\text{ m}$ 和 $\delta_v = 2\text{ m}$ ， $\delta_h = 20\text{ m}$ 和 $\delta_v = 0.5\text{ m}$ 以及 $\delta_h = \delta_v = 10000\text{ m}$ 对应的响应面分别为

$$\eta_{GR} = 2.5163 - 0.2437H - 0.0521\alpha + 0.0154H^2 - 5.9418 \times 10^{-5} \alpha H + 8.3681 \times 10^{-4} \alpha^2 \quad (21)$$

$$\eta_{GR} = 2.4686 - 0.2967H - 0.0345\alpha + 0.0145H^2 + 2.1738 \times 10^{-3} \alpha H + 2.4880 \times 10^{-4} \alpha^2 \quad (22)$$

$$\eta_{GR} = 3.1098 - 0.42542H - 0.0685\alpha + 0.0360H^2 - 8.5946 \times 10^{-4} \alpha H + 1.3556 \times 10^{-3} \alpha^2 \quad (23)$$

响应面拟合优度分别为 0.997，0.997，0.993，说明其有精度较高。据此求得设计空间所有设计方案的 η_{GR} ，从而确定可靠度设计可行域。

表 6 双层土质边坡目标失效概率标定结果

Table 6 Target failure probabilities calibrated from a soil slope with two layers

随机场参数	F_{Sa}	临界设计		$P_T = P_f$
		H/m	$\alpha/(^\circ)$	
$\delta_h = 20\text{ m}, \delta_v = 2\text{ m}$	1.25	5.0	18.1	6.41×10^{-5}
$\delta_h = 20\text{ m}, \delta_v = 0.5\text{ m}$				4.10×10^{-8}
$\delta_h = \delta_v = 10000\text{ m}$				3.65×10^{-2}

图 10（a）~（c）分别对比了不同随机场模型参数取值条件下确定性设计可行域与可靠度设计可行域，发现确定性设计可行域（灰色阴影）与可靠度设计可行域（红色方形）差异较大，说明双层土质边坡

确定性设计与可靠度设计的安全判据不具有明确的对应关系, 难以建立二者的等价关系。

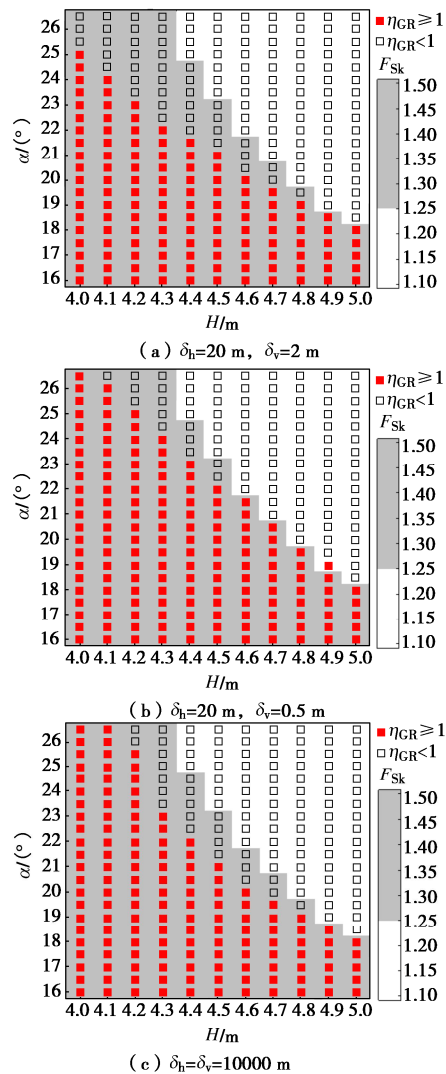


图 10 确定性设计与可靠度设计可行域对比

Fig. 10 Comparison of feasible design domains between deterministic design and RBD

5.2 充分条件的逆向推论验证

双层土质边坡稳定确定性设计与可靠度设计可行域不一致, 说明两种设计方法的安全判据不等价, 则本算例无法满足所提等价性充分条件。为了进一步说明该问题, 本文验证了 F_{Sk} 与 η_{GR} 之间是否存在单调的映射关系, 即充分条件 II 是否满足。图 11 所示为考虑不同空间变异性条件下 12 个设计方案的 F_{Sk} 与 η_{GR} 之间的变化关系, 当 $\delta_h = 20\text{ m}$, $\delta_v = 2\text{ m}$ 时, F_{Sk} 与 η_{GR} 之间的拟合优度为 0.917 (见蓝色方形); 当 $\delta_h = 20\text{ m}$, $\delta_v = 0.5\text{ m}$ 时, F_{Sk} 与 η_{GR} 之间的拟合优度为 0.959 (见橙色三角形); 当 $\delta_h = \delta_v = 10000\text{ m}$ 时, F_{Sk} 与 η_{GR} 之间的拟合优度为 0.914 (见红色圆形)。结果表明: 考虑空间变异性条件下, 双层土坡 F_{Sk} 与 η_{GR} 之间的拟合优度均小于阈值 0.99。因此, 本算例无法满足充分条件 II, 至此完成充分条件的逆向推论的验证。

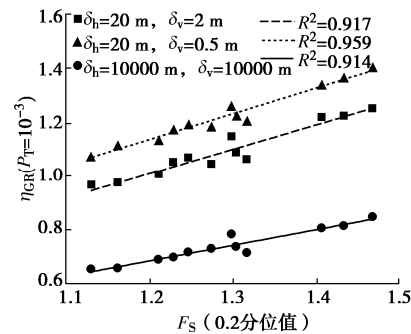


图 11 双层土坡代表性设计方案的 F_{Sk} 与 η_{GR} 对比

Fig. 11 Comparison between F_{Sk} and η_{GR} of representative designs of soil slope with two layers

6 结 论

本文基于广义可靠指标相对安全率提出了边坡稳定确定性设计与可靠度设计的安全判据等价性充分条件以及验证方法。在给定允许安全系数条件下标定目标失效概率, 对比确定性设计与可靠度设计的可行域, 分别探讨了单层和双层土质边坡稳定确定性设计与可靠度设计安全判据的等价关系。通过单层边坡稳定设计说明了所提充分条件的正向推论, 即满足充分条件时两种设计方法得到的设计可行域相同; 通过双层边坡稳定设计说明了所提充分条件的逆向推论, 即两种设计方法的设计可行域不同时不能满足所提充分条件。

(1) 广义可靠指标相对安全率适用于边坡稳定设计。边坡稳定确定性设计与可靠度设计安全判据的等价性需要满足一定的充分条件, 根据所提充分条件能够有效判断两种设计方法安全判据的等价性。

(2) 土体空间变异性不影响单层土质边坡稳定确定性设计与可靠度设计安全判据的等价性, 考虑空间变异性 ($\delta_h = 40\text{ m}$, $\delta_v = 8\text{ m}$) 和忽略空间变异性 (即 $\delta_h = \delta_v = 10000\text{ m}$) 的单层土质边坡稳定确定性设计与可靠度设计安全判据均存在明确的对应关系。此外, 与忽略空间变异性相比, 考虑空间变异性条件下 F_{Sa} 对应的目标可靠度水平更高。换言之, 为了达到相同的安全裕幅, 忽略空间变异性可能导致低估可靠度设计所需的目标可靠度水平。

(3) 随着土体参数空间变异性增强 (空间自相关性减弱), 确定性设计与可靠度设计安全判据的相关性增强。然而, 考虑空间变异性 ($\delta_h = 20\text{ m}$, $\delta_v = 2\text{ m}$; $\delta_h = 20\text{ m}$, $\delta_v = 0.5\text{ m}$) 和忽略空间变异性 (即 $\delta_h = \delta_v = 10000\text{ m}$) 的双层土质边坡均不满足所提充分条件, 确定性设计与可靠度设计的安全判据之间不存在等价关系。

参考文献:

[1] 水利水电工程边坡设计规范: SL 386—2007[S]. 北京: 中国水利水电出版社, 2007. (Design Code for Engineered Slopes in Water Resources and Hydropower Projects: SL

- 386—2007[S]. Beijing: China Water & Power Press Press, 2007. (in Chinese))
- [2] BAECHER G B, CHRISTIAN J T. Reliability and Statistics in Geotechnical Engineering[M]. Chichester: Wiley, 2003.
- [3] CAO Z J, WANG Y, LI D Q. Site-specific characterization of soil properties using multiple measurements from different test procedures at different locations—A Bayesian sequential updating approach[J]. Engineering Geology, 2016, **211**: 150-161.
- [4] CHING J, PHOON K K, YANG J J. Role of redundancy in simplified geotechnical reliability-based design—A quantile value method perspective[J]. Structural Safety, 2015, **55**: 37-48.
- [5] GONG W P, JUANG C H, KHOSHNEVISAN S, et al. R-LRFD: load and resistance factor design considering robustness[J]. Computers and Geotechnics, 2016, **74**: 74-87.
- [6] 蒋水华, 刘 贤, 黄发明, 等. 基于一阶逆可靠度方法的空间变异土坡坡角设计[J]. 岩土工程学报, 2021, **43**(7): 1245-1252. (JIANG Shuihua, LIU Xian, HUANG Faming, et al. Reliability-based design of slope angles for spatially varying slopes based on inverse first-order reliability method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2021, **43**(7): 1245-1252. (in Chinese))
- [7] WANG Y. MCS-based probabilistic design of embedded sheet pile walls[J]. Georisk: Assessment and Management of Risk for Engineered Systems and Geohazards, 2013, **7**(3): 151-162.
- [8] 陈祖煜, 徐佳成, 孙 平, 等. 重力坝抗滑稳定可靠度分析: (一)相对安全率方法[J]. 水力发电学报, 2012, **31**(3): 148-159. (CHEN Zuyu, XU Jiacheng, SUN Ping, et al. Reliability analysis on sliding stability of gravity dams: part I, an approach using criterion of safety margin ratio[J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2012, **31**(3): 148-159. (in Chinese))
- [9] 陈祖煜, 詹成明, 姚海林, 等. 重力式挡土墙抗滑稳定分析安全判据和标准[J]. 岩土力学, 2016, **37**(8): 2129-2137. (CHEN Zuyu, ZHAN Chengming, YAO Hailin, et al. Safety criteria and standards for stability analysis of gravity retaining walls[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, **37**(8): 2129-2137. (in Chinese))
- [10] 陈祖煜, 黎康平, 李 旭, 等. 重力式挡土墙抗滑稳定容许安全系数取值标准初探[J]. 岩土力学, 2018, **39**(1): 1-10. (CHEN Zuyu, LI Kangping, LI Xu, et al. A preliminary study of allowable factor of safety in gravity retaining wall stability analysis[J]. Rock and Soil Mechanics, 2018, **39**(1): 1-10. (in Chinese))
- [11] 陈祖煜. 建立在相对安全率准则基础上的岩土工程可靠度分析与安全判据[J]. 岩石力学与工程学报, 2018, **37**(3): 521-544. (CHEN Zuyu. Reliability analysis and safety criterion in geotechnical engineering based on the index of safety margin[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2018, **37**(3): 521-544. (in Chinese))
- [12] 李典庆, 周 强, 曹子君. 基于广义可靠指标相对安全率的岩土工程设计安全判据[J]. 岩土力学, 2019, **40**(10): 3977-3986. (LI Dianqing, ZHOU Qiang, CAO Zijun. Safety criteria for geotechnical design based on generalized reliability ratio of safety margin[J]. Rock and Soil Mechanics, 2019, **40**(10): 3977-3986. (in Chinese))
- [13] 周 强, 黎康平, 段亚辉, 等. 基于广义可靠指标相对安全率的地基承载力安全判据研究[J]. 岩土力学, 2020, **41**(6): 2052-2062. (ZHOU Qiang, LI Kangping, DUAN Yahui, et al. Safety criteria for bearing capacity of foundation based on the generalized reliability ratio of safety margin[J]. Rock and Soil Mechanics, 2020, **41**(6): 2052-2062. (in Chinese))
- [14] 蒋水华, 李典庆, 周创兵. 基于拉丁超立方抽样的边坡可靠度分析非侵入式随机有限元法[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(增刊 2): 70-76. (JIANG Shuihua, LI Dianqing, ZHOU Chuangbing. Non-intrusive stochastic finite element method for slope reliability analysis based on Latin hypercube sampling[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(S2): 70-76. (in Chinese))
- [15] AU S K, BECK J L. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2001, **16**(4): 263-277.
- [16] LI D Q, XIAO T, CAO Z J, et al. Enhancement of random finite element method in reliability analysis and risk assessment of soil slopes using Subset Simulation[J]. Landslides, 2016, **13**(2): 293-303.
- [17] BISHOP A W. The use of the slip circle in the stability analysis of slopes[J]. Géotechnique, 1955, **5**(1): 7-17.
- [18] 蒋水华, 李典庆, 周创兵, 等. 考虑自相关函数影响的边坡可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(3): 508-518. (JIANG Shuihua, LI Dianqing, ZHOU Chuangbing, et al. Slope reliability analysis considering effect of autocorrelation functions[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(3): 508-518. (in Chinese))
- [19] LI D Q, JIANG S H, CAO Z J, et al. A multiple response-surface method for slope reliability analysis considering spatial variability of soil properties[J]. Engineering Geology, 2015, **187**: 60-72.
- [20] XIAO T, LI D Q, CAO Z J, et al. Full probabilistic design of slopes in spatially variable soils using simplified reliability analysis method[J]. Georisk: Assessment and Management of Risk for Engineered Systems and Geohazards, 2017, **11**(1): 146-159.