

DOI: 10.11779/CJGE20220734

基于贝叶斯高斯过程回归与模型选择的岩石单轴抗压强度估计方法

宋 超, 赵腾远*, 许 领

(西安交通大学人居环境与建筑工程学院, 陕西 西安 710049)

摘要: 为构建间接估计岩石单轴抗压强度 (UCS) 的最优模型并实现 UCS 的合理估计, 提出了贝叶斯高斯过程回归 (fB-GPR) 方法。fB-GPR 综合了高斯过程回归、贝叶斯理论与马尔科夫链蒙特卡洛模拟。所提方法与其它模型选择方法进行了对比, 如赤池信息准则、贝叶斯信息准则、偏差信息准则、Kullback 信息准则等。研究结果表明: 基于 fB-GPR 的最优模型选择结果更为准确, 预测结果与实际情况吻合度更高; 100 次随机试验中, fB-GPR 方法将 M-7 选为最优模型的概率达到 100%, 最优模型选择的准确率远远高于其他模型选择方法; fB-GPR 方法在误差值达到 UCS 标准差的 50% 时, 仍可准确地进行模型选择, 说明 fB-GPR 的准确性和鲁棒性更好, 受 UCS 测量误差影响相对较小。研究成果可为构建岩土工程中关键参数预测的最优模型并实现合理预测提供借鉴与参考。

关键词: 岩土参数刻画; 贝叶斯理论; 数据驱动模型构建; 信息准则; 机器学习方法

中图分类号: TU45 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2023)08-1664-10

作者简介: 宋 超(1993—), 女, 博士研究生, 主要从事岩土工程数据分析与机器学习建模方向的研究工作。E-mail: song_chao@stu.xjtu.edu.cn。

Estimation of uniaxial compressive strength based on fully Bayesian Gaussian process regression and model selection

SONG Chao, ZHAO Tengyuan, XU Ling

(School of Human Settlements and Civil Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: In order to establish an optimal model for estimating the uniaxial compressive strength (UCS) of rocks as well as its reasonable estimation, a fully Bayesian Gaussian process regression method (fB-GPR) is proposed by combining the Gaussian process regression (GPR), Bayesian framework and Markov Chain Monte Carlo (MCMC) simulation. The proposed fB-GPR approach is compared with different model selection methods, such as the Akaike information criterion (AIC), Bayesian information criterion (BIC), deviation information criterion (DIC), Kullback information criterion (KIC), etc. The results show that the proposed fB-GPR method performs better than other methods. In 100 random trials, the probability of M-7 being selected as the optimal model by fB-GPR method reaches 100%, and the accuracy of selecting the optimal model is far higher than other model selection methods. When the measurement noise reaches 50% of UCS standard deviation, the proposed fB-GPR can still achieve model selection accurately, which shows that the fB-GPR approach is robust and accurate, and is less affected by the measurement noise associated with UCS, comparing with other model selection methods. The proposed fB-GPR therefore provides a new way for establishing the optimal estimation model as well as reasonable estimation for the key geotechnical parameters in practice.

Key words: characterization of geotechnical parameters; Bayesian theorem; data-driven model development; information criterion; machine learning method

0 引言

岩石单轴抗压强度 (uniaxial compressive strength, UCS) 作为最重要的岩体力学参数之一, 在采矿工程、隧道工程、岩质边坡稳定性等领域发挥着重要作用^[1]。岩石的 UCS 可以通过室内试验直接获取, 但由于其对

岩芯质量要求较高, 且部分岩石易破碎, 很难获得完整的岩样^[2], 工程实践中, 通常通过一些其他岩体参数间

基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目(42107204), 中央高校基本科研业务费专项资金项目(西安交通大学)

收稿日期: 2022-06-09

*通信作者 (E-mail: tyzhao@xjtu.edu.cn)

接估计 UCS, 如点荷载强度指标 I_{s50} 、施密特回弹值 R_L 、纵波波速 v_p 、有效孔隙率 η_e 等^[3-4]。

由于方程形式的限制, 这些经验公式适用范围通常较小。随着人工智能的发展, 机器学习逐渐应用于岩土工程领域^[5-6], 由于其数据驱动、不局限于固定的方程形式等优势, 应用范围更广。例如, Matin 等^[7]提出了基于随机森林利用 I_{s50} 、 R_L 、 v_p 、 η_e 间接估计 UCS; Fattah^[8]基于人工蜂群优化的支持向量回归利用 R_L 间接估计 UCS。这些机器学习方法虽然一定程度上提高了 UCS 估计的准确性, 但由于模型构建过程中需要提前确定预测 UCS 的自变量, 容易导致模型过拟合或欠拟合。因此, 好的 UCS 估计模型往往需要平衡模型的复杂度与拟合程度, 从而选出“最优模型”。

针对如何确定最优估计模型, 国内外学者已开展了大量研究工作。如 Feng 等^[9]通过赤池信息准则 (AIC)、贝叶斯信息准则 (BIC) 以及偏差信息准则 (DIC) 在 4 个备选模型 (线性模型、幂指数模型、指数模型、逻辑回归模型) 中确定了预测岩石变形模量的最优模型; Wu 等^[10]建立了不同地区黏土压缩指数与天然含水率和液塑限的关系模型, 并通过 AIC、BIC 以及均方根误差 RMSE 对所建立的模型进行了比选。尽管上述准则在一定程度上对确定最优模型有所帮助, 但无法给出最优模型所对应的客观合理性及最优模型相比于其它模型量化的可能性大小; 此外, 上述准则在确定最优模型时的影响因素亦未见详细讨论。

综上, 本文提出贝叶斯高斯过程回归方法 (fully Bayesian Gaussian process regression, fB-GPR) 来确定 UCS 的最优估计模型并实现 UCS 的非线性估计。该方法一方面继承了机器学习方法的数据驱动的特点, 突破了方程形式对 UCS 估计的制约; 另一方面通过贝叶斯方法量化了不同模型的可能性大小, 进而客观确定最优估计模型。相比于其他准则, fB-GPR 在较大的测量误差与较小样本量的情况下仍可准确地进行模型选择。

本文首先介绍了高斯过程回归模型以及贝叶斯模型选择的基本原理; 其次, 对 4 种模型选择方法的计算原理及适用范围进行了概述, 包括 AIC、BIC、DIC 和 KIC。然后, 基于文献[11]中的岩体力学参数数据集, 将各模型选择方法进行了对比验证。最后, 采用模拟数据进一步探讨了 UCS 测量误差以及样本量对模型选择结果的影响, 弥补了这一研究领域的空白。

1 UCS 的贝叶斯高斯过程回归模型

1.1 UCS 的高斯过程回归模型

高斯过程回归 (Gaussian process regression, GPR) 是基于高斯分布的无参随机过程回归。本文目的是利用

GPR 建立岩石指标行向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ 与岩石 UCS 的对应关系, 即 $UCS = f(\mathbf{x}) + \varepsilon$ 。 $f(\mathbf{x})$ 是不考虑残差时 UCS 的预测值; ε 是均值为 0, 标准差为 σ_ε 的高斯随机变量, 用来表示 UCS 数据中所涉及的残差。GPR 中通常假设 UCS 服从均值为零, 协方差 (核函数) 为 $k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + \sigma_\varepsilon^2 \cdot \delta_{i,j}$ 的多维高斯分布^[12], 即

$$UCS \sim GP(0, k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + \sigma_\varepsilon^2 \cdot \delta_{i,j}) \quad (1)$$

式中: \mathbf{x}_i 与 \mathbf{x}_j 分别为岩石指标行向量 \mathbf{x} 的第 i 次与第 j 次测量数据, 均为 $1 \times d$ 的向量; $k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ 为第 i 个与第 j 个输出变量之间的协方差; 若 $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j$, $\delta_{i,j} = 1$, 否则 $\delta_{i,j} = 0$ 。为方便推导, 这里以列向量 \mathbf{y} 表示 UCS 的 n_V 个试验数据, $n_V \times d$ 的矩阵 \mathbf{X} 表示与 \mathbf{y} 对应的 \mathbf{x} 的 n_V 组试验数据, \mathbf{X}^* 表示 m 组 \mathbf{x} 的新数据, 为 $m \times d$ 的矩阵, \mathbf{y}^* 表示与 \mathbf{X}^* 对应的待估计 UCS 值。根据 GPR 中的假设, \mathbf{y} 和 \mathbf{y}^* 的联合分布为^[13]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^* \end{bmatrix} \sim N \left(\mathbf{0}, \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\mathbf{X}, \mathbf{X}} + \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I} & \mathbf{k}_{\mathbf{X}^*, \mathbf{X}}^\top \\ \mathbf{k}_{\mathbf{X}^*, \mathbf{X}} & \mathbf{k}_{\mathbf{X}^*, \mathbf{X}^*} \end{bmatrix} \right) \quad (2)$$

式中: $\mathbf{k}_{\mathbf{X}, \mathbf{X}} + \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}$ 与 $\mathbf{k}_{\mathbf{X}^*, \mathbf{X}^*}$ 分别为 $(n_V \times n_V)$ 与 $(m \times m)$ 的矩阵, 表示 \mathbf{y} 的协方差和未知 \mathbf{y}^* 的协方差; $\mathbf{k}_{\mathbf{X}^*, \mathbf{X}}$ 为 $(m \times n_V)$ 矩阵, 表示 \mathbf{y}^* 和 \mathbf{y} 的协方差矩阵。

基于多维高斯分布的解析特性, 给定 \mathbf{y} 和 \mathbf{X} 条件下, \mathbf{y}^* 的概率分布仍是多维高斯分布, 均值 $\boldsymbol{\mu}^*$ 和协方差 $\boldsymbol{\Sigma}^*$ 可分别表示为^[14]

$$\boldsymbol{\mu}^* = \mathbf{k}_{\mathbf{X}^*, \mathbf{X}} (\mathbf{k}_{\mathbf{X}, \mathbf{X}} + \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{y} \quad , \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^* = \mathbf{k}_{\mathbf{X}^*, \mathbf{X}^*} - \mathbf{k}_{\mathbf{X}^*, \mathbf{X}} (\mathbf{k}_{\mathbf{X}, \mathbf{X}} + \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{k}_{\mathbf{X}, \mathbf{X}^*} \quad . \quad (4)$$

式中, $\boldsymbol{\mu}^*$ 为待预测 UCS 的平均值, $\boldsymbol{\Sigma}^*$ 为利用已知数据 \mathbf{X} 和 \mathbf{y} 更新后的 \mathbf{y}^* 的协方差, 其对角线元素表示与 \mathbf{y}^* 对应的估计方差, 代表估计的不确定性。式 (2) 表示对已知 UCS 数据 \mathbf{y} 与待估计 UCS 数据 \mathbf{y}^* 的基本假设, 而式 (3), (4) 表示基于已知数据 \mathbf{X} 与 \mathbf{y} 对 \mathbf{y}^* 的预测。由式 (3) 可知, 待估计 UCS 是已知数据 \mathbf{y} 的权重叠加, 体现了 GPR 的数据驱动特性, 其中权重系数是协方差的函数, 协方差的计算公式为

$$k_{i,j} = \sigma_f^2 \exp \left[-\sqrt{\sum_{t=1}^d \frac{(x_{i,t} - x_{j,t})^2}{l_t^2}} \right] \quad . \quad (5)$$

式中: $k_{i,j}$ 为第 i 个 UCS 即 UCS_i 与第 j 个 UCS 即 UCS_j 的协方差, 反映了 UCS 间的相关程度; σ_f 为超参数, 反映了核函数的波动程度; l_t 为 UCS 沿 x_t ($t = 1, 2, \dots, d$) 方向的相关性, l_t 越大, UCS 与 x_t 的相关性越小, 反之相关性越强^[12]; $x_{i,t}$ 和 $x_{j,t}$ 分别表示第 t 个输入变量的第 i 次与第 j 次测量数据。令 $\Theta = \{l_t, \sigma_f, \sigma_\varepsilon\}$ ($t = 1, 2, \dots, d$) 表示该 GPR 模型中的超参数, 超参数不同, 会导致预测结果即式 (3), (4) 的不同。

1.2 高斯过程回归模型超参数的贝叶斯估计

本节着重介绍超参数 Θ 的贝叶斯估计。由于贝叶斯方法可以量化多种不确定性, 故本文采用贝叶斯方法估计 Θ , 此外, Θ 的贝叶斯估计也为 1.3 节确定 UCS 估计的最优模型奠定了基础。在贝叶斯理论中, 所有未知参数被当作随机变量。给定岩石指标 \mathbf{X} 的测量数据 \mathbf{x} 和 UCS 的测量数据 \mathbf{y} 以后, 其概率分布 $p(\Theta|D)$ 表示为

$$p(\Theta|D) = \frac{p(D|\Theta)p(\Theta)}{p(D)} \quad (6)$$

式中: $D = \{\mathbf{X}, \mathbf{y}\}$, 根据全概率定理可知, $p(D) = \int p(D|\Theta)p(\Theta)d\Theta$ 为一积分常数; $p(D|\Theta)$ 为似然函数, 表示给定超参数 Θ 下观测到数据 D 的可能性大小; $p(\Theta)$ 为 Θ 的先验分布, 表示在没有试验数据 D 时对 Θ 的了解程度。鉴于 UCS 测量误差间的弱相关性甚至相互独立性, $p(D|\Theta)$ 通常可以表示为^[15]

$$p(D|\Theta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_y} |\mathbf{k}_{X,X} + \sigma_e^2 \mathbf{I}|}} \exp\left[-\frac{\mathbf{y}^T (\mathbf{k}_{X,X} + \sigma_e^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{y}}{2}\right] \quad (7)$$

由于 Θ 为非负超参数, 这里采用对数均匀分布表示其先验分布, $p(\Theta)$ 可表示为

$$p(\Theta) = \prod_{i=1}^{d+2} p(\Theta_i) = \prod_{i=1}^{d+2} \frac{1}{\Theta_i [\ln(\Theta_i^U) - \ln(\Theta_i^L)]} \quad (8)$$

式中, $\Theta_i \in [\Theta_i^L, \Theta_i^U]$ 。 Θ_i^L 和 Θ_i^U 分别表示超参数 Θ_i 的下限与上限。将式(7), (8)代入式(6)即可得到 $p(\Theta|D)$ 。然而, 由于 $p(D|\Theta)$ 与 $p(\Theta)$ 非共轭分布, 导致 $p(\Theta|D)$ 无解析表达式。因此, 引入马尔科夫链蒙特卡洛 (Markov Chain Monte Carlo, MCMC) 方法通过从 $p(\Theta|D)$ 中不断采样进而刻画 Θ 的后验分布^[16-17]。完成 MCMC 采样后即可基于式(3), (4) 以及文献[18]对 UCS 进行预测。

1.3 基于贝叶斯框架的 UCS 预测最优模型选择

如前文所述, 不同的岩石指标均可用来估计岩石的 UCS 值, 如点荷载强度指标 I_{50} 、施密特回弹值 R_L 、纵波波速 v_p 等。不同岩石指标 x 的组合构成不同的 UCS 估计的 GPR 模型。通常, 随着模型自变量 x 数量的增加, GPR 模型的拟合程度提高, 但模型的复杂度也随之增大, 而模型的泛化能力随之下降。因此, 一个好的模型需要在模型的复杂度与拟合程度间达到平衡, 这恰恰是贝叶斯模型选择可以实现的。贝叶斯模型选择通过比较每个模型所对应的概率来确定最优模型。根据贝叶斯定理, 给定试验数据 D 的条件下, 模型 M_s 对应的概率表达式 $P_r(M_s|D)$ 为

$$P_r(M_s|D) \propto p(D|M_s)P_r(M_s) \quad (9)$$

式中: $P_r(M_s)$ 为先验概率, 反映了在未考虑测量数据时对模型的认知情况, 通常认为每个模型被选择的概率相同, 即 $P_r(M_s) = 1/n_M$, n_M 为备选模型的数量。式(9)省去了作为常数的分母。由式(9)可知, $P_r(M_s|D)$ 与似

然函数 $p(D|M_s)$ 成正比。因此, 比较不同模型被选择的概率 $P_r(M_s|D)$ 等价于比较不同模型的似然函数 $p(D|M_s)$ 。故 $p(D|M_s)$ 通常被称为贝叶斯框架下的“模型证据”^[15]。

根据条件概率准则, “模型证据” $p(D|M_s)$ 可表示为

$$p(D|M_s) = \frac{p(D|\Theta_s, M_s)p(\Theta_s|M_s)}{p(\Theta_s|D, M_s)} \quad (10)$$

式中: $\Theta_s = \{l_t, \sigma_t, \sigma_e\}$ ($t = 1, 2, \dots, d_s$) 为 GPR 模型 M_s 超参数的集合; d_s 为模型 M_s 输入变量的个数; $p(D|\Theta_s, M_s)$ 表示给定模型 M_s 以及对应超参数 Θ_s 时的似然函数; $p(\Theta_s|M_s)$ 和 $p(\Theta_s|D, M_s)$ 分别表示模型 M_s 超参数 Θ_s 的先验分布与后验分布。计算“模型证据” $p(D|M_s)$ 等价于计算其对数值 $\ln[p(D|M_s)]$, 且后者数值计算上更加稳定。根据文献[18], $\ln[p(D|M_s)]$ 可表示为

$$\ln[p(D|M_s)] \approx \frac{1}{N_c} \sum_{q=1}^{N_c} \ln \left[p(D|\Theta_s^q, M_s) \right] - \frac{1}{N_c} \sum_{q=1}^{N_c} \left(\ln \frac{p(\Theta_s^q|D, M_s)}{p(\Theta_s^q|M_s)} \right) \quad (11)$$

式中, $p(D|\Theta_s^q, M_s)$, $p(\Theta_s^q|M_s)$ 及 $p(\Theta_s^q|D, M_s)$ 分别为超参数 Θ_s 的第 q 组 MCMC 样本所对应的似然函数、先验分布以及后验分布, 可以分别采用式(7), (8) 以及文献[19]的方法进行计算, N_c 为超参数 Θ_s 的 MCMC 样本数量。

2 UCS 预测最优模型选择方法概述

贝叶斯方法耦合 GPR 可实现 UCS 最优估计模型的确定, 为了对比说明本文所提方法的优越性, 本节介绍了一些其他方法以达到同样的目的, 如前文提到的 AIC、BIC、DIC 以及 KIC, 进而与 GPR 结合构成 AIC-GPR、BIC-GPR、DIC-GPR、KIC-GPR 方法。通过介绍上述 4 种准则确定最优模型的基本原理和假设, 为进一步深入探讨 FB-GPR 方法构建 UCS 最优估计模型提供参考。

2.1 贝叶斯信息准则 BIC

贝叶斯信息准则 BIC 以贝叶斯理论为基础, 结合信息准则从而实现模型选择。BIC 通常假设自变量服从独立同分布, 工程中常用的分布包括均匀分布、正态分布、对数正态分布等, BIC 可根据下式进行计算^[20]:

$$BIC = -2 \ln \hat{L}_s + Q_s \ln n_v \quad (12)$$

式中: $\hat{L}_s = p(D|\hat{\Theta}_s, M_s)$ 为给定模型 M_s 的最大似然函数; $\hat{\Theta}_s$ 为 Θ_s 的后验概率最大时所对应的超参数; Q_s 为模型 M_s 包含的超参数的数量, 反映了模型的复杂程度。理论上, BIC 的值越小, 模型的性能越好, 即在模型的复杂程度相对较低的情况下, 可达到较好的拟合效果。

2.2 赤池信息准则 AIC

赤池信息准则 AIC 通过最小化备选模型的测量值与预测值间的 Kullback-Liebler 散度进行模型选择, 计算

公式如下^[21]:

$$AIC = -2 \ln \hat{L}_s + 2Q_s \quad (13)$$

相比于 BIC, AIC 并未考虑试验样本数量的影响。与 BIC 类似, AIC 的值越小, 模型的泛化性能越好。

考虑到试验条件、时间成本等因素, 往往容易发生样本量不足导致过拟合, 即选出的最优模型考虑的因素过多而使其泛化能力大幅下降。因此, 针对小样本数据提出了修正的赤池信息准则 AICc^[22]:

$$AICc = AIC + \frac{2Q_s(Q_s + 1)}{n_v - Q_s - 1} \quad (14)$$

相比于 AIC, AICc 考虑了样本量对模型选择的影响。当样本量趋于无穷大时, 即样本数量足够多时, AICc 趋近于 AIC。AICc 越小, 表示模型的性能越好。

2.3 偏差信息准则 DIC

以贝叶斯理论和信息准则为基础, Spiegelhalter 等^[23]提出了偏差信息准则 DIC, 计算公式如下^[9]:

$$DIC = \overline{D(\Theta_s)} + p_D, \quad (15)$$

$$p_D = \overline{D(\Theta_s)} - D(\overline{\Theta_s}) \quad (16)$$

式中: 偏差 $D(\Theta_s) = -2 \ln [p(D | \Theta_s, M_s)]$; $D(\overline{\Theta_s}) = \frac{1}{N_c} \sum_{q=1}^{N_c} D(\Theta_s^q)$ 为偏差 $D(\Theta_s)$ 的均值; $D(\overline{\Theta_s}) = D\left(\frac{1}{N_c} \sum_{q=1}^{N_c} \Theta_s^q\right)$ 为 Θ_s 的均值的偏差; p_D 为 DIC 中模型有效参数的数量, 反映模型的复杂程度。

DIC 建立于超参数后验样本基础之上。相比于 AIC 和 BIC 考虑所有输入参数, DIC 计算时仅考虑模型有效参数的数量, 大大提高了计算效率。对于线性模型或层次模型, 模型有效参数的数量等于模型参数的数量。

2.4 Kullback 信息准则

Kullback 信息准则 KIC^[24]通过对测量值与预测值间的 Kullback 对称散度的变体进行非对称无偏估计, 从而达到模型选择的目的。KIC 可根据下式计算:

$$KIC = -2 \ln \hat{L}_s + 3(Q_s + 1) \quad (17)$$

随着超参数数量的增加, KIC 容易将过拟合的模型选出。因此, 针对单变量线性回归模型和自回归模型, Seghouane 等^[25]提出了 KICc, 计算公式如下:

$$KICc = -2 \ln \hat{L}_s + \frac{(Q_s + 1)(3n_v - Q_s - 2)}{n_v - Q_s - 2} + \frac{Q_s}{n_v - Q_s} \quad (18)$$

相比于 KIC, KICc 的模型选择能力有所提高, 且不易发生过拟合。

3 基于实测试验数据的模型选择结果对比分析

为了说明本文所提贝叶斯高斯过程回归 fB-GPR 方

法在 UCS 最优估计模型上的表现, 本节采用实际工程案例进行详细说明, 并与基于其他模型筛选准则的高斯过程回归方法即 AIC-GPR、BIC-GPR、DIC-GPR 以及 KIC-GPR 进行了对比。

3.1 岩性参数数据集概述

本文使用的岩石参数来源于文献[11], 岩样取自中国澳门, 为III级花岗岩。岩性指标包括点荷载强度指标 I_{s50} 、施密特回弹值 R_L 、纵波波速 v_p 、有效孔隙率 η_e 、相对质量密度 G_s 以及岩石单轴抗压强度 UCS。该数据集包含 115 组数据, 其基本统计特征见表 1, 各变量之间的相关性如图 1 所示。由图 1 可知, UCS 与 I_{s50} 、 R_L 以及 v_p 具有较强线性相关性, 与 η_e 、 G_s 相关性较弱。各岩石指标与 UCS 的相关性大小虽然一定程度上能够显示出与 UCS 的关系, 但并不能作为直接确定最优估计模型的依据。

表 1 岩性参数数据集的基本统计特征

Table 1 Basic descriptive statistics of rock index database

参数	UCS/ MPa	$I_{s50}/$ MPa	R_L	$v_p/(m \cdot s^{-1})$	$\eta_e/\%$	G_s
最小值	20.30	1.08	16.80	1160.00	0.64	2.42
平均值	49.65	4.47	42.30	4145.69	2.27	2.57
最大值	91.00	8.19	56.50	5661.00	7.23	2.66
标准值	15.65	1.63	7.51	841.73	1.53	0.05

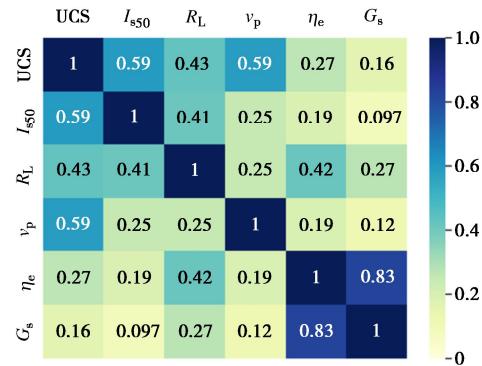


图 1 岩性参数各变量相关关系图

Fig. 1 Pearson correlation coefficient among rock indices

3.2 基于 fB-GPR 的 UCS 估计

为验证 fB-GPR 模型的泛化性能, 将 3.1 节中的数据集划分为两部分: 训练集和验证集, 分别包含 85 组和 30 组岩性参数数据对。基于式(8)计算备选模型的先验分布, 取 $\Theta_i^L = 10^{-5}$, $\Theta_i^U = 10^5$; 根据文献[16, 19]中的方法产生并收集每个高斯过程回归超参数的 MCMC 样本, 样本数量为 5000; 采用收集到的 MCMC 样本构造高斯过程回归超参数的后验分布, 并根据式(11)计算每个备选模型的“模型证据”对数值 $\ln[p(D|M_s)]$, 结合式(9), 可进一步计算得到每个备选模型被选择的概率; 考虑所有输入变量组合的情况,

共包含 31 个 GPR 模型, 如表 2 所示; 对每个 GPR 模型分别重复上述步骤, 计算得到各备选模型的 $\ln[p(D|M_s)]$ 与其相对应的概率, 如表 2 所示; 比较所有备选模型的 $\ln[p(D|M_s)]$, 并选出 $\ln[p(D|M_s)]$ 最大值所对应的备选模型, 即为 UCS 预测的最优模型。由表 2 可以看出, M-7 被选择的概率达到 0.688, 远远大于其他模型被选择的概率。输入新的岩性参数指标, 根据式 (3), (4) 即可对最优模型的 UCS 进行预测, 计算得到的均值即为 UCS 最可能的预测值, 方差体现了预测结果的不确定性。

此外, 这里采用决定系数 R^2 衡量各备选模型对 UCS 的预测性能, 计算公式如下:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n_v} (y_i - \mu_{UCS,i})^2}{\sum_{i=1}^{n_v} (y_i - \mu_y)^2} \quad (19)$$

式中: y_i 和 $\mu_{UCS,i}$ 分别为第 i 个 UCS 的测量值和预测值;

μ_y 为 n_v 个 UCS 测量值的均值。表 2 列出了各备选模型的 R^2 , 可以看出, 训练集中 M-7 的 R^2 达到了 0.89, 模型 M-16、M-19、M-20、M-26、M-27、M-29、M-31 的 R^2 虽然也达到了 0.89, 但与 M-7 相比, 模型中的参数数量增加了 1~3 个, 模型的复杂度有所增加。为验证最优模型 M-7 的泛化性能, 表 2 给出了测试集中 M-7 的 R^2 , 达到了 0.84。图 2 给出了最优模型 M-7 的 UCS 测量值与预测值分布散点图及 fB-GPR 预测的不确定性 (95% 置信区间), 可以看出, 散点均分布在 1:1 线附近。这进一步说明确定 M-7 为最优模型的合理性。此外, 本文进一步统计了图 2 中训练集、验证集中 UCS 的测量值落在 95% 置信区间的百分比, 分别为 75.29% 与 66.67%, 均小于 95%。这说明通过 fB-GPR 方法进行 UCS 预测时, 尽管可以相对准确地预测了 UCS, 但反映预测结果不确定性的标准差是偏小的, 需进一步对该方法进行改进, 以更加准确地对预测结果的不确定性进行量化。

表 2 模型编号及其对应的岩性参数指标

Table 2 Candidate models for model selection and corresponding rock indices

模型编号	I_{s50} /MPa	R_L	v_p /(m·s ⁻¹)	η_e /%	G_s	“模型证据”的对数值	概率	R^2	
								训练集	验证集
M-1	▲					-450.66	3.27×10^{-14}	0.72	0.60
M-2		▲				-468.83	4.19×10^{-22}	0.52	0.49
M-3			▲			-451.09	2.13×10^{-14}	0.69	0.69
M-4				▲		-479.57	9.14×10^{-27}	0.38	0.33
M-5					▲	-486.61	7.94×10^{-30}	0.22	0.19
M-6	▲	▲				-450.14	5.51×10^{-14}	0.75	0.63
M-7	▲		▲			-419.98	0.688	0.89	0.84
M-8	▲			▲		-447.66	6.54×10^{-13}	0.77	0.67
M-9	▲				▲	-450.96	2.42×10^{-14}	0.74	0.62
M-10		▲	▲			-437.88	1.15×10^{-8}	0.80	0.79
M-11	▲			▲		-470.91	5.27×10^{-23}	0.53	0.49
M-12	▲				▲	-471.13	4.21×10^{-23}	0.53	0.49
M-13		▲	▲			-444.98	9.58×10^{-12}	0.82	0.79
M-14		▲			▲	-451.24	1.84×10^{-14}	0.72	0.71
M-15			▲	▲		-481.87	9.14×10^{-28}	0.38	0.34
M-16	▲	▲	▲			-421.69	0.125	0.89	0.84
M-17	▲	▲		▲		-449.34	1.23×10^{-13}	0.78	0.67
M-18	▲	▲			▲	-451.48	1.45×10^{-14}	0.75	0.64
M-19	▲		▲	▲		-421.99	9.21×10^{-2}	0.89	0.84
M-20	▲		▲		▲	-422.43	5.96×10^{-2}	0.89	0.84
M-21	▲			▲	▲	-449.80	7.74×10^{-14}	0.77	0.67
M-22		▲	▲	▲		-440.12	1.24×10^{-9}	0.80	0.79
M-23	▲		▲		▲	-440.40	9.37×10^{-10}	0.80	0.79
M-24	▲		▲	▲	▲	-473.20	5.32×10^{-24}	0.53	0.49
M-25		▲	▲	▲	▲	-447.12	1.13×10^{-12}	0.82	0.80
M-26	▲	▲	▲	▲		-423.83	1.47×10^{-2}	0.89	0.84
M-27	▲	▲	▲		▲	-424.15	1.06×10^{-2}	0.89	0.84
M-28	▲	▲		▲	▲	-451.70	1.16×10^{-14}	0.77	0.67
M-29	▲		▲	▲	▲	-424.35	8.70×10^{-3}	0.89	0.84
M-30	▲	▲	▲	▲	▲	-442.47	1.17×10^{-10}	0.80	0.79
M-31	▲	▲	▲	▲	▲	-426.30	1.23×10^{-3}	0.89	0.84

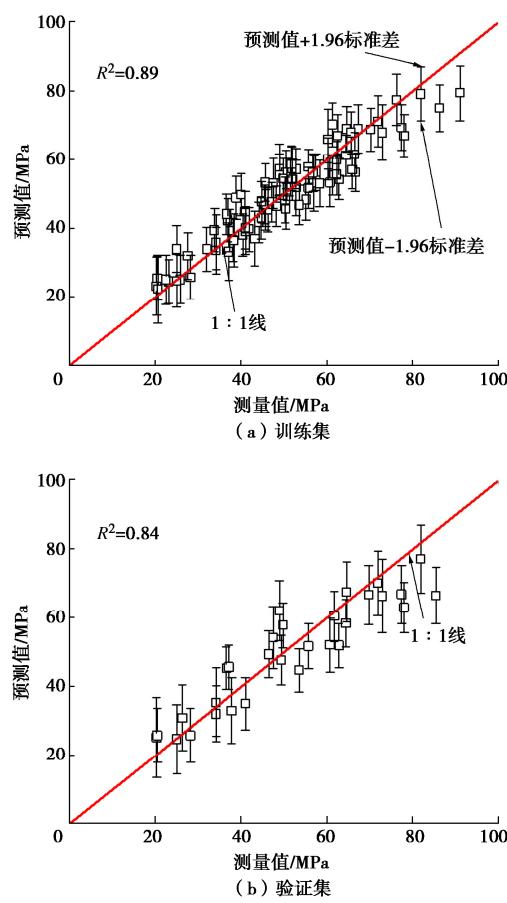


图2 测量值与预测值分布散点图及fB-GPR预测的不确定性

Fig. 2 Scatter plot between measured and predicted UCS and uncertainty of UCS prediction by fB-GPR

3.3 不同模型选择方法测试结果对比分析

为进一步对比不同方法下的 UCS 预测性能及模型选择结果的准确性, 表 3 列出了不同方法在进行 UCS 估计时最优模型及该模型对 UCS 的预测性能。由表 3 可知: 不同方法的模型选择结果有所不同, BIC-GPR、AIC-GPR、AICc-GPR、KIC-GPR 及 KICc-GPR 将同时包含 I_{s50} 、 R_L 和 v_p 的模型确认为最优模型, DIC-GPR 将同时包含 I_{s50} 、 v_p 和 η_e 的模型选为最优模型。这是由于 R_L 与 η_e 对于岩石单轴抗压强度 UCS 的预测同样发挥作用。但随着模型参数的增加, 模型复杂度也同步提高。

表3 不同方法的模型选择结果对比

Table 3 Comparison of model selection results by different methods

方法	I_{s50} /MPa	R_L	v_p /($m \cdot s^{-1}$)	η_e /%	G_s	R^2
文献[11]	▲		▲			0.83
fB-GPR	▲		▲			0.89
BIC-GPR	▲	▲	▲			0.89
AIC-GPR	▲	▲	▲			0.89
AICc-GPR	▲	▲	▲			0.89
DIC-GPR	▲		▲	▲		0.89
KIC-GPR	▲	▲	▲			0.89
KICc-GPR	▲	▲	▲			0.89

然而, 随着模型复杂度的增加, 上述模型的预测能力并未提高, 与 fB-GPR 选出的模型 (仅包含 I_{s50} 和 v_p) 一致, 决定系数 R^2 均为 0.89。同时, 表 3 列出了文献[11] 基于线性假设与变量转换的模型选择结果, 其所涉及变量与 fB-GPR 的模型选择结果相同。相比之下, fB-GPR 方法不需要变量的额外变换, 且预测模型的 R^2 大于文献[11] 中的值。这进一步说明利用 fB-GPR 确定 UCS 最优估计模型的合理性。

3.4 统计特征分析

为检验所提 fB-GPR 方法的适用性, 将真实数据按与前述相同的比例 (训练集包含 85 组, 验证集包含 30 组岩性参数) 随机划分 100 次, 统计各模型选择方法选出的最优模型编号及其被选为最优模型的次数, 如表 4 所示。可以看出, 基于本文所提出的 fB-GPR 方法, 在 100 次训练中模型 M-7 被选为最优模型的次数达到 100, 最优模型选择的准确性远远优于其他模型选择方法。

表4 各模型选择方法选出的最优模型编号及其被选为最优模型的次数统计

Table 4 Number of optimal models selected by each method and number of times selected as the optimal model

模型	fB-GPR	AIC-GPR	AICc-GPR	BIC-GPR	DIC-GPR	KIC-GPR	KICc-GPR
M-7	100	14	18	51	81	29	31
M-16	0	83	80	47	14	69	67
M-19	0	3	2	2	5	2	2

图 3 给出了将真实数据随机划分 100 次, 基于 fB-GPR 方法计算得到的验证集中决定系数 R^2 分布的箱形图。可以看出, 尽管模型 M-16、M-19、M-20、M-26、M-27、M-29、M-31 中的输入变量相比于模型 M-7 有所增加, 模型复杂度增大, 但这些备选模型的 R^2 并未大幅提升, 进一步证明了 M-7 作为最优模型的合理性。

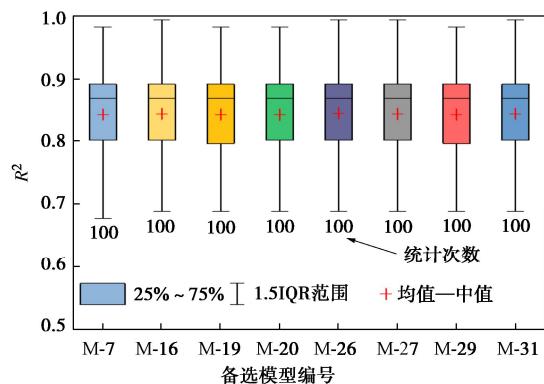


图3 验证集中决定系数 R^2 分布的箱形图

Fig. 3 Box plot of R^2 for testing database

图 4 给出了各模型选择方法选出的次数最多的模型所对应的 R^2 在验证集中的统计特征。可以看出, 各方法选出的最优模型所对应的验证集的 R^2 的均值均在 0.8~

0.9, 说明各方法选出的最优模型均可较为准确地预测 UCS, 同时具有较好的泛化性能。然而, 基于 fB-GPR 方法以外的模型选择方法 (如 AIC-GPR、AICc-GPR、KIC-GPR、KICc-GPR) 所确定的最优模型 M-16 相比于模型 M-7 更为复杂, 但对应模型决定系数 R^2 的统计特征并未明显提升; 尽管在 100 次随机试验中 BIC-GPR 和 DIC-GPR 方法将 M-7 确定为最优模型的概率较大, 分别达到 51% 与 81%, 但 fB-GPR 方法将 M-7 选为最优模型的概率可达到 100%, 模型选择的准确率远远高于 BIC-GPR 和 DIC-GPR 方法。由图 4 还可看出, 基于 KIC-GPR 和 KICc-GPR 方法选定模型的决定系数 R^2 的变化范围相比于 fB-GPR 方法较小, 此现象可能是由于在 100 次随机试验中, 它们确定 M-16 为最优模型的次数只有不到 70 次, 而基于 fB-GPR 方法确定 M-7 为最优模型的次数达到 100 次。图 4 中对应 fB-GPR 的箱形图体现了 100 次 R^2 的统计结果, 而对应 KIC-GPR 和 KICc-GPR 的箱形图体现了不到 70 次 R^2 的统计结果。

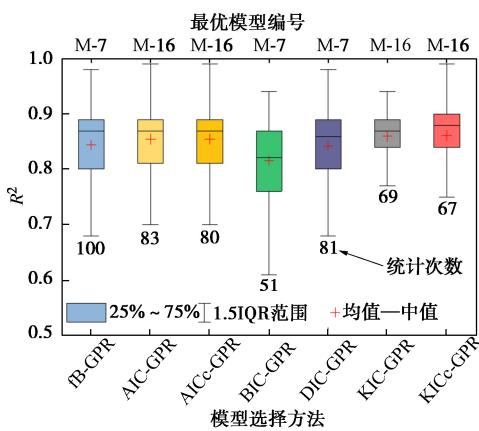


图 4 各模型选择方法选出的次数最多的模型所对应的 R^2 在验证集中的统计特征

Fig. 4 Statistical characteristics of R^2 in testing dataset corresponding to model selected most frequently by each method

4 敏感性分析

由于上述案例基于实测数据, 因此, 基于 fB-GPR 构建的 UCS 最优模型的真实性无法得到验证。为进一步验证各模型选择方法的鲁棒性和准确性, 这里以文献 [11] 中的岩性参数的统计特征为基础, 产生模拟数据进一步分析。该模型主要以 I_{s50} 和 ν_p 作为 UCS 估计变量。此外, 为了对比文中各种方法, 将 R_L 、 η_e 和 G_s 亦作为输入变量。假设各输入变量均服从对数正态分布, 均值和标准差分别为表 1 中统计得到的各岩性参数的均值和标准差。用以生成模拟数据的 UCS 模型如下:

$$\text{UCS} = 5.01I_{s50} + 0.05 \exp(0.0386R_L) +$$

$$5.52 \exp(0.0004\nu_p) - 0.05 \ln(\eta_e) - 0.05G_s - \sigma_e \quad (20)$$

式中, 相比于 I_{s50} 和 ν_p , 其他参数对于模型的贡献很小,

$5.01I_{s50}$, $0.05 \exp(0.0386R_L)$, $5.52 \exp(0.0004\nu_p)$, $0.05 \ln(\eta_e)$ 和 $0.05G_s$ 的标准差分别为 8.166 MPa, 0.067, 7.730 m/s, 0.009% 和 0.003。因此, 考虑模型的复杂度与拟合度, UCS 的最优模型只应包含 I_{s50} 和 ν_p 。以上述模型为基础, 本节探讨了误差值以及样本量对模型选择结果的影响。

4.1 误差值对模型选择结果的影响

在岩石参数测试过程中, 不可避免产生试验误差, 如岩芯尺寸误差、操作误差等。因此, 在产生模拟数据时, 需考虑误差对 UCS 估计值的影响。首先, 考虑误差值为 UCS 标准差的 0, 0.1% (0.015 MPa), 0.2% (0.030 MPa), 0.3% (0.045 MPa), 0.4% (0.060 MPa), 0.5% (0.075 MPa) 时 (工况 1), 模型选择结果的变化规律。设置样本量 $n_V = 100$, 结果如图 5 (a), (b) 所示。由图 5 (a) 可以看出, 当误差值为 0 时, 采用 AIC-GPR、AICc-GPR、BIC-GPR、KIC-GPR 及 KICc-GPR 的方法, 最优模型 M-7 被选择的概率为 0, 而包含所有参数的模型 M-31 被选择的概率相对较高, 分别为 68%, 67%, 67%, 67%, 67% (见图 5 (b))。分析认为, 由于上述方法在进行模型选择时, 只要输入变量对模型略有贡献, 就倾向于将该变量包含在内的模型选出。误差值由 0 增加到 0.075 MPa (误差值达到 0.075 MPa 时, 误差对 UCS 估计值的贡献大于 R_L 、 η_e 和 G_s), 采用 AIC-GPR、AICc-GPR、BIC-GPR、KIC-GPR 及 KICc-GPR 的方法, M-31 被选择的概率总体呈下降趋势, 这是由于在此过程中误差值对 UCS 估计值的贡献逐渐超越部分参数的贡献, 上述方法在平衡模型的复杂度与拟合程度后, M-31 作为最优模型被选择的概率下降。

相比之下, fB-GPR 和 DIC-GPR 在误差值较小 (UCS 标准差的 0.5% 以内) 时, 仍可将部分最优模型 M-7 选出, 所提 fB-GPR 方法正确选择的概率远远大于 DIC-GPR 方法。误差值在 0.1%~0.5% 的 UCS 标准差范围内时, fB-GPR 方法正确选择 M-7 的概率在 75%~85%, 即误差值在 UCS 标准差的 0.5% 以内时, fB-GPR 方法考虑了 R_L 、 η_e 和 G_s 对 UCS 估计的贡献, 会选出包含上述参数的部分模型。随着误差的增大, 采用 fB-GPR 方法 M-7 被选择的概率总体呈上升趋势, 这是因为误差的增大弱化了部分参数 (R_L 、 η_e 和 G_s) 对 UCS 估计的贡献。继增加误差值, 至 UCS 标准差的 1% (0.15 MPa), 2% (0.30 MPa), 3% (0.45 MPa), 4% (0.60 MPa), 5% (0.75 MPa) (工况 2), 结果如图 5 (c), (d) 所示。可以看出, 在此阶段最优模型 M-7 被选出的概率大幅度提高, M-31 被选出的概率几乎为 0。分析认为, 此阶段误差对 UCS 估计值的贡献相比于 R_L 、 η_e 和 G_s 越来越明显, 但其最大值仅为 0.75 MPa, 远远小于含 I_{s50} 和 ν_p 的贡献, 对于模型选择来说是有利的, 因为一方面误差的存在可有效过滤掉包含 R_L 、 η_e 和 G_s 的模型, 另一方面此时的误差值不会明显影响 UCS 估计值的大小。

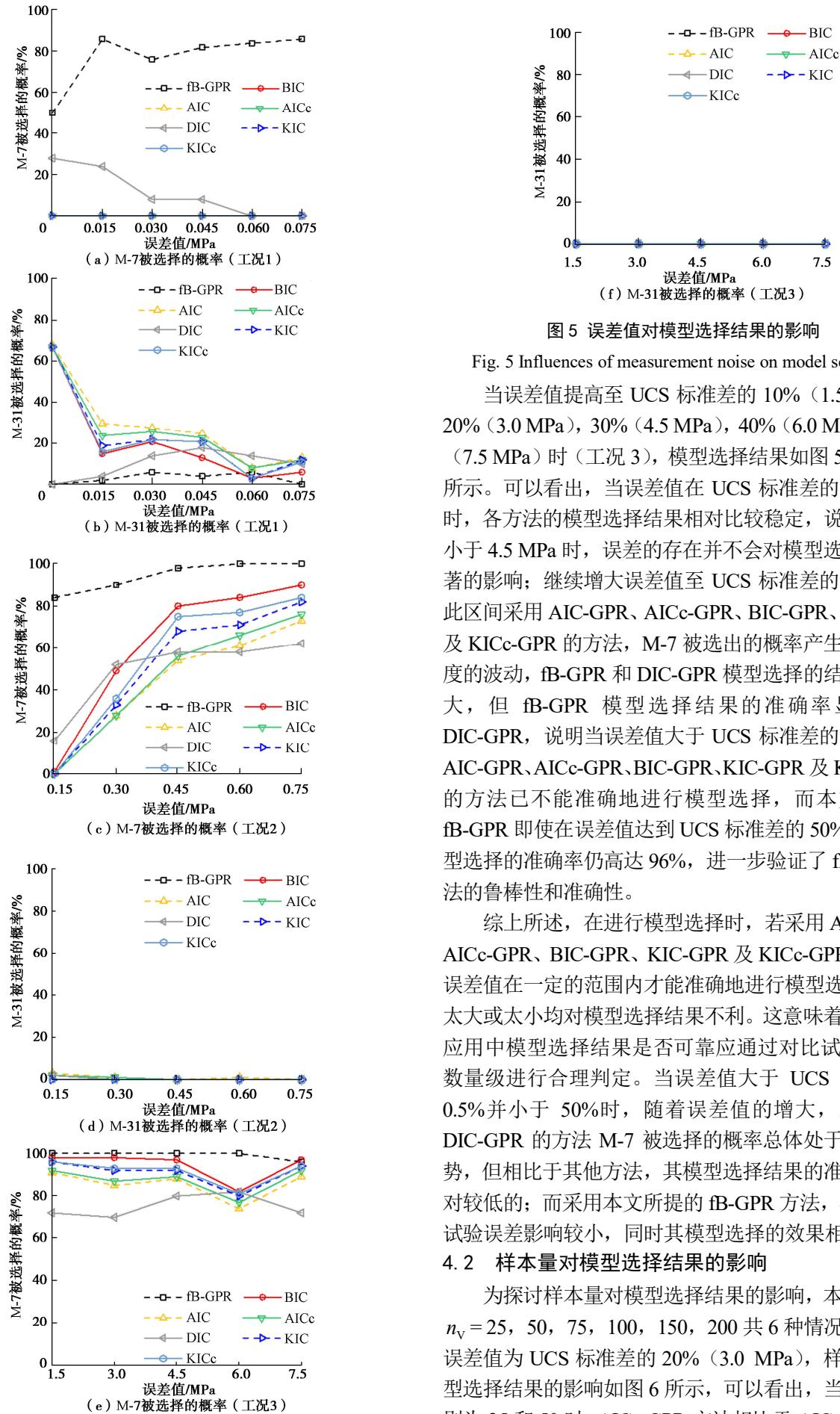


图5 误差值对模型选择结果的影响

Fig. 5 Influences of measurement noise on model selection

当误差值提高至 UCS 标准差的 10% (1.5 MPa), 20% (3.0 MPa), 30% (4.5 MPa), 40% (6.0 MPa), 50% (7.5 MPa) 时 (工况 3), 模型选择结果如图 5 (e), (f) 所示。可以看出, 当误差值在 UCS 标准差的 30% 以内时, 各方法的模型选择结果相对比较稳定, 说明误差值小于 4.5 MPa 时, 误差的存在并不会对模型选择产生显著的影响; 继续增大误差值至 UCS 标准差的 50%, 在此区间采用 AIC-GPR、AICc-GPR、BIC-GPR、KIC-GPR 及 KICc-GPR 的方法, M-7 被选出的概率产生了较大幅度的波动, fB-GPR 和 DIC-GPR 模型选择的结果波动不大, 但 fB-GPR 模型选择结果的准确率显著高于 DIC-GPR, 说明当误差值大于 UCS 标准差的 30% 时, AIC-GPR、AICc-GPR、BIC-GPR、KIC-GPR 及 KICc-GPR 的方法已不能准确地进行模型选择, 而本文所提的 fB-GPR 即使在误差值达到 UCS 标准差的 50% 时, 其模型选择的准确率仍高达 96%, 进一步验证了 fB-GPR 方法的鲁棒性和准确性。

综上所述, 在进行模型选择时, 若采用 AIC-GPR、AICc-GPR、BIC-GPR、KIC-GPR 及 KICc-GPR 的方法, 误差值在一定的范围内才能准确地进行模型选择: 误差太大或太小均对模型选择结果不利。这意味着实际工程应用中模型选择结果是否可靠应通过对比试验误差的数量级进行合理判定。当误差值大于 UCS 标准差的 0.5% 并小于 50% 时, 随着误差值的增大, 虽然采用 DIC-GPR 的方法 M-7 被选择的概率总体处于增加的趋势, 但相比于其他方法, 其模型选择结果的准确性是相对较低的; 而采用本文所提的 fB-GPR 方法, 其受 UCS 试验误差影响较小, 同时其模型选择的效果相对较好。

4.2 样本量对模型选择结果的影响

为探讨样本量对模型选择结果的影响, 本文设置了 $n_v = 25, 50, 75, 100, 150, 200$ 共 6 种情况。取试验误差值为 UCS 标准差的 20% (3.0 MPa), 样本量对模型选择结果的影响如图 6 所示, 可以看出, 当样本量分别为 25 和 50 时, AICc-GPR 方法相比于 AIC-GPR 方法

最优模型 M-7 被选择的准确率分别提高了 11.52% 和 6.17%，KICc-GPR 方法相比于 KIC-GPR 方法分别提高了 4.60% 和 3.19%，说明样本量较少（样本数量在 25 至 50 范围内）时，AICc-GPR 和 KICc-GPR 可提高模型选择的准确性。本文所提的 fB-GPR 在样本量达到 50 以上时，模型选择结果逐渐趋于稳定，不再发生大幅度波动。综上，当样本量大于 50 时，可以考虑利用 fB-GPR 方法构建 UCS 最优模型。由图 6（b）可以看出，所有样本量工况下，M-31 被选择的概率几乎均为 0，说明当试验误差相对较小时，即使样本数量相对较少，各模型选择方法也可保证包含所有较小贡献的输入变量的备选模型（即最复杂模型）不被选出。

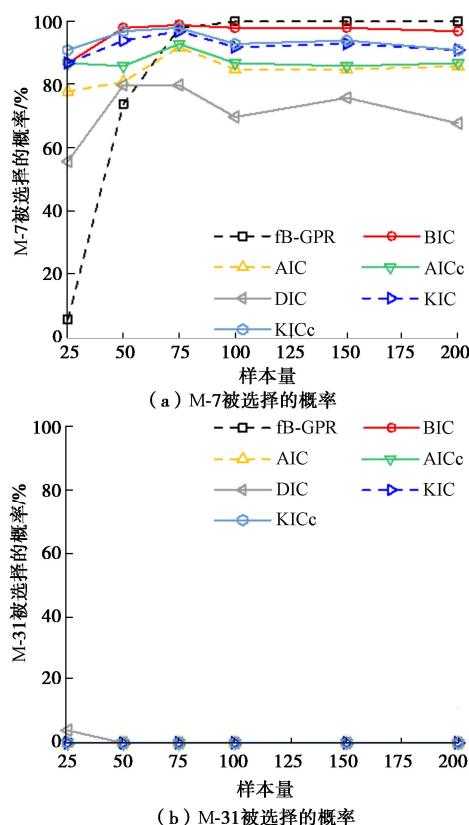


图 6 样本量对模型选择结果的影响

Fig. 6 Influences of sample size on model selection

5 结 论

本文首先介绍了贝叶斯高斯过程回归 fB-GPR 的基本原理；其次，对几种模型选择方法的适用范围和计算原理进行概述；接着基于岩性参数试验数据，对 UCS 模型预测性能及模型选择结果进行了初步对比分析，最后基于给定模型与模拟数据，探讨了误差值以及样本量对模型选择结果的影响。得到以下 3 点结论。

（1）基于岩性参数试验数据进行 UCS 预测与模型选择，贝叶斯高斯过程回归方法的模型选择结果最

为准确，同时可实现对 UCS 较为准确地估计，训练集决定系数可达到 0.89。

（2）对实际工程案例进行 100 次随机试验，本文所提的 fB-GPR 方法将 M-7 选为最优模型的概率可达到 100%，最优模型选择的准确率远远高于其他模型选择方法。

（3）误差值太小或太大均不利于模型选择，误差值太小时，选出的模型考虑的参数较多，模型过于复杂，误差值太大时，会影响 UCS 预测的准确性。fB-GPR 在误差值达到 UCS 标准差的 50% 时，仍可准确地进行模型选择，验证了 fB-GPR 方法的鲁棒性和准确性。

参 考 文 献：

- [1] 李文, 谭卓英. 基于 P 波模量的岩石单轴抗压强度预测[J]. 岩土力学, 2016, 37(增刊 2): 381-387. (LI Wen, TAN Zhuoying. Prediction of uniaxial compressive strength of rock based on P-wave modulus[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, 37(S2): 381-387. (in Chinese))
- [2] 孙欢, 刘晓丽, 王恩志, 等. 基于 X 射线断层扫描预测岩石单轴抗压强度[J]. 岩石力学与工程学报, 2019, 38(增刊 2): 3575-3582. (SUN Huan, LIU Xiaoli, WANG Enzhi, et al. Prediction on uniaxial compression strength of rocks with X-ray computed tomography[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2019, 38(S2): 3575-3582. (in Chinese))
- [3] 沙鹏, 张庆同, 林军, 等. 基于点荷载强度的火成岩单轴抗压强度原位估算[J]. 岩土力学, 2020, 41(增刊 2): 1-10. (SHE Peng, ZHANG Qingtong, LIN Jun, et al. In-situ estimation of uniaxial compressive strength of igneous rock based on point load strength[J]. Rock and Soil Mechanics, 2020, 41(S2): 1-10. (in Chinese))
- [4] ÇELIK S B. Prediction of uniaxial compressive strength of carbonate rocks from nondestructive tests using multivariate regression and LS-SVM methods[J]. Arabian Journal of Geosciences, 2019, 12(6): 1-17.
- [5] LIU D S, LIU H L, WU Y, et al. Characterization of geo-material parameters: gene concept and big data approach in geotechnical engineering[J]. Geosystems and Geoenvironment, 2022, 1(1): 100003.
- [6] HAN L, WANG L, DING X M, et al. Similarity quantification of soil parametric data and sites using confidence ellipses[J]. Geoscience Frontiers, 2022, 13(1): 101280.
- [7] MATIN S S, FARAHZADI L, MAKAREMI S, et al. Variable selection and prediction of uniaxial compressive strength and modulus of elasticity by random forest[J]. Applied Soft

- Computing, 2018, **70**: 980-987.
- [8] FATTABI H. Applying soft computing methods to predict the uniaxial compressive strength of rocks from Schmidt hammer rebound values[J]. Computational Geosciences, 2017, **21**(4): 665-681.
- [9] FENG X, JIMENEZ R. Estimation of deformation modulus of rock masses based on Bayesian model selection and Bayesian updating approach[J]. Engineering Geology, 2015, **199**: 19 - 27.
- [10] WU Z X, JI H, YU C, et al. EPR-RCGA-based modelling of compression index and RMSE-AIC-BIC-based model selection for Chinese marine clays and their engineering application[J]. Journal of Zhejiang University-SCIENCE A, 2018, **19**(3): 211-224. [LinkOut]
- [11] NG I T, YUEN K V, LAU C H. Predictive model for uniaxial compressive strength for Grade III granitic rocks from Macao[J]. Engineering Geology, 2015, **199**: 28 - 37.
- [12] RASMUSSEN C E, WILLIAMS C K I. Gaussian processes for machine learning[M]. Cambridge Mass: MIT Press, 2006.
- [13] 苏国韶, 肖义龙. 边坡可靠度分析的高斯过程方法[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(6): 916-920. (SU Guoshao, XIAO Yilong. Gaussian process method for slope reliability analysis[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(6): 916-920. (in Chinese))
- [14] 赵腾远, 宋超, 何欢. 小样本条件下江苏软土路基回弹模量的贝叶斯估计——基于静力触探数据与高斯过程回归的建模分析[J]. 岩土工程学报, 2021, **43**(增刊2): 137 - 141. (ZHAO Tengyuan, SONG Chao, HE Huan. Bayesian estimation of resilient modulus of Jiangsu soft soils from sparse data — Gaussian process regression and cone penetration test data-based modelling and analysis[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2021, **43**(S2): 137 - 141. (in Chinese))
- [15] 蒋水华, 刘源, 张小波, 等. 有限数据条件下空间变异岩土力学参数随机反演分析及比较[J]. 岩石力学与工程学报, 2020, **39**(6): 1265 - 1276. (JIANG Shuihua, LIU Yuan, ZHANG Xiaobo, et al. Stochastic back analysis and comparison of spatially varying geotechnical mechanical parameters based on limited data[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2020, **39**(6): 1265 - 1276. (in Chinese))
- [16] VANHATALO J, RIIHIMÄKI J, HARTIKAINEN J, et al. GPstuff: Bayesian modeling with Gaussian processes[J]. Journal of Machine Learning Research, 2013, **14**(1): 1175-1179.
- [17] 仉文岗, 顾鑫, 刘汉龙, 等. 基于贝叶斯更新的非饱和土坡参数概率反演及变形预测[J]. 岩土力学, 2022, **43**(4): 1112 - 1122. (ZHANG Wengang, GU Xin, LIU Hanlong, et al. Probabilistic back analysis of soil parameters and displacement prediction of unsaturated slopes using Bayesian updating[J]. Rock and Soil Mechanics, 2022, **43**(4): 1112-1122. (in Chinese))
- [18] ZHAO T Y, SONG C, LU S F, et al. Prediction of uniaxial compressive strength using fully Bayesian Gaussian process regression (fB-GPR) with model class selection[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 2022, **55**(10): 6301-6319.
- [19] CZADO C. Analyzing dependent data with vine copulas[J]. Lecture Notes in Statistics, Springer, 2019.
- [20] 付代光, 刘江平, 周黎明, 等. 基于贝叶斯理论的软夹层多模式瑞雷波频散曲线反演研究[J]. 岩土工程学报, 2015, **37**(2): 321-329. (FU Daiguang, LIU Jiangping, ZHOU Liming, et al. Inversion of multimode Rayleigh-wave dispersion curves of soft interlayer based on Bayesian theory[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, **37**(2): 321-329. (in Chinese))
- [21] 唐小松, 李典庆, 周创兵, 等. 基于 Bootstrap 方法的岩土体参数联合分布模型识别[J]. 岩土力学, 2015, **36**(4): 913-922. (TANG Xiaosong, LI Dianqing, ZHOU Chuangbing, et al. Bootstrap method for joint probability distribution identification of correlated geotechnical parameters[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, **36**(4): 913-922. (in Chinese))
- [22] HURVICH C M, TSAI C L. Regression and time series model selection in small samples[J]. Biometrika, 1989, **76**(2): 297-307.
- [23] SPIEGELHALTER D J, BEST N G, CARLIN B P, et al. Bayesian measures of model complexity and fit[J]. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), 2002, **64**(4): 583-639.
- [24] CAVANAUGH J E. A large-sample model selection criterion based on Kullback's symmetric divergence[J]. Statistics & Probability Letters, 1999, **42**(4): 333-343.
- [25] SEGHOUANE A K. Multivariate regression model selection from small samples using Kullback's symmetric divergence[J]. Signal Processing, 2006, **86**(8): 2074-2084.