

DOI: 10.11779/CJGE202205014

桩顶水平动荷载作用下水 - 桩 - 土相互作用的解析解

赵密¹, 黄义铭¹, 王丕光^{*1}, 徐海滨², 杜修力¹

(1. 北京工业大学城市与工程安全减灾教育部重点实验室, 北京 100124; 2. 中国长江三峡集团有限公司, 北京 100038)

摘要: 近海结构单桩基础一般会遭受到多种水平动力荷载作用。针对端承桩在桩顶水平动力荷载作用下的动力响应问题, 建立了一种三维水 - 桩 - 土相互作用系统模型; 首先, 桩和土体假设为线黏弹性介质, 水体假设为线性声学介质; 然后通过亥姆霍兹分解和分离变量法, 给出了水体和土体阻抗对水 - 桩 - 土相互作用系统中桩体动力响应的解析解, 进一步根据桩与水体、土体接触界面的连续条件, 得到频域下桩体位移表达式。通过与子结构方法进行对比, 验证了本文解析解的合理性; 最后研究了不同桩体和土体参数时水体对桩体顶部位移响应的影响。结果表明, 在海上桩基设计中考虑水 - 桩 - 土相互作用是非常有必要的。

关键词: 近海结构; 解析解; 水平振动; 桩 - 水相互作用; 桩 - 土相互作用

中图分类号: TU470 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2022)05-0907-09

作者简介: 赵密(1980—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事重大工程抗震领域研究工作, E-mail: zhaomi@bjut.edu.cn。

Analytical solution for water-pile-soil interaction under horizontal dynamic loads on pile head

ZHAO Mi¹, HUANG Yi-ming¹, WANG Pi-guang¹, XU Hai-bin², DU Xiu-li¹

(1. Key Laboratory of Urban Security and Disaster Engineering, Ministry of Education, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China; 2. China Three Gorges Corporation, Beijing 100038, China)

Abstract: Offshore structures of a single pile are generally subjected to a variety of horizontal dynamic loads. In order to study the dynamic response of end-supported piles under horizontal dynamic loads on pile head, a three-dimensional water-pile-soil interaction system model is established. The pile and soil are assumed to be a linear viscoelastic media, and the water is assumed to be a linear acoustic media. Through the Helmholtz method for decomposition and separation of variables, an analytical solution is obtained for the resistance of the soil layer and water media to the water-pile-soil system. The displacement and horizontal dynamic complex impedance of the pile are then obtained in frequency domain based on the continuity conditions of contact interface between the pile and water and soil. The present solution is compared with the substructure method to verify the rationality of the method. Finally, the influences of water on the displacement response of pile top under different pile and soil parameters are studied. The results indicate that it is necessary to consider the water-pile-soil interaction in the design of the piles installed in offshore areas.

Key words: offshore structure; analytical solution; horizontal vibration; pile-water interaction; pile-soil interaction

0 引言

桩基础在近海结构设施中起着重要的作用, 桩基础经常受到水平动荷载的作用, 如波浪荷载、风荷载和水平地震荷载等。因此, 分析动力荷载作用下桩的动力响应具有重要的意义^[1-2]。由于桩体的振动直接受周围土体的影响, 因此桩 - 土动力相互作用一直是研究的热点问题^[3-4]。此外, 不同于陆地上的结构, 海上结构物如高桩码头、海上风机、石油平台等还需要考虑水 - 桩 - 土之间的耦合作用。因此, 考虑到海上构筑物的安全, 有必要研究在水平动力荷载作用下考虑

水 - 桩 - 土耦合作用的桩体动力响应。

近年来, 水平动力荷载作用下桩 - 土耦合振动问题受到了学者们的广泛关注。在早期, 许多学者将桩周土体视为 Winkler 模型^[5-7]。Winkler 模型用弹簧和阻尼器代替土体介质, 将多维边值问题转化为简单的垂直方向一维波传播的杆问题, 该模型简单易用, 促

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(52078010); 教育部创新团队项目(IRT_17R03)

收稿日期: 2021-07-16

*通信作者(E-mail: wangpiguang1985@126.com)

进了桩基水平振动响应的理论研究。然而，大多数模型参数的确定都是根据经验而非理论推导，不能真实反映桩-土耦合振动效应。Novak 等^[8]、Nogami 等^[9]提出了平面应变模型，得到了在桩体顶部动荷载作用下桩体动力刚度和阻尼的表达式。平面应变模型优于 Winkler 模型，需要注意的是，在平面应变模型中，垂直方向的应变为零，波只在水平方向传播，忽略了周围土体的三维波效应；郑长杰等^[10]建立了黏弹性土层中大直径管桩水平动力响应的解析解；柰鲁宝等^[11]研究了黏弹性土层中桩-土横向耦合振动问题，同时考虑了竖向应力梯度变化和轴向荷载二阶效应的影响。

近海结构物动力分析时应考虑结构与水的相互作用，因为结构与水的相互作用对结构动力响应有重要影响。假设土体地基为刚性，各学者对水-结构动力相互作用进行了一系列的研究。此外，在不考虑水体表面波和压缩性的情况下，水体对结构的动水压力可以用附加质量代替。Chwang 等^[12]基于二维势流理论，提出了斜面刚性坝上动水压力的精确解；Williams^[13]采用边界积分法研究了水中圆柱体的动力响应；刘振宇等^[14]给出了内外水作用下圆形空心桥墩动水压力的表达式，在一定程度上对由 Li 等提出的动水压力表达式进行了修正和简化；Wang 等^[15]提出了一种可以用于任意截面形状结构地震反应分析的子结构方法，结果表明该方法的精度足以满足工程应用。

对于近海结构而言，大量研究表明水体和土体介质对结构动力响应都有一定的影响^[16-20]。目前，虽然大部分数值方法都可以方便、高效地解决水-桩-土相互作用问题。然而对于某些参数的研究，解析方法有时比数值分析方法更加方便。因此，本文建立了水体和土体抵抗下水平振动桩的解析解。此外，还对桩的振动特性进行了参数化研究。

1 计算模型及基本假定

水-桩-土相互作用系统模型如图 1 所示。桩体顶部受到动力荷载 $Q_0 e^{i\omega t}$ 和 $M_0 e^{i\omega t}$ 的作用（其中 ω ， t 分别为圆频率和时间）， (r, z) 表示桩体柱坐标系，桩体半径、土体厚度、水深、桩体出水面高度和桩体总高度分别为 r_0 ， h_1 ， h_2 ， h_3 ， H 。

本文在建立方程时采用如下假定条件：①水体在水平方向是无限的，且是无旋、无黏性，在动力荷载作用之前不发生扰动；②桩体采用线黏弹性 Euler 梁模拟，桩体截面为圆形，桩体与水体、土体和刚性地基接触良好，接触面不发生滑移；③土体为黏弹性、均质、各向同性介质，土体材料阻尼采用与频率无关的滞回阻尼；④在水平动荷载作用下水-土相互作用影响较小，因此未考虑水-土相互作用；⑤忽略与水

平振动相关的土体竖向位移^[9-10]。

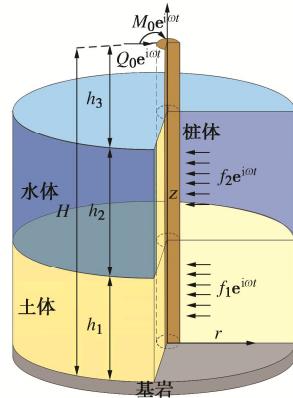


图 1 水-桩-土相互作用系统模型

Fig. 1 Model for water-pile-soil interaction system

1.1 水体控制方程

根据线性波浪理论，水体动水压力在柱坐标下可以表示为 $p(r, \theta, z) e^{i\omega t}$ ，以水体动水压力表示的控制方程为

$$\frac{\partial^2 p(r, \theta, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p(r, \theta, z)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p(r, \theta, z)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p(r, \theta, z)}{\partial z^2} + k^2 p(r, \theta, z) = 0 , \quad (1)$$

式中， $k = \omega / c_w$ ， c_w 为水中波传播的速度。当水体波速 $c_w \rightarrow \infty$ 时， $k \rightarrow 0$ ，此时水体表示不可压缩。当水体为不可压缩介质时，水体对桩体的作用可以用附加质量表示，且此时水体没有考虑辐射阻尼的影响^[21]。

1.2 土体控制方程

在土体介质中，土体径向位移和环向位移可以分别表示为 $u_r(r, \theta, z) e^{i\omega t}$ ， $u_\theta(r, \theta, z) e^{i\omega t}$ 。

土体径向位移表示的耦合动力控制方程为

$$(\lambda_s^* + 2G_s^*) \frac{\partial \Delta}{\partial r} - G_s^* \frac{1}{r} \frac{\partial e_z}{\partial \theta} = -\rho_s \omega^2 u_r(r, \theta, z) - G_s^* \frac{\partial^2 u_r(r, \theta, z)}{\partial z^2} . \quad (2)$$

土体环向位移表示的耦合动力控制方程为

$$\left(\lambda_s^* + 2G_s^* \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} \right) + G_s^* \frac{\partial e_z}{\partial r} = -\rho_s \omega^2 u_\theta(r, \theta, z) - G_s^* \frac{\partial^2 u_\theta(r, \theta, z)}{\partial z^2} , \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r u_r(r, \theta, z)] + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta(r, \theta, z)}{\partial \theta} , \\ e_z &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [r u_\theta(r, \theta, z)] - \frac{\partial r u_r(r, \theta, z)}{\partial \theta} \right\} , \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中， $\lambda_s^* = 2G_s^* v_s / (1 - 2v_s)$ 为土体复 Lame 常数， v_s 为土体泊松比， $G_s^* = G_s (1 + 2i\beta_s)$ 为土体复剪切模量， G_s 为土体剪切模量， β_s 为土体滞后阻尼， ρ_s 为土体质量密度。

1.3 桩体控制方程

根据动力平衡条件, 容易建立桩体动力控制方程。则以桩体在土体、水体和空气中的水平位移 $w_{p_i} e^{i\omega t}$ ($i=1, 2, 3$) 表示的动力控制方程为

$$E_p^* I_p \frac{\partial^4 w_{p_i}(z)}{\partial z^4} + m_p \omega^2 w_{p_i}(z) + f_i = 0 \quad , \quad (5)$$

式中, E_p , I_p 和 $m_p = \rho_p \pi r_0^2$ 分别为桩体弹性模量、截面惯性矩和单位长度的质量, $E_p^* = E_p(1+2i\beta_p)$, β_p 为桩体滞后阻尼, f_i ($i=1, 2, 3$) 分别为土体、水体和空气 ($f_3=0$) 对桩体的阻抗力。

1.4 边界条件

水-桩-土相互作用系统需要满足以下边界条件:

桩体顶部边界条件

$$E_p^* I_p \frac{\partial^2 w_{p_3}(z)}{\partial z^2} \Big|_{z=h_1+h_2+h_3} = M_0 \quad , \quad (6)$$

$$E_p^* I_p \frac{\partial^3 w_{p_3}(z)}{\partial z^3} \Big|_{z=h_1+h_2+h_3} = Q_0 \quad . \quad (7)$$

水体表面边界条件

$$\frac{\partial p(r, \theta, z)}{\partial z} \Big|_{z=h_1+h_2} = \frac{\omega^2}{g} p(r, \theta, z) \Big|_{z=h_1+h_2} \quad . \quad (8)$$

当忽略自由表面波时, 边界条件 (8) 就变换为 $p(r, \theta, z)|_{z=h_1+h_2} = 0$ 。

水-土交界面边界条件

$$\frac{\partial p(r, \theta, z)}{\partial z} \Big|_{z=h_1} = 0 \quad , \quad (9)$$

$$\frac{\partial u_r(r, \theta, z)}{\partial z} \Big|_{z=h_1} = 0 \quad . \quad (10)$$

基岩表面边界条件

$$u_r(r, \theta, z)|_{z=0} = 0 \quad , \quad (11)$$

$$u_\theta(r, \theta, z)|_{z=0} = 0 \quad , \quad (12)$$

$$w_{p_1}(z)|_{z=0} = 0 \quad , \quad (13)$$

$$\frac{\partial w_{p_1}(z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad . \quad (14)$$

桩段连接面边界条件

$$w_{p_1}(z)|_{z=h_1} = w_{p_2}(z)|_{z=h_1} \quad , \quad (15)$$

$$w_{p_2}(z)|_{z=h_1+h_2} = w_{p_3}(z)|_{z=h_1+h_2} \quad , \quad (16)$$

$$\frac{\partial w_{p_1}(z)}{\partial z} \Big|_{z=h_1} = \frac{\partial w_{p_2}(z)}{\partial z} \Big|_{z=h_1} \quad , \quad (17)$$

$$\frac{\partial w_{p_2}(z)}{\partial z} \Big|_{z=h_1+h_2} = \frac{\partial w_{p_3}(z)}{\partial z} \Big|_{z=h_1+h_2} \quad , \quad (18)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w_{p_1}(z)}{\partial z^2} \right|_{z=h_1} = \left. \frac{\partial^2 w_{p_2}(z)}{\partial z^2} \right|_{z=h_1} \quad , \quad (19)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w_{p_2}(z)}{\partial z^2} \right|_{z=h_1+h_2} = \left. \frac{\partial^2 w_{p_3}(z)}{\partial z^2} \right|_{z=h_1+h_2} \quad , \quad (20)$$

$$\left. \frac{\partial^3 w_{p_1}(z)}{\partial z^3} \right|_{z=h_1} = \left. \frac{\partial^3 w_{p_2}(z)}{\partial z^3} \right|_{z=h_1} \quad , \quad (21)$$

$$\left. \frac{\partial^3 w_{p_2}(z)}{\partial z^3} \right|_{z=h_1+h_2} = \left. \frac{\partial^3 w_{p_3}(z)}{\partial z^3} \right|_{z=h_1+h_2} \quad . \quad (22)$$

桩-土交界面边界条件

$$u_r(r, \theta, z)|_{r=r_0} = w_{p_1}(z) \cos \theta|_{r=r_0} \quad , \quad (23)$$

$$u_\theta(r, \theta, z)|_{r=r_0} = -w_{p_1}(z) \sin \theta|_{r=r_0} \quad . \quad (24)$$

桩-水交界面边界条件

$$\left. \frac{\partial p(r, \theta, z)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \rho \omega^2 w_{p_2}(z) \cos \theta|_{r=r_0} \quad . \quad (25)$$

水体动水压力无穷远处边界条件

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p(r, \theta, z) = 0 \quad . \quad (26)$$

土体位移无穷远处边界条件

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_r(r, \theta, z) = 0 \quad , \quad (27)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_\theta(r, \theta, z) = 0 \quad . \quad (28)$$

2 方程的求解

2.1 桩-土相互作用

根据亥姆霍兹分解、分离变量法和边界条件 (10) ~ (12), (23), (24), (27) 和 (28) 可以得到土体径向位移和环向位移为^[9]

$$u_r(r, \theta, z_1) = \cos \theta \sum_{i=1}^{\infty} \sin(g_i z_1) \cdot \left\{ -A_i \left[\frac{1}{r} K_1(q_i r) + q_i K_0(q_i r) \right] + B_i \frac{1}{r} K_1(s_i r) \right\} \quad , \quad (29)$$

$$u_\theta(r, \theta, z_1) = \sin \theta \sum_{i=1}^{\infty} \sin(g_i z_1) \cdot \left\{ -A_i \frac{1}{r} K_1(q_i r) + B_i \left[\frac{1}{r} K_1(s_i r) + s_i K_0(s_i r) \right] \right\} \quad . \quad (30)$$

式中 $g_i = \frac{(2i-1)\pi}{2h_1}$, $i=1, 2, 3, \dots$; $q_i^2 = \frac{G_s^* g_i^2 - \rho_s \omega^2}{\lambda_s^* + 2G_s^*}$;

$s_i^2 = \frac{G_s^* g_i^2 - \rho_s \omega^2}{G_s^*}$; A_i , B_i 是未知系数。

根据桩-土位移连续边界条件可得

$$B_i = T_{l_1} A_i \quad , \quad (31)$$

式中,

$$T_{1i} = \frac{(2/r_0)K_1(q_i r_0) + q_i K_0(q_i r_0)}{(2/r_0)K_1(s_i r_0) + s_i K_0(s_i r_0)} \quad 。 \quad (32)$$

再根据力和位移的关系, 可以得到土体阻抗力 f_1 为

$$\begin{aligned} f_1 &= -\int_0^{2\pi} (\sigma_r(r_0) \cos \theta - \tau_{r\theta}(r_0) \sin \theta) r_0 d\theta \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} b_{hi} A_i \sin(g_i z_1) \quad , \end{aligned} \quad (33)$$

式中, b_{hi} 为第 i 阶水平阻抗因子, $b_{hi} = -\pi r_0 \{(\lambda_s^* + 2G_s^*) \cdot q_i^2 K_1(q_i r_0) + G_s^* T_{1i} s_i^2 K_1(s_i r_0)\}$ 。

当 $i=1$ 时, 将式 (33) 代入式 (5) 可以得到用桩体在土中的位移表示的控制方程为

$$E_p^* I_p \frac{d^4 w_{p1}(z_1)}{dz_1^4} - m_p \omega^2 w_{p1}(z_1) = -\sum_{i=1}^{\infty} b_{hi} A_i \sin(g_i z_1) \quad (34)$$

式 (34) 的解由两部分组成, 齐次方程的通解 $w_{h1}(z_1)$ 和非齐次方程的特解 $w_{t1}(z_1)$ 可以表示为

$$w_{p1}(z_1) = w_{h1}(z_1) + w_{t1}(z_1) \quad . \quad (35)$$

其中非齐次方程的特解 $w_{t1}(z_1)$ 可以表示为

$$w_{t1}(z_1) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin(g_i z_1) \quad . \quad (36)$$

式中, b_i 为常数。

将式 (36) 代入式 (34), 可以得到常数 b_i 为

$$b_i = \frac{-b_{hi} A_i}{E_p^* I_p g_i^4 - m_p \omega^2} \quad . \quad (37)$$

齐次方程的通解可以表示为

$$w_{h1}(z_1) = Q_1 \sin(\beta_1 z_1) + Q_2 \cos(\beta_1 z_1) + Q_3 \sinh(\beta_1 z_1) + Q_4 \cosh(\beta_1 z_1) \quad , \quad (38)$$

$$\beta_1 = \sqrt[4]{(m_p \omega^2 / E_p^* I_p)} \quad . \quad (39)$$

式中, Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4 为未知常数。

将式 (36) ~ (38) 代入式 (35) 可得

$$\begin{aligned} w_{p1}(z_1) &= Q_1 \sin(\beta_1 z_1) + Q_2 \cos(\beta_1 z_1) + Q_3 \sinh(\beta_1 z_1) + \\ &Q_4 \cosh(\beta_1 z_1) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{hi} A_i}{E_p^* I_p g_i^4 - m_p \omega^2} \sin(g_i z_1) \quad . \end{aligned} \quad (40)$$

桩与土体接触良好, 因此结合式 (29), (40) 进一步利用三角函数正交性, A_i 的表示式为

$$A_i = \frac{Q_1 F_{1i} + Q_2 F_{2i} + Q_3 F_{3i} + Q_4 F_{4i}}{b_{hi}} \quad , \quad (41)$$

式中,

$$F_{1i} = \frac{2}{h_1} \int_0^{h_1} \sin(\beta_1 z_1) \sin(g_i z_1) dz_1 \quad , \quad (42a)$$

$$F_{2i} = \frac{2}{h_1} \int_0^{h_1} \cos(\beta_1 z_1) \sin(g_i z_1) dz_1 \quad , \quad (42b)$$

$$F_{3i} = \frac{2}{h_1} \int_0^{h_1} \sinh(\beta_1 z_1) \sin(g_i z_1) dz_1 \quad , \quad (42c)$$

$$F_{4i} = \frac{2}{h_1} \int_0^{h_1} \cosh(\beta_1 z_1) \sin(g_i z_1) dz_1 \quad , \quad (42d)$$

$$T_{2i} = T_{1i} \frac{1}{r} K_1(s_i r) - \frac{1}{r} K_1(q_i r) - q_i K_0(q_i r) \quad . \quad (42e)$$

将式 (41) 代入式 (40) 可得

$$\begin{aligned} w_{p1}(z_1) &= Q_1 \left[\sin(\beta_1 z_1) - \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_{1i} \sin(g_i z_1) \right] + \\ &Q_2 \left[\cos(\beta_1 z_1) - \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_{2i} \sin(g_i z_1) \right] + \\ &Q_3 \left[\sinh(\beta_1 z_1) - \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_{3i} \sin(g_i z_1) \right] + \\ &Q_4 \left[\cosh(\beta_1 z_1) - \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_{4i} \sin(g_i z_1) \right] \quad , \end{aligned} \quad (43)$$

式中,

$$\{\kappa_{1i} \quad \kappa_{2i} \quad \kappa_{3i} \quad \kappa_{4i}\}^T = \gamma_{1i} \{F_{1i} \quad F_{2i} \quad F_{3i} \quad F_{4i}\}^T \quad , \quad (44a)$$

$$\gamma_{1i} = \frac{b_{hi}}{T_{2i}(E_p^* I_p g_i^4 - m_p \omega^2) + b_{hi}} \quad . \quad (44b)$$

2.2 桩 - 水相互作用

根据分离变量法, 再进一步利用边界条件 (8), (9), (25) 和 (26), 可以得到水体水平方向对桩体的阻抗力 f_2 [21]:

$$f_2 = \sum_{j=0}^{\infty} a_{hj} U_{1j} Z(z) \quad , \quad (45)$$

$$U_{1j} = \frac{2}{h_2} \int_0^{h_2} w_{p2}(z_2) Z(z) dz_2 \quad , \quad (46)$$

$$Z(z) = \begin{cases} \cosh(\bar{\lambda}_j z) & (j=0) \\ \cos(\lambda_j z) & (j \geq 1) \end{cases} \quad . \quad (47)$$

式中 $h_1 \leq z_2 \leq h_1 + h_2$, $r_i = -ir\lambda_j \sqrt{1 - (\omega/\lambda_j c)^2}$;

$$\lambda_j = \begin{cases} \bar{\lambda}_j \tanh(\bar{\lambda}_j h_2) = \frac{\omega^2}{g} & (j=0) \\ \lambda_j \tan(\lambda_j h_2) = \frac{-\omega^2}{g} & (j \geq 1) \end{cases}, \quad \bar{\lambda}_j \text{ 为 } \lambda_j \text{ 的虚部};$$

$a_{hj} = \frac{\rho \pi r_0^2 \omega^2 H_1^{(2)}(r_i)}{r_i H_1^{(2)}(r_i)}$ 是第 j 阶水平阻抗因子; C_j 是未知系数。

当 $i=2$ 时, 将式 (45) 代入式 (5) 可以得到用桩体在水中的位移表示的控制方程:

$$E_p^* I_p \frac{d^4 w_{p2}(z_2)}{dz_2^4} - m_p \omega^2 w_{p2}(z_2) = -\sum_{j=0}^{\infty} a_{hj} U_{1j} Z(z) \quad . \quad (48)$$

与桩 - 土相互作用求解类似, 式 (48) 解可以表示为

$$\begin{aligned} w_{p2}(z_2) &= Q_5 \sin(\beta_1 z_2) + Q_6 \cos(\beta_1 z_2) + Q_7 \sinh(\beta_1 z_2) + \\ &Q_8 \cosh(\beta_1 z_2) - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_{hj} U_{1j}}{E_p^* I_p \lambda_j^4 - m_p \omega^2} Z(z) \quad . \end{aligned} \quad (49)$$

式中, Q_5 , Q_6 , Q_7 , Q_8 为未知常数。

桩与水体也接触良好, 因此结合式(46), (49), 进一步利用三角函数正交性得到 U_{1j} 的表示式为

$$U_{1j} = \frac{Q_5 L_{1j} + Q_6 L_{2j} + Q_7 L_{3j} + Q_8 L_{4j}}{1 + \frac{a_{bj}}{E_p^* I_p \lambda_j^4 - m_p \omega^2}}, \quad (50)$$

式中,

$$L_{1j} = \frac{2}{h_2} \int_0^{h_2} \sin(\beta_1 z_2) Z(z) dz_2, \quad (51a)$$

$$L_{2j} = \frac{2}{h_2} \int_0^{h_2} \cos(\beta_1 z_2) Z(z) dz_2, \quad (51b)$$

$$L_{3j} = \frac{2}{h_2} \int_0^{h_2} \sinh(\beta_1 z_2) Z(z) dz_2, \quad (51c)$$

$$L_{4j} = \frac{2}{h_2} \int_0^{h_2} \cosh(\beta_1 z_2) Z(z) dz_2. \quad (51d)$$

将式(50)代入式(49)可得

$$\begin{aligned} w_{p_2}(z_2) = & Q_5 \left[\sin(\beta_1 z_2) - \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_{1j} Z(z) \right] + \\ & Q_6 \left[\cos(\beta_1 z_2) - \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_{2j} Z(z) \right] + \\ & Q_7 \left[\sinh(\beta_1 z_2) - \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_{3j} Z(z) \right] + \\ & Q_8 \left[\cosh(\beta_1 z_2) - \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_{4j} Z(z) \right], \end{aligned} \quad (52)$$

式中,

$$\{\zeta_{1j} \quad \zeta_{2j} \quad \zeta_{3j} \quad \zeta_{4j}\}^T = \gamma_{2j} \{L_{1j} \quad L_{2j} \quad L_{3j} \quad L_{4j}\}^T, \quad (53a)$$

$$\gamma_{2i} = \frac{a_{bj}}{E_p^* I_p \lambda_j^4 - m_p \omega^2 + a_{bj}}. \quad (53b)$$

2.3 空气中桩

当 $i=3$ 时, 用桩体在空气中的位移表示的控制方程为

$$E_p^* I_p \frac{d^4 w_{p_3}(z_3)}{dz_3^4} - m_p \omega^2 w_{p_3}(z_3) = 0. \quad (54)$$

式中, $h_2 \leq z_3 \leq h_2 + h_3$ 。

式(54)的通解可以表示为

$$\begin{aligned} w_{p_3}(z_3) = & Q_9 \sin(\beta_1 z_3) + Q_{10} \cos(\beta_1 z_3) + \\ & Q_{11} \sinh(\beta_1 z_3) + Q_{12} \cosh(\beta_1 z_3), \end{aligned} \quad (55)$$

表 1 桩体、土体和水体参数

Table 1 Parameters of pile, soil and water

桩长 H/m	桩出水面长度 h_3/m	直径 $2r_0/m$	杨氏模量 E_p/GPa	密度 ρ_p $/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	滞后阻尼 β_p $/\text{m}$	土体厚度 h_1/m	杨氏模量 E_s/MPa	密度 ρ_s $/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	泊松比 ν_s	滞后阻尼 β_s $/\text{m}$	水深 h_2/m	密度 ρ $/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	波速 $c_w/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$
60	0	4	30	2500	0.02	30	5	1800	0.3	0.02	30	1000	1438

式中, Q_9 , Q_{10} , Q_{11} , Q_{12} 为由未知常数。

2.4 桩体位移求解

将式(43), (52), (55)代入边界条件(13)~(15), (17), (19), (21)和式(16), (18), (20), (22)和式(6), (7), 经过一些转化可得

$$\mathbf{T}_1(i) \mathbf{Q}_{w_1} = \{0 \quad 0\}^T, \quad (56)$$

$$\mathbf{T}_2(i) \mathbf{Q}_{w_1} = \mathbf{T}_3(j) \mathbf{Q}_{w_2}, \quad (57)$$

$$\mathbf{T}_4(j) \mathbf{Q}_{w_2} = \mathbf{T}_5 \mathbf{Q}_{w_3}, \quad (58)$$

$$\mathbf{T}_6 \mathbf{Q}_{w_3} = \{M_0 \quad Q_0\}^T. \quad (59)$$

将式(57), (58)代入式(56)并结合式(59), 可得

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{T}_1(i) \mathbf{T}_2^{-1}(i) \mathbf{T}_3(j) \mathbf{T}_4^{-1}(j) \mathbf{T}_5 \\ \mathbf{T}_6 \end{array} \right] \mathbf{Q}_{w_3} = [0 \quad 0 \quad M_0 \quad Q_0]^T. \quad (60)$$

未知系数 \mathbf{Q}_{w_1} , \mathbf{Q}_{w_2} 和 \mathbf{Q}_{w_3} 分别可以通过式(57), (58), (60)得到。基于这些系数, 桩体位移可以确定。

3 模型验证

为了评价桩-土、桩-水相互作用对桩体顶部位移的影响, 采用表 1 列出的土体、水体和桩体的参数。本文中假设桩体顶部施加的剪力和弯矩分别为 1 MN 和 1 kN·m, 输入振动频率 f 的区间范围为 0:0.05:20。

本文中土体位移和水体速度势的表达式是一个无穷级数。因此, 有必要将无穷级数转化为有限级数。从图 2 中可以看出, 在无水和有水情况下将无穷级数截断为 5~10 项, 结果趋于收敛。因此, i 和 j 可以分别取为 6, 7。

为了验证本文方法的合理性, 在频域下将本文解析解分别退化为两种情况: ①第一种为无水有土情况的解析解与付鹏等^[22]、郑长杰等^[23]、子结构法(王丕光等^[24])和 Novak 法^[9]的解进行对比。②第二种为无土有水情况的解析解与子结构分析方法的解(王丕光等^[25])进行对比, 结果见图 3。最后, 在时域下将本文水-桩-土系统模型的解析解与子结构法和有限元 ABAQUS 法进行对比, 结果见图 4, 其中水平动荷载采用的是狄拉克脉冲, 幅值为 10^6 , 脉冲激励时间 0.2 s, 如图 5 所示。从图 3, 4 中可看出, 本解析解与子结构法、Novak 法和有限元 ABAQUS 法吻合较好。

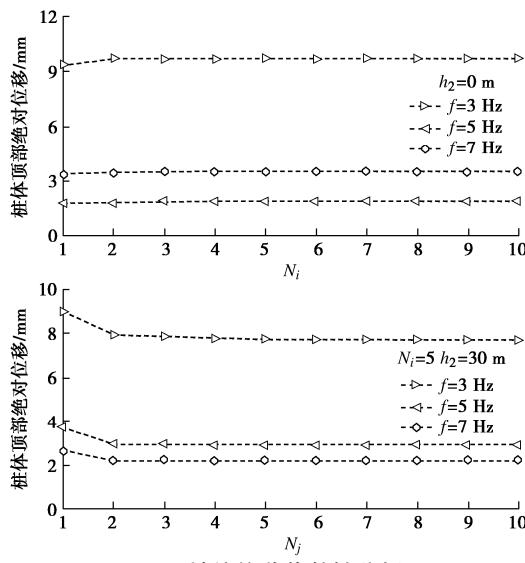


图 2 桩体位移收敛性分析

Fig. 2 Convergence tests on displacement of pile

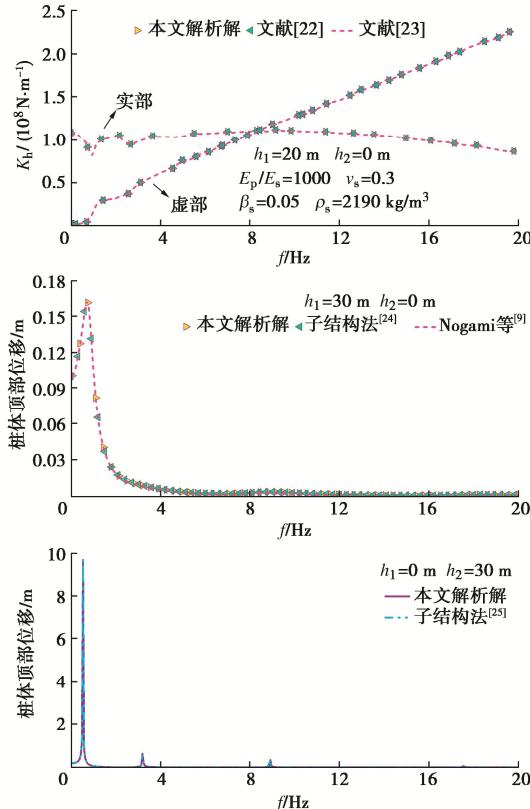


图 3 解析法与其他几种方法的对比

Fig. 3 Comparison between analytical method and other methods

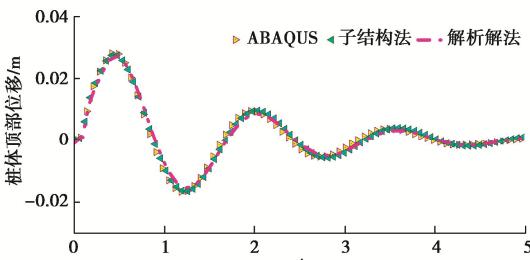


图 4 解析法与子结构法和Abaqus 的位移时程对比

Fig. 4 Comparison of time history of displacement among analytical method, substructure and Abaqus methods

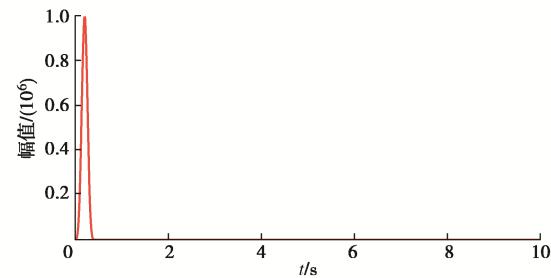


图 5 狄拉克脉冲

Fig. 5 Dirac impulse

4 数值算例

4.1 自由表面波的影响

图 6 表示有水有土情况时, 考虑与不考虑自由表面波情况下桩体顶部位移峰值随着水深的变化。从图 6 中可以看出, 水体自由表面波对桩体位移响应的影响很小, 几乎可以忽略。因此, 后面的算例基于无自由表面波分析。

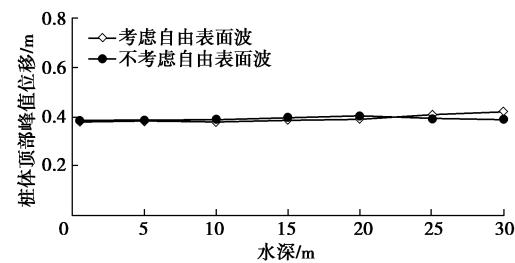


图 6 考虑与不考虑自由表面波情况下桩体位移峰值随着水深的变化

Fig. 6 Variation of displacement at pile top with water depth considering or not considering free surface waves

4.2 频域下水深的影响

图 7 表示有土情况时, 不同水深下桩体顶部位移绝对值随着频率的变化关系。

从图 7 中可以看出, 水深对桩体顶部位移有一定影响, 且位移峰值对应的频率随着水深的增加而减小。

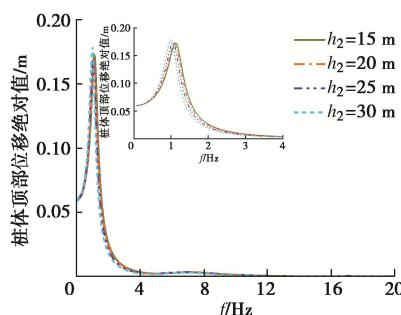


图 7 不同水深情况下桩体顶部位移随频率的变化

Fig. 7 Variation of displacement with frequency under different thicknesses of water layer at pile head

为了方便分析在不同土体和桩体参数情况下, 水

体对混凝土桩和钢管桩顶部位移响应的影响。定义 R_1 、 R_2 为有水时桩体顶部最大位移绝对值与无水时桩体顶部最大位移绝对值的比值, R_2 为有水时桩体顶部最大位移绝对值对应频率与无水时桩体最大位移绝对值对应频率的比值(桩体总长度不变), 其中钢管桩的弹性模量、密度、半径和泊松比分别取 210 GPa, 7850 kg/m³, 4 m 和 0.2, 薄壁厚度取为 6 cm。

图 8~10 表示混凝土桩和钢管桩 R_1 和 R_2 随着桩体半径、土体弹性模量和土体阻尼的变化。

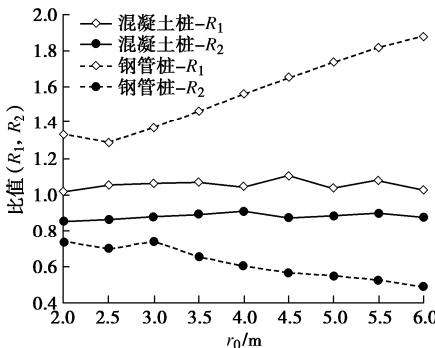


图 8 R_1 和 R_2 随桩体半径的变化

Fig. 8 Variation of R_1 and R_2 with pile radius

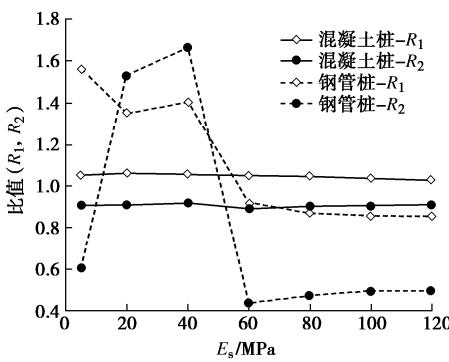


图 9 R_1 和 R_2 随土体弹性模量的变化

Fig. 9 Variation of R_1 and R_2 with soil modulus

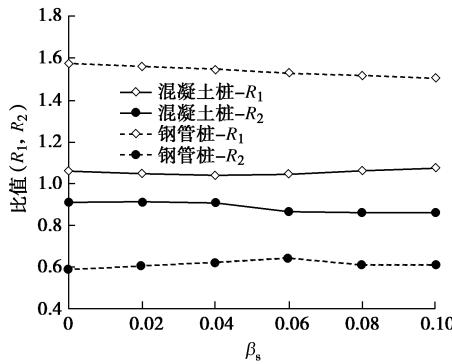


图 10 R_1 和 R_2 随土体阻尼的变化

Fig. 10 Variation of R_1 and R_2 with soil damping

从图 8 可以看出, 随着桩体半径的增大, 水体对混凝土桩和钢管桩顶部位移响应有一定影响; 还可以看到, 在半径为 2 m 时, 水体对桩体顶部位移响应的影响不大, 因此, 图 9, 10 中定义 $r_0=4$ m。从图 9, 10 可以看出, 随着土体弹性模量和桩体弹性模量的增

大, 水体对混凝土桩顶部位移响应的影响范围为 3%~10%, 而对钢管桩顶部位移响应的影响范围为 15%~60%; 且从图中可以看出, 随着土体和桩体参数的改变, 水体对混凝土桩的自振频率影响范围为 9%~15%, 而对钢管桩的自振频率影响范围为 40%~70%。

通过结果来看水体对钢管桩的影响较大, 虽然钢管桩的弹性模量和密度较大, 但是由于是空心桩体, 所以单位截面质量远小于混凝土实心桩体, 从而造成水体对钢管桩的影响更加显著。

4.3 时域下水深的影响

图 11 表示不同水深情况下桩体顶部位移随时间的变化, 其中水平动荷载采用的是狄拉克脉冲, 幅值为 10^6 , 脉冲激励时间 0.2 s, 如图 5 所示, 且桩体总长度不变, 柱形图是不同水深情况下与无水情况下桩体顶部位移峰值的比值误差。从图 11 中可以看出, 在桩长不变的情况下, 相比于无水, 水深小于 20 m 时对桩体位移响应的影响可以忽略不计。

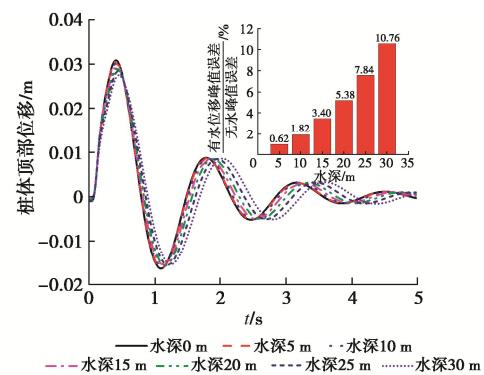
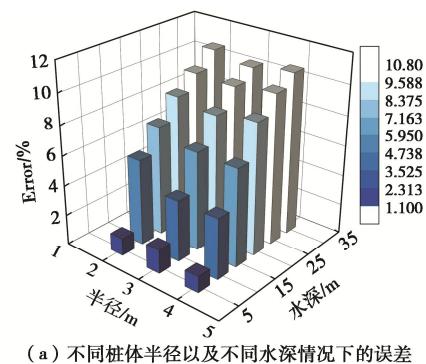


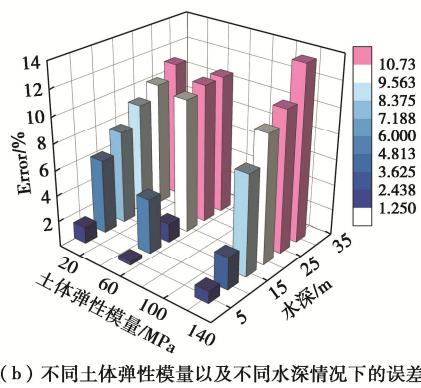
图 11 不同水深情况下桩体顶部位移随时间的变化

Fig. 11 Variation of displacement with time under different thicknesses of water layer at pile head

图 12 表示满水情况(桩长随着水深的变化而变化)以及不同半径和土体弹性模量时, 其中 Error (%) 定义为不同水深情况下与无水情况下桩顶位移峰值的比值。从图 12 中可以看出, 在一定土体厚度情况下, 水深 15 m 以下对桩体位移响应的影响在 7% 左右, 从工程角度来说一般可以忽略不计。



(a) 不同桩体半径以及不同水深情况下的误差



(b) 不同土体弹性模量以及不同水深情况下的误差

图 12 不同桩体半径和土体弹性模量以及水深情况下有水与无水桩顶位移峰值的比值误差

Fig. 12 Ratio errors of peak displacement at pile top with and without water under different pile radii, soil elastic modulus and water depths

5 结 论

本文建立了考虑水 - 桩 - 土相互作用的端承桩在桩顶水平动力荷载作用下动力响应的解析解。为了探讨水平动荷载作用下桩体的振动特性, 进行了一些参数化研究。主要得出 3 点结论。

(1) 水体自由表面波对桩体位移响应的影响很小, 几乎可以忽略。

(2) 水体深度的变化对桩体顶部位移有一定的影响, 且峰值位移对应的频率随着水深的增加而减小。

(3) 随着桩体和土体参数变化, 水体对混凝土桩和钢管桩位移响应都有一定影响, 且从工程角度来说, 水深小于 15 m 时对桩位移响应影响可以忽略不计。

参 考 文 献:

- [1] WANG K H, WU W B, ZHANG Z Q, et al. Vertical dynamic response of an inhomogeneous viscoelastic pile[J]. Computers and Geotechnics, 2010, **37**(4): 536 – 544.
- [2] MANNA B, BAIDYA D K. Dynamic nonlinear response of pile foundations under vertical vibration—theory versus experiment[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2010, **30**(6): 456 – 469.
- [3] GAO L, WANG K H, XIAO S, et al. Dynamic response of a pile considering the interaction of pile variable cross section with the surrounding layered soil[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2017, **41**(9): 1196 – 1214.
- [4] LIU H, WU W B, NI X Y, et al. Influence of soil mass on the vertical dynamic characteristics of pipe piles[J]. Computers and Geotechnics, 2020, **126**: 103730.
- [5] GAZETAS G, DOBRY R. Horizontal response of piles in layered soils[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1984, **110**(1): 20 – 40.
- [6] DEZI F, CARBONARI S, LEONI G. A model for the 3D kinematic interaction analysis of pile groups in layered soils[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2009, **38**(11): 1281 – 1305.
- [7] DI LAORA R, MANDOLINI A, MYLONAKIS G. Insight on kinematic bending of flexible piles in layered soil[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2012, **43**: 309 – 322.
- [8] NOVAK M. Dynamic stiffness and damping of piles[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1974, **11**(4): 574 – 598.
- [9] NOGAMI T, NOVAK M. Resistance of soil to a horizontally vibrating pile[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1977, **5**(3): 249 – 261.
- [10] 郑长杰, 丁选明, 黄旭, 等. 滞回阻尼土中大直径管桩纵向振动响应解析解[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, **33**(增刊 1): 3284 – 3290. (ZHENG Chang-jie, DING Xuan-ming, HUANG Xu, et al. Analytical solution of vertical vibration response of large diameter pipe pile in hysteretic damping soil[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2014, **33**(S1): 3284 – 3290. (in Chinese))
- [11] 栾鲁宝, 丁选明, 周仕礼, 等. 考虑竖向荷载的桩基水平振动响应解析解[J]. 建筑结构, 2015, **45**(19): 80 – 86. (LUAN Lu-bao, DING Xuan-ming, ZHOU Shi-li, et al. Analytical solution of lateral vibration response of an axial loaded pile[J]. Building Structure, 2015, **45**(19): 80 – 86. (in Chinese))
- [12] CHWANG A T, HOUSNER G W. Hydrodynamic pressures on sloping dams during earthquakes: Part 1 Momentum method[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1978, **87**(2): 335 – 341.
- [13] WILLIAMS A N. Earthquake response of submerged circular cylinder[J]. Ocean Engineering, 1986, **13**(6): 569 – 585.
- [14] 刘振宇, 李乔, 赵灿晖, 等. 圆形空心深水桥墩在地震作用下的附加动水压力[J]. 西南交通大学学报, 2008, **43**(2): 200 – 205, 212. (LIU Zhen-yu, LI Qiao, ZHAO Can-hui, et al. Earthquake-induced added hydrodynamic pressure on circular hollow piers in deep water[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2008, **43**(2): 200 – 205, 212. (in Chinese))
- [15] WANG P G, ZHAO M, DU X L, et al. Simplified evaluation of earthquake-induced hydrodynamic pressure on circular

- tapered cylinders surrounded by water[J]. Ocean Engineering, 2018, **164**: 105 – 113.
- [16] SPYRAKOS C C, XU C J. Soil-structure-water interaction of intake-outlet towers allowed to uplift[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1997, **16**(2): 151 – 159.
- [17] YE J H, JENG D S, CHAN A H C, et al. 3D integrated numerical model for Fluid-Structures-Seabed Interaction (FSSI): loosely deposited seabed foundation[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2017, **92**: 239 – 252.
- [18] YAMADA Y, KAWANO K, IEMURA H, et al. Wave and earthquake response of offshore structures with soil-structure interaction[J]. Doboku Gakkai Ronbunshu, 1988, **1988**(398): 157 – 166.
- [19] 楼云峰. 流体-结构-土体动力耦合系统数值模拟方法及应用[D]. 上海: 上海交通大学, 2015. (LOU Yun-feng. Numerical Simulation Method and Application of Fluid-Structure-Soil Dynamic Coupling System[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2015. (in Chinese))
- [20] WANG P G, ZHANG G L, ZHAO M, et al. Semi-analytical solutions for the wave-induced and vertical earthquake-induced responses of a fluid-stratified seabed-bedrock system[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2020, **139**: 106391.
- [21] 王丕光. 地震和波浪作用下水-桥梁下部结构相互作用研究[D]. 北京: 北京工业大学, 2016. (WANG Pi-guang. Study on Water-Substructure of Bridge Interaction under Earthquake Action and Wave Action[D]. Beijing: Beijing University of Technology, 2016. (in Chinese))
- [22] 付鹏, 胡安峰, 李怡君, 等. 海洋高桩基础水平振动特性分析[J]. 振动与冲击, 2019, **38**(17): 88 – 94. (FU Peng, HU An-feng, LI Yi-jun, et al. Horizontal vibration characteristics of offshore elevated piles[J]. Journal of Vibration and Shock, 2019, **38**(17): 88 – 94. (in Chinese))
- [23] 郑长杰, 丁选明, 栾鲁宝. 黏弹性地基中管桩水平动力特性分析[J]. 岩土力学, 2017, **38**(1): 26 – 32, 40. (ZHENG Chang-jie, DING Xuan-ming, LUAN Lu-bao. Analysis of lateral dynamic response of pipe pile in viscoelastic soil layer[J]. Rock and Soil Mechanics, 2017, **38**(1): 26 – 32, 40. (in Chinese))
- [24] WANG P G, XU Y D, ZHANG X L, et al. A substructure method for seismic responses of offshore wind turbine considering nonlinear pile-soil dynamic interaction[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2021, **144**: 106684.
- [25] WANG P G, ZHAO M, LI H F, et al. An accurate and efficient time-domain model for simulating water-cylinder dynamic interaction during earthquakes[J]. Engineering Structures, 2018, **166**: 263 – 273.

《岩土工程学报》征订启事

《岩土工程学报》创办于1979年, 是我国水利、土木、力学、建筑、水电、振动等六个全国性学会联合主办的学术性科技期刊。由南京水利科学研究院承办, 国内外公开发行。主要刊登土力学、岩石力学领域中能代表当今先进理论和实践水平的科学的研究和工程实践成果等。报道新理论、新技术、新仪器、新材料的研究和应用。欢迎国家自然科学基金项目及其他重要项目的研究成果向本刊投稿, 倡导和鼓励有实践经验的作者撰稿, 并优先利用这些稿件。主要栏目有黄文熙讲座、综述、论文、短文、工程实录、焦点论坛、讨论和简讯等。

本刊被《中文核心期刊要目总览》连续多年确认为核心期刊, 并在建筑类核心期刊中位于前列; 本刊被科技部“中国科技论文统计源期刊”(中国科技核心期刊)及“中国科技论文与引文数据库”收录; 本刊被中国科学院“中国科学引文数据库”收录; 本刊被“中国知网”全文收录及“中国学术期刊综合评价数据库”收录; 本刊被“工程索引 Ei Compendex 数据

库”和“日本科学技术振兴机构数据库 JST”等国际数据库收录。本刊网址 (www.cgejournal.com) 全文发布本刊所有刊载文章。

本刊读者对象为土木建筑、水利电力、交通运输、矿山冶金、工程地质等领域中从事岩土工程及相关专业的科研人员、设计人员、施工人员、监理人员和大专院校师生。

本刊为月刊, A4开, 双栏排版, 192页, 每月中旬出版, 每期定价40元, 全年定价480元。

本刊国际标准刊号ISSN 1000-4548, 国内统一刊号CN 32-1124/TU, 国内发行代号28-62, 国外发行代号MO 0520。欢迎广大读者在全国各地邮局订购, 也可在编辑部订购(不另收邮费)。编辑部订购地址: 南京虎踞关34号《岩土工程学报》编辑部; 邮编: 210024; 联系电话: 025-85829534, 85829543, 85829553, 85829556; 传真: 025-85829555; E-mail: ge@nhri.cn。

(本刊编辑部)