

DOI: 10.11779/CJGE202201009

基于顺序组件法的系统可靠度敏感性分析方法

林 鑫, 谭晓慧*, 董小乐, 杜林枫, 查甫生, 许 龙

(合肥工业大学资源与环境工程学院, 安徽 合肥 230009)

摘 要: 岩土工程一般是由多个失效模式组成的复杂系统, 且参数的不确定性对岩土工程的失效模式及可靠指标具有重要影响。为了分析参数不确定性对系统可靠度的影响, 提出基于顺序组件法的系统可靠度敏感性分析方法(SCMSA)。SCMSA利用SCM组合元件的原理, 在计算两元件并联和串联的简单系统可靠度及敏感性的基础上, 进一步计算两元件组成的组合元件与系统内其他剩余元件间的等效相关系数, 从而达到将两个元件进行组合, 简化复杂系统的目的。SCMSA的优点是在系统可靠度分析的同时, 融入相对敏感性指标的计算, 使得敏感性分析作为可靠度分析的副产品一起算出, 且该方法可适用于非正态相关变量的系统可靠度敏感性分析。最后通过简单的数值算例说明SCMSA的计算过程、计算精度及计算优势, 并将其应用于半重力式挡土墙的系统可靠度敏感性分析, 说明SCMSA可为岩土工程的风险分析与防治提供理论基础。

关键词: 顺序组件法; 系统可靠度; 敏感性; 半重力式挡土墙

中图分类号: TU470

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2022)01-0098-09

作者简介: 林 鑫(1997—), 男, 硕士研究生, 主要从事岩土工程的可靠度分析、数值模拟方面的研究工作。E-mail: linxin@mail.hfut.edu.cn。

System reliability sensitivity analysis method based on sequential compounding method

LIN Xin, TAN Xiao-hui, DONG Xiao-le, DU Lin-feng, ZHA Fu-sheng, XU Long

(School of Resources and Environmental Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: To analyze the influences of parameter uncertainty on system reliability, a system reliability sensitivity analysis method based on the sequential compounding method (SCMSA) is proposed. The SCMSA makes use of the principle of SCM combination element, and further calculates the equivalent correlation coefficient between the two components and other remaining components in the system on the basis of calculating the reliability and sensitivity of a simple system with two components in parallel or in series, so as to achieve the purpose of combining the two components and simplifying the complex system. The advantage of SCMSA is that it integrates the calculation of the relative sensitivity index into the system reliability analysis, so that the sensitivity analysis can be calculated together as a byproduct of the reliability analysis, and this method can be applied to the system reliability sensitivity analysis of the relative non-normal variables. Finally, a simple numerical example is used to illustrate the calculation process, calculation accuracy and calculation advantage of SCMSA, and it is applied to the sensitivity analysis of a system reliability of semi-gravity retaining wall, indicating that the SCMSA can provide a theoretical basis for the risk analysis and prevention of geotechnical engineering.

Key words: sequential compounding method; system reliability; sensitivity; semi-gravity retaining wall

0 引 言

岩土体所处的地质条件、环境条件、荷载条件及结构本身的几何参数和材料性能等因素都具有不确定性, 这导致了岩土工程中失效模式的不确定性。例如, 挡土墙、基础工程以及边坡工程等往往具有多个失效模式, 且各失效模式的发生需要同时满足多个不同条件。同时, 各失效模式发生的概率与基本变量的概率分布类型、统计参数及变量间的互相关性有关。因此,

岩土工程问题往往是复杂的系统问题^[1-3]。

为了考虑各种不确定性对岩土工程稳定性的影响, 需要采用系统可靠度分析方法来确定由多失效模式组成的岩土工程系统的可靠指标或失效概率, 并且采用系统敏感性分析方法来研究基本变量的不确定性

基金项目: 国家自然科学基金项目(41972278, 42030710); 国家重点研发计划项目(2019YFC1509903)

收稿日期: 2021-03-12

***通信作者** (E-mail: tanxh@hfut.edu.cn)

对岩土工程系统可靠指标或失效概率的影响程度^[4-5]。通过系统敏感性分析,可以得到各基本变量的统计参数对岩土工程可靠度的相对影响程度。这既有利于在众多基本变量中鉴别主要变量,亦有利于了解各变量的均值及标准差等统计参数的变化程度对系统可靠度的影响,从而更好地指导岩土工程的试验设计及防灾减灾等工作。

在系统可靠度方面,常用的方法有宽界法^[6]、窄界法^[7]、蒙特卡罗模拟法(MCS)^[8]、条件边界积法(PCMM)^[9]、 N 维等效平面法^[10]以及顺序组件法(SCM)^[3, 11]等。其中,宽限法及窄限法求出的可靠指标或失效概率是范围值,不便于工程应用;MCS一般需要大量的计算才能达到所需要的计算精度;PCMM无法求解混联系统的可靠度; N 维等效平面法采用等效线性域来替代系统失效域进行计算,当系统失效域非线性程度较高时,该方法不再适用;SCM在一阶可靠度分析方法(FORM)^[12]的基础上通过逐步组合元件来化简复杂系统,可计算多元件并联、串联以及混联系统的系统可靠度,是一种较为理想的进行系统可靠度分析的方法。

在系统可靠度敏感性分析方面,相关研究成果较少,常用的方法有有限差分法(FDM)^[13]和基于MCS的敏感性分析方法(MCSSA)^[14]。其中,FDM易受差分步长的影响,其计算结果仅具有参考性,而MCSSA需要对基本变量的联合概率密度函数求偏导,当基本变量间存在相关性时,偏导难以求得。此外,宋述芳等^[15]基于单失效模式的可靠度敏感性分析,建立了多失效模式串、并联系统的敏感性分析方法,但该方法不适用于混联系统。Sues等^[16]提出了在最大概率点处进行系统仿真来简化系统,并在此基础上进行了并联、串联和混合系统的可靠度及敏感性分析,然而该方法仅适用于在最大概率点做线性估计。Chun等^[17]基于SCM提出CSP进行参数敏感性分析,该方法采用SCM进行多轮反复组合获得系统失效概率对各元件失效概率的偏导,从而计算对各参数的敏感性,但从原理上敏感性分析结果并未考虑失效元件间的相关性。

鉴于目前系统可靠度敏感性分析所存在的问题,本文提出基于顺序组件法的系统可靠度敏感性分析方法(system reliability sensitivity analysis method based on sequential compounding method,简称SCMSA),该方法可在考虑基本变量的非正态性及互相关性的同时,考虑各失效元件间的相关性,并且适用于多元件并联、串联以及混联的复杂系统。本文通过一个数值算例和半重力式挡土墙算例来说明SCMSA的计算过程、计算精度以及计算效率。

1 系统可靠度分析

一般地,结构系统由若干个元件经过并联、串联或混联组成。其中,并联系统中,所有元件失效,整个系统才发生失效;串联系统中,任意一个元件失效,则整个系统发生失效;混联系统则需要根据元件间的逻辑关系来判别元件失效是否会造成系统的失效。

对于 n 维基本变量 \mathbf{X} (即 $\mathbf{X} = [X_1 X_2 \dots X_n]^T$),系统失效概率 P_{sys} 可以用多维积分来表示:

$$P_{\text{sys}} = \int_{\Omega_{\text{sys}}} f_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \Phi(-\beta_{\text{sys}}) \Rightarrow \beta_{\text{sys}} = -\Phi^{-1}(P_{\text{sys}})。(1)$$

式中 Ω_{sys} 为系统失效域,它由多个元件的失效域根据逻辑关系组成; β_{sys} 为系统可靠指标; $\Phi(\cdot)$ 为标准正态累积分布函数; $\Phi^{-1}(\cdot)$ 为标准正态累积分布的逆函数。由式(1)可知,失效概率与可靠指标一一对应,因此,本文重点推导可靠指标的相关计算公式。对于求解复杂系统的系统可靠度而言,SCM是一种较为巧妙的方法,它在采用FORM计算元件可靠度的基础上,通过逐步组合两个并联或串联元件,将复杂系统转化为简单系统。由于FORM的计算过程已在文献[12]中详细描述,因此不再赘述。本节分别介绍采用SCM进行两元件并联或串联的简单系统可靠度和多元件的复杂系统可靠度分析的过程。

1.1 简单系统可靠度分析

设简单系统由两元件并联或串联组成,且将两元件分别记为元件1和元件2,则两元件并联和串联系统的可靠指标 β_{land2} 和 β_{lor2} ,其计算公式如下^[9]:

$$\begin{aligned} \beta_{\text{land2}} &= -\Phi^{-1}[P_{\text{fland2}}] = -\Phi^{-1}[P(Z_{L1} < 0 \cap Z_{L2} < 0)] \\ &= -\Phi^{-1}[\Phi_2(-\beta_1, -\beta_2; \rho_{12})] \quad , \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\text{lor2}} &= -\Phi^{-1}[P_{\text{flor2}}] = -\Phi^{-1}[P(Z_{L1} < 0 \cup Z_{L2} < 0)] \\ &= -\Phi^{-1}[P_{\text{f1}} + P_{\text{f2}} - P_{\text{fland2}}] \\ &= -\Phi^{-1}[\Phi(-\beta_1) + \Phi(-\beta_2) - \Phi_2(-\beta_1, -\beta_2; \rho_{12})]。 \end{aligned} \quad (2b)$$

式中, Z_{L1} 和 Z_{L2} 分别为通过FORM将元件1和元件2的功能函数在各自的验算点处线性化后的功能函数; $\Phi_2(\cdot)$ 为二维标准正态累积分布函数; β_1 和 β_2 为通过FORM计算得到的元件1和元件2的可靠指标; P_{fland2} , P_{flor2} , P_{f1} 以及 P_{f2} 分别为并联系统、串联系统、元件1以及元件2的失效概率; ρ_{12} 是两元件线性化功能函数之间的相关系数:

$$\rho_{12} = \boldsymbol{\alpha}_{X1}^T \boldsymbol{\rho}_s^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{X2} \quad , \quad (3)$$

式中, $\boldsymbol{\alpha}_{X1}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_{X2}$ 为两元件在 \mathbf{X} 空间里最可能失效点处方向余弦向量, $\boldsymbol{\rho}_s$ 为随机变量的互相关系数矩阵。

由式(2)可见,两个线性元件被组合为一个等效元件,因此求解简单系统失效概率的重要步骤是求解二维积分 $\Phi_2(-\beta_1, -\beta_2; \rho_{12})$,它可由数值积分法求得。但数值积分法不易对基本变量统计参数求解偏导

数, 因此 SCM 中采用条件概率法^[11, 18]对此二维积分进行降维处理:

$$\Phi_2(-\beta_1, -\beta_2; \rho_{12}) = P(Z_{L1} < -\beta_1 | Z_{L2} < -\beta_2)P(Z_{L2} < -\beta_2). \quad (4)$$

再用正态分布函数去逼近条件概率 $P(Z_{L1}|Z_{L2} < -\beta_2)$ 对应的概率分布函数, 可得

$$P(Z_{L1} < -\beta_1 | Z_{L2} < -\beta_2) \approx F_{Z_{L1}|Z_{L2} < -\beta_2}(-\beta_1) = \Phi\left(\frac{-\beta_1 - \mu_c}{\sigma_c}\right). \quad (5)$$

则式 (4) 可改写为

$$\Phi_2(-\beta_1, -\beta_2; \rho_{12}) = \Phi\left(\frac{-\beta_1 - \mu_c}{\sigma_c}\right)\Phi(-\beta_2) = \Phi(-\beta_{12})\Phi(-\beta_2). \quad (6)$$

式中, μ_c 和 σ_c 分别是概率分布函数 $P(Z_{L1}|Z_{L2} < -\beta_2)$ 对应的正态分布函数的均值 μ_c 和标准差 σ_c ; β_{12} 为在元件 2 失效的条件下, 元件 1 的条件可靠指标。 μ_c , σ_c 及 β_{12} 的求解公式如下:

$$\mu_c = -\rho_{12}A_2, \quad \sigma_c = 1 - \rho_{12}^2B_2, \quad (7a)$$

$$\beta_{12} = (\beta_1 - \rho_{12}A_2)/\sqrt{1 - \rho_{12}^2B_2}, \quad (7b)$$

$$A_2 = \phi(-\beta_2)/\Phi(-\beta_2), \quad B_2 = A_2(-\beta_2 + A_2), \quad (7c)$$

式中, $\phi(\cdot)$ 为标准正态概率密度函数。

一般地, 将可靠指标较小的作为元件 1, 较大的作为元件 2, 会得到更为精确的计算结果^[18]。那么, 求得二维积分 $\Phi_2(-\beta_1, -\beta_2; \rho_{12})$ 后, 将式 (6) 代入式 (2) 中即可求得两元件并联系统和串联系统的可靠指标 β_{1and2} 及 β_{1or2} :

$$\beta_{1and2} = -\Phi^{-1}[\Phi(-\beta_{12})\Phi(-\beta_2)] \quad (8a)$$

$$\beta_{1or2} = -\Phi^{-1}[\Phi(-\beta_1) + \Phi(-\beta_2) - \Phi(-\beta_{12})\Phi(-\beta_2)]. \quad (8b)$$

1.2 复杂系统可靠度分析

SCM 求解 m 个元件组成的复杂系统可靠度的中心思想是逐步化简复杂系统为简单系统。具体简化过程为: 在式 (8) 计算两元件并联和串联的简单系统可靠度的基础上, 进一步计算两元件组成的组合元件与系统内其他剩余元件间的等效相关系数, 从而达到逐步将两个元件进行组合, 简化复杂系统的目的。设待组合元件为元件 1 和元件 2, 其他剩余元件为元件 k ($k = 3, 4, \dots, m$), 根据待组合元件间的逻辑关系可将组合元件与其他剩余元件间的等效相关系数的求解分为两类。

(1) 元件 1 与 2 并联

当元件 1 与 2 并联时, 一方面可由式 (2a) 的并联系统可靠指标计算式来类比得到在元件 k 失效的条件下, 组合元件 12 的条件可靠指标 $\beta_{1and2|k}$:

$$\beta_{1and2|k} = -\Phi^{-1}[\Phi_2(-\beta_{1|k}, -\beta_{2|k}; \rho_{12|k})] \quad (9)$$

另一方面, 可通过基于条件概率法的式 (7b) 来类比得到条件可靠指标 $\beta_{1and2|k}$:

$$\beta_{1and2|k} = (\beta_{1and2} - \rho_{1and2|k}A_k)/\sqrt{1 - \rho_{1and2|k}^2B_k}. \quad (10)$$

联立式 (9), (10) 可得

$$-\Phi^{-1}[\Phi_2(-\beta_{1|k}, -\beta_{2|k}; \rho_{12|k})] = \frac{(\beta_{1and2} - \rho_{1and2|k}A_k)}{\sqrt{1 - \rho_{1and2|k}^2B_k}}. \quad (11)$$

式 (9) ~ (11) 中, $\beta_{1|k}$ 和 $\beta_{2|k}$ 为在元件 k 失效的条件下, 元件 1 和元件 2 的条件可靠指标, 可由式 (7b) 类比计算; A_k 和 B_k 可由式 (7c) 类比计算; β_{1and2} 可由式 (8a) 的并联系统可靠指标计算式求得; 条件相关系数 $\rho_{12|k}$ 为^[19]

$$\rho_{12|k} = (\rho_{12} - \rho_{1k}\rho_{2k}B_k)/\left(\sqrt{1 - \rho_{1k}^2B_k}\sqrt{1 - \rho_{2k}^2B_k}\right). \quad (12)$$

因此, 式 (11) 中唯一未知数是组合元件与元件 k 之间的等效相关系数 $\rho_{1and2|k}$ 。通过反解式 (11), 并考虑到 $-1 \leq \rho_{1and2|k} \leq 1$, 即可求得未知数 $\rho_{1and2|k}$ 。

(2) 元件 1 与 2 串联

当元件 1 与 2 串联时, 一方面可由式 (2b) 的串联系统可靠指标计算式来类比得到在元件 k 失效的条件下, 组合元件 12 的条件可靠指标 $\beta_{1or2|k}$:

$$\beta_{1or2|k} = -\Phi^{-1}[\Phi(-\beta_{1|k}) + \Phi(-\beta_{2|k}) - \Phi_2(-\beta_{1|k}, -\beta_{2|k}; \rho_{12|k})]. \quad (13)$$

另一方面, 可通过基于条件概率法的式 (7b) 来类比得到条件可靠指标 $\beta_{1or2|k}$:

$$\beta_{1or2|k} = (\beta_{1or2} - \rho_{1or2|k}A_k)/\sqrt{1 - \rho_{1or2|k}^2B_k}. \quad (14)$$

联立式 (13), (14) 可得

$$-\Phi^{-1}[\Phi(-\beta_{1|k}) + \Phi(-\beta_{2|k}) - \Phi_2(-\beta_{1|k}, -\beta_{2|k}; \rho_{12|k})] = \frac{(\beta_{1or2} - \rho_{1or2|k}A_k)}{\sqrt{1 - \rho_{1or2|k}^2B_k}}. \quad (15)$$

式 (13) ~ (15) 中, $\beta_{1|k}$, $\beta_{2|k}$, A_k , B_k 以及 $\rho_{12|k}$ 同元件 1 与 2 并联时的计算结果; β_{1or2} 可由式 (8b) 的串联系统可靠指标计算式求得。因此, 式 (15) 中唯一未知数是组合元件与元件 k 之间的等效相关系数 $\rho_{1or2|k}$ 。通过反解式 (15), 并考虑到 $-1 \leq \rho_{1or2|k} \leq 1$, 即可求得未知数 $\rho_{1or2|k}$ 。

当求得组合元件的可靠指标 β_{1and2} (或 β_{1or2}) 以及组合元件与其他剩余元件的等效相关系数 $\rho_{1and2|k}$ (或 $\rho_{1or2|k}$) 后, 则可用组合元件替代元件 1 和元件 2, 从而使得系统的总元件数从 m 降为 $m-1$ 。对于剩余的 $m-1$ 个元件, 同样可设待组合元件为元件 1 和元件 2, 其他剩余元件为元件 k ($k = 3, 4, \dots, m-1$), 执行上述求解组合元件的可靠指标以及组合元件与其他剩余元件的等效相关系数的过程, 可以使得系统的总元件数从 $m-1$ 降为 $m-2$ 。以此类推, 直至系统的总元件数降为 1, 即可实现系统可靠度的求解。

1.3 组合顺序

由 1.1 和 1.2 节的分析易知, 每一次组合时均需要挑选两个待组合元件 (即元件 1 和元件 2), 因此组合时选取合适的待组合元件 (即组合顺序) 对系统可靠度的求解至关重要。为了保证 SCM 的求解精度, 本文根据 SCM 的计算特点用以下两个规则来确定组合顺序:

(1) 以可靠指标较大的元件作为条件元件: 通过观察式 (8) 的组合元件的可靠指标 β_{1and2} (或 β_{1or2}) 计算式 (11) 和式 (15) 的等效相关系数 $\rho_{(1and2)k}$ (或 $\rho_{(1or2)k}$) 计算式可知, 组合过程中需要求解的条件可靠指标有 $\beta_{1|2}$ 、 $\beta_{1|k}$ 以及 $\beta_{2|k}$ 。由于将可靠指标较大的元件作为条件元件, 会得到更为精确的计算结果, 因此当不考虑元件间的串并联关系时, $\beta_1 < \beta_2 < \beta_k$ 为最佳组合顺序 (在所有元件中可靠指标最小的元件作为元件 1, 可靠指标次小的元件作为元件 2)。

(2) 待组合元件在系统的元件逻辑关系中为等效元件: 所选取的待组合元件与其他剩余元件的逻辑关系都应一致, 此举可保证组合元件与其他剩余元件具有确定的逻辑关系。以三元件的复杂系统为例, 如图 1 所示共有 4 种形式, 分别为三元件并联 (形式 1)、两元件并联+一元件串联 (形式 2)、一元件并联+两元件串联 (形式 3) 以及三元件串联 (形式 4)。

a) 形式 1: 元件 A、B、C 之间的逻辑关系均为并联, 因此 3 个元件均为元件 1 和元件 2 的备选元件。

b) 形式 2: 元件 A、B 与元件 C 之间的逻辑关系为串联, 元件 A 与元件 B 之间的逻辑关系为并联, 因此仅有元件 A 和 B 为元件 1 和元件 2 的备选元件。

c) 形式 3: 元件 A 与元件 B、C 之间的逻辑关系为并联, 元件 B 与元件 C 之间的逻辑关系为串联, 因此仅有元件 B 和 C 为元件 1 和元件 2 的备选元件。

d) 形式 4: 元件 A、B、C 之间的逻辑关系均为串联, 因此 3 个元件均为元件 1 和元件 2 的备选元件。

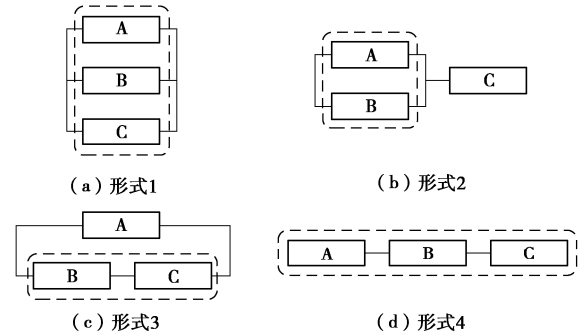
综合以上两个规则, 选取待组合元件的策略为在满足条件的备选元件组成的多个组合中, 选取可靠指标之和最小的两个元件 (即 $\beta_1 + \beta_2$ 最小) 作为此次组合的待组合元件, 其中可靠指标较小的作为元件 1, 可靠指标较大的作为元件 2。

2 系统可靠度敏感性分析

可靠度敏感性分析可研究各基本变量统计参数 (均值及标准差) 的变化对可靠指标 β 的影响程度。记基本变量 \mathbf{X} 的统计参数为 \mathbf{b} , 则可靠指标 β 的敏感性指标可用 $\partial\beta/\partial\mathbf{b}$ 表示, 并且为了消除基本变量 \mathbf{X} 中各变量单位不同造成的影响, 采用相对敏感性指标 \mathbf{S} 来执行最终的敏感性分析^[20]:

$$\mathbf{S} = \sigma_{\mathbf{X}} (\partial\beta/\partial\mathbf{b}) \quad (16)$$

取统计参数 \mathbf{b} 分别为基本变量的均值 $\boldsymbol{\mu}$ 及标准差 $\boldsymbol{\sigma}$ 时, 由式 (16) 可进一步引出 $\mathbf{S}_{\boldsymbol{\mu}} = \sigma_{\mathbf{X}} (\partial\beta/\partial\boldsymbol{\mu})$ 和 $\mathbf{S}_{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma_{\mathbf{X}} (\partial\beta/\partial\boldsymbol{\sigma})$, 二者分别为均值相对敏感性指标和标准差相对敏感性指标, 它们可区分出可靠度分析中的重要变量和非重要变量。本节先介绍采用基于 FORM 的敏感性分析方法 (FORMSA)^[21] 进行元件可靠度敏感性分析的过程, 再介绍采用 SCMSA 进行两元件并联或串联的简单系统和多元件的复杂系统的可靠度敏感性分析的过程。



注: 虚线框中的元件为元件 1 和元件 2 的备选元件。

图 1 三元件复杂系统示意图

Fig. 1 Schematic diagram of three-component hybrid system

2.1 基于 FORM 的敏感性分析方法 (FORMSA)

记原始空间、相关标准正态空间、独立标准正态空间分别为 \mathbf{X} 空间、 \mathbf{Y} 空间及 \mathbf{U} 空间。3 种空间中基本变量的转换关系为

$$\mathbf{Y} = \Phi^{-1}[F(\mathbf{X})], \quad \mathbf{U} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y} \quad (17)$$

式中 $F(\cdot)$ 为基本变量 \mathbf{X} 的累积分布函数; \mathbf{A} 是由相关系数矩阵 $\boldsymbol{\rho}_s$ 经过 Cholesky 分解得到的下三角矩阵 ($\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \boldsymbol{\rho}_s$)。

根据 \mathbf{U} 空间中可靠指标 β 的几何含义可得元件敏感性指标 $\partial\beta/\partial\mathbf{b}$ 为^[21]

$$\frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{b}} = \frac{\partial(\mathbf{u}^T \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{U}})}{\partial\mathbf{b}} = \left[\text{diag} \left(\frac{\partial\mathbf{u}^*}{\partial\mathbf{b}} \right) \right]^T \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{U}} \quad (18)$$

式中, $\text{diag}(\partial\mathbf{u}^*/\partial\mathbf{b})$ 为对角矩阵, 其中对角元素为 $\partial u_i^*/\partial b_i$ 。进一步地, 由 \mathbf{X} 空间和 \mathbf{U} 空间的方向余弦向量转换关系 $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{U}} = \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{X}}$ 及式 (17) 中基本变量转换关系, 可将式 (18) 转化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{b}} &= \text{diag} \left(\frac{\partial\Phi^{-1}[F(\mathbf{x}^*)]}{\partial\mathbf{b}} \right) (\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{X}} \\ &= \text{diag} \left(\frac{1}{\phi\{\Phi^{-1}[F(\mathbf{x}^*)]\}} \frac{\partial F(\mathbf{x}^*)}{\partial\mathbf{b}} \right) \boldsymbol{\rho}_s^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{X}} = \mathbf{w} \text{diag} \left(\frac{\partial F(\mathbf{x}^*)}{\partial\mathbf{b}} \right) \boldsymbol{\rho}_s^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{X}} \end{aligned} \quad (19)$$

式中 \mathbf{w} 为对角矩阵, 其中对角元素为 $\phi\{\Phi^{-1}[F(\mathbf{x}^*)]\}^{-1}$; $\text{diag}(\partial F(\mathbf{x}^*)/\partial\mathbf{b})$ 为对角矩阵, 其中对角元素为 $\partial F(x_i^*)/\partial b_i$ 即基本变量 X_i 的累积分布函数对统计参

数 b_i 的偏导数, 具体计算公式详见文献[20]。

显然, 当 FORM 迭代收敛后可得到方向余弦向量 α_x 以及验算点坐标 x^* , 将其代入式 (19) 即可计算元件敏感性指标 $\partial\beta/\partial b$, 进而代入式 (16) 即可计算元件的相对敏感性指标 S 。

2.2 基于 SCM 的敏感性分析方法 (SCMSA)

(1) 简单系统可靠度敏感性分析

由式 (8) 可进一步求得两元件的并联和串联系统的敏感性指标为

$$\frac{\partial\beta_{1and2}}{\partial b} = - \left[\frac{\partial\Phi(-\beta_{1|2})}{\partial b} \Phi(-\beta_2) - \Phi(-\beta_{1|2}) \phi(\beta_2) \frac{\partial\beta_2}{\partial b} \right] / \phi(\beta_{1and2}), \quad (20a)$$

$$\frac{\partial\beta_{1or2}}{\partial b} = - \left[\phi(\beta_1) \frac{\partial\beta_1}{\partial b} + \phi(\beta_2) \frac{\partial\beta_2}{\partial b} + \frac{\partial\Phi(-\beta_{1|2})}{\partial b} \Phi(-\beta_2) - \Phi(-\beta_{1|2}) \phi(\beta_2) \frac{\partial\beta_2}{\partial b} \right] / \phi(\beta_{1or2}). \quad (20b)$$

式中, 元件 1 和元件 2 的敏感性指标 $\partial\beta_1/\partial b$ 及 $\partial\beta_2/\partial b$ 可由式 (19) 求得; $\partial\Phi(-\beta_{1|2})/\partial b$ 可根据式 (7b) 进一步求偏导得到

$$\frac{\partial\Phi(-\beta_{1|2})}{\partial b} = \phi(\beta_{1|2}) \left[\frac{1}{\sqrt{1-\rho_{12}^2 B_2}} \left(-\frac{\partial\beta_1}{\partial b} + \rho_{12} \frac{\partial A_2}{\partial b} \right) + \frac{-\beta_1 + \rho_{12} A_2}{2(1-\rho_{12}^2 B_2)^{3/2}} \rho_{12}^2 \frac{\partial B_2}{\partial b} \right], \quad (21a)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial b} = \frac{-\Phi(-\beta_2) \beta_2 \phi(\beta_2) + \phi^2(\beta_2) \partial\beta_2}{\Phi^2(-\beta_2) \partial\beta_2}, \quad (21b)$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial b} = (2A_2 - \beta_2) \frac{\partial A_2}{\partial b} - A_2 \frac{\partial\beta_2}{\partial b}. \quad (21c)$$

将式 (20) 的两元件并联和串联系统敏感性指标 $\partial\beta_{1and2}/\partial b$ 和 $\partial\beta_{1or2}/\partial b$ 的计算结果代入式 (16) 即可得到相对敏感性指标 S_{1and2} 和 S_{1or2} 。

(2) 复杂系统可靠度敏感性分析

复杂系统的可靠度敏感性分析的本质为在 SCM 进行系统可靠度分析的同时, 融入相对敏感性指标的计算, 使得敏感性分析作为可靠度分析的副产品一起算出。由于 SCM 在组合元件过程中, 最繁琐的一步在于求解组合元件与其他剩余元件间的等效相关系数, 因此本文在此进行优化: 在组合过程中, 当组合元件与待组合元件 (元件 1 或元件 2) 的可靠指标和相对敏感性指标几乎一致时, 可以直接用此元件与其他剩余元件的相关系数代替组合元件与其他剩余元件的等效相关系数, 从而避免等效相关系数的求解。根据待组合元件的逻辑关系将其分为两类:

(1) 待组合元件的逻辑关系为并联: 由于两元件并联系统的可靠指标比任何一个并联元件的可靠指标大, 因此仅需判断组合元件的 β_{1and2} , $S_{\mu 1and2}$ 以及 $S_{\sigma 1and2}$

与元件 2 的 β_2 , $S_{\mu 2}$ 以及 $S_{\sigma 2}$ 是否一致, 其判断标准为二者之间的相对误差:

$$r_{d1} = \left| \frac{\beta_{1and2} - \beta_2}{\beta_{1and2}} \right|, r_{d2} = \left| \frac{S_{\mu 1and2} - S_{\mu 2}}{\max(S_{\mu 1and2})} \right|, r_{d3} = \left| \frac{S_{\sigma 1and2} - S_{\sigma 2}}{\max(S_{\sigma 1and2})} \right|. \quad (22a)$$

(2) 待组合元件的逻辑关系为串联: 由于两元件串联系统的可靠指标比任何一个串联元件的可靠指标小, 因此仅需判断组合元件的可靠指标 β_{1or2} , $S_{\mu 1or2}$ 以及 $S_{\sigma 1or2}$ 与元件 1 的 β_1 , $S_{\mu 1}$ 以及 $S_{\sigma 1}$ 是否一致, 其判别标准为二者之间的相对误差:

$$r_{d1} = \left| \frac{\beta_{1or2} - \beta_1}{\beta_{1or2}} \right|, r_{d2} = \left| \frac{S_{\mu 1or2} - S_{\mu 1}}{\max(S_{\mu 1or2})} \right|, r_{d3} = \left| \frac{S_{\sigma 1or2} - S_{\sigma 1}}{\max(S_{\sigma 1or2})} \right|. \quad (22b)$$

当式 (22) 中的 r_{d1} , r_{d2} 以及 r_{d3} 均小于某个临界值 r_s (简称 $[r_{d1}, r_{d2}, r_{d3}] < r_s$) 时, 可以认为组合元件和其中一个待组合元件的可靠指标和相对敏感性指标几乎一致, 此时可用该元件与其他剩余元件间的相关系数替代组合元件与其他剩余元件间的等效相关系数。

(一般可取 $r_s = 0.01$, 即两个数量级。)

综上分析, SCMSA 可按图 2 所示流程图执行。

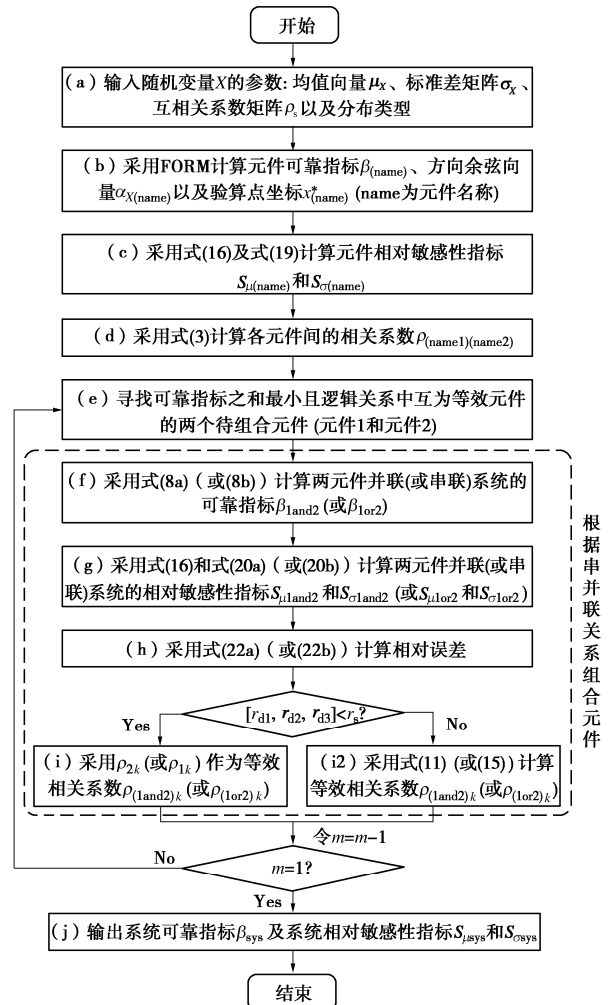


图2 SCMSA 的流程图

Fig. 2 Flow chart of SCMSA

表 1 元件 (组合元件) 的可靠指标、相对敏感性指标
Table 1 Reliability and relative sensitivity indexes of components (combination components)

元件 (组合元件)	A	B	C	D	E	BE	CD	BCDE	ABCDE
$\beta_{(name)}$	1.556	0.466	1.405	1.118	0.979	0.979	0.944	1.158	1.625
$S_{\mu(name)}(1)$	0.707	0.380	0.986	0.447	0.213	0.218	0.672	0.413	0.644
$S_{\mu(name)}(2)$	0.707	0.925	0.169	0.894	0.977	0.956	0.677	0.850	0.739
$S_{\sigma(name)}(1)$	-0.778	-0.067	-1.364	-0.224	-0.044	-0.045	-0.659	-0.305	-0.676
$S_{\sigma(name)}(2)$	-0.778	-0.398	-0.040	-0.894	-0.935	-0.887	-0.629	-0.789	-0.781

注: 虚线圈为组合元件; 实线圈为系统可靠指标及相对敏感性指标计算结果。

需要说明的是, SCMSA 的计算精度依赖于 FORM 中系统响应对基本变量梯度的计算精度。对于高度非线性的元件功能函数, 可通过采用差分点数较多的差分方法 (如 5 点或 7 点差分方法) 代替常规的中心差分法来提高梯度的求解精度^[22]。

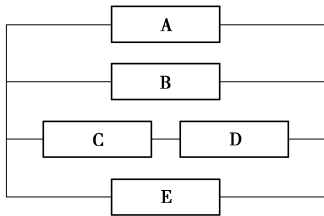


图 3 五元件复杂系统示意图

Fig. 3 Schematic diagram of five-component hybrid system

3 算例分析

3.1 数值算例

图 3 为 5 个元件组成的非线性混联系统, 其中, 元件 C、D 串联后再与元件 A、B、E 并联。各元件的功能函数见式 (23), 基本变量 X_1 和 X_2 服从相互独立的正态分布, 均值分别为 4 和 2, 标准差为 1 和 1。

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= X_1 + X_2 - 3.8, \quad Z_2 = X_1 X_2 - 6, \\ Z_3 &= X_1^3 + X_2^2 - 21, \quad Z_4 = X_1 + 2X_2 + 5.5, \\ Z_5 &= (X_1 + 1)X_2 - 5, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

针对图 3 所示的五元件混联系统, 按图 2 所示的流程图进行系统可靠度分析及敏感性分析。元件的组合过程见表 1 和图 4, 该方法通过一步步的组合元件来简化复杂系统, 从而灵活地处理元件间的串并联关系, 并将敏感性分析结果作为可靠度分析结果的副产

品一并输出。对于该算例而言, 先将元件 A 和 B 组合为元件 AB, 然后将元件 C 和 D 组合为元件 CD, 接着将元件 AB 和 CD 组合为元件 ABCD, 最后将元件 ABCD 和 E 组合为元件 ABCDE。元件 ABCDE 的可靠指标及相对敏感性指标即为整个系数的可靠指标及敏感性指标。由表 1 可知, 系统可靠指标 $\beta_{sys} = 1.625$, 它与 MCS 得到的 1.580 (模拟次数为 10^7 次) 十分接近。系统相对敏感性指标 $S_{\mu sys} = [0.644 \ 0.739]$ 以及 $S_{\sigma sys} = [-0.676 \ -0.781]$, 与 CSP^[17]和 FDM^[13]的对比结果见图 5。对于 CSP 法, 需要进行 m 轮的组合, 为了避免不当的组合顺序对计算结果的影响, 设各轮中组合顺序的方案与 SCMSA 一致 (1.3 节)。对于 FDM, 差分过程中的可靠指标均由 MCS^[8]进行计算 (模拟次数为 10^7 次), 差分步长为 $0.1\sigma_{X_i}$ ($i = 1, 2$)。

从图 5 可看出, 3 种方法结果十分一致, 说明计算结果的正确性, 在影响方向方面, X_1 和 X_2 的均值相对敏感性指标为正, 代表系统可靠指标 β_{sys} 随着 X_1 和 X_2 均值的增大而增大, X_1 和 X_2 的标准差相对敏感性指标为负, 代表系统可靠指标 β_{sys} 随着 X_1 和 X_2 标准差的增大而减小; 在影响程度的大小方面, X_2 的均值及标准差相对敏感性指标的绝对值均略大于 X_1 , 说明基本变量 X_2 对系统可靠指标 β_{sys} 的影响程度比 X_1 大。

与 CSP 相比, SCMSA 避免了反复进行组合元件, 即仅需 1 轮组合, 而 CSP 法需要 m 轮组合并且在原理上忽略了各失效元件间的相关性, 这说明 SCMSA 编程更容易且具有比 CSP 更精确的计算结果; 与 FDM 相比, SCMSA 无需额外的计算量来进行系统敏感性分析, 因此计算效率高, 但 FDM 则需要大量的随机模拟, 若应用到实际工程中计算量十分庞大。

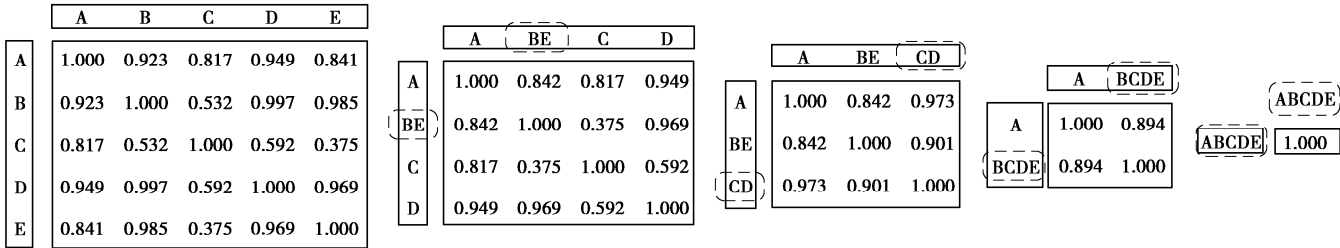


图 4 五元件混联系统组合过程中的相关系数矩阵

Fig. 4 Correlation coefficient matrix in combination process of five-component hybrid system

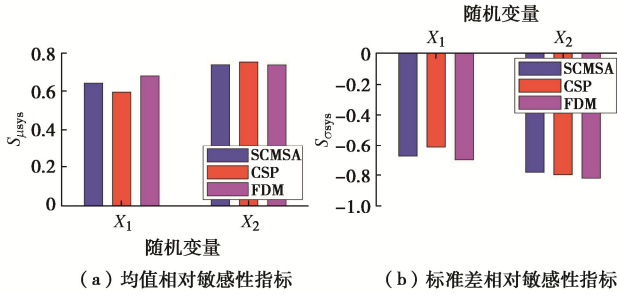


Fig. 5 Relative sensitivity indexes of SCMSA, CSP and FDM systems

3.2 半重力式挡土墙算例

(1) 算例介绍

如图 6 所示,某半重力式挡土墙位于硬黏土之上,墙背竖直光滑,墙高 H 为 6 m,墙的顶宽和底宽分别为 0.5, 1.95 m ($a = 0.5$ m, $b = 1.45$ m)。图中 $c_{\text{hard}} = 100$ kPa 和 $\varphi_{\text{hard}} = 30^\circ$ 为硬黏土的黏聚力和内摩擦角, γ_{wall} 为挡土墙的重度, c_{soil} , φ_{soil} 和 γ_{soil} 分别为挡土墙后填土的黏聚力、内摩擦角和重度。

半重力式挡土墙的失效可分为 3 种模式,分别为滑移失效模式即水平抗力不足导致滑移破坏(模式 1)、倾覆失效模式即抗倾覆力矩不足导致倾覆破坏(模式 2)以及承载力失效模式即地基承载力不足导致失稳(模式 3)。3 种模式的安全系数 F_{s1} , F_{s2} 以及 F_{s3} 计算公式如下^[1, 23]:

$$F_{s1} = [c_{\text{hard}}(a+b)/3 + (W_1 + W_2) \tan(2\varphi_{\text{hard}}/3)]/P_a, \quad (24a)$$

$$F_{s2} = (W_1 R_1 + W_2 R_2)/(P_a H_0), \quad (24b)$$

$$F_{s3} = q_u/q_{\text{max}}. \quad (24c)$$

式中 $W_1 = \gamma_{\text{wall}} bH/2$ 和 $W_2 = \gamma_{\text{wall}} aH$ 分别为挡土墙三角形区域和矩形区域的重力; P_a ($P_a \geq 0$) 为主动土压力,可由式 (25a) 计算; R_1 和 R_2 分别为 W_1 和 W_2 在 O 点处的力臂; H_0 ($H_0 \geq 0$) 为主动土压力与硬黏土表面的距离,可由式 (25b) 计算; q_u 为挡土墙的极限承载力,本文取 350 kPa; q_{max} 为挡土墙施加在硬黏土上的最大压力值,可由式 (25c) 计算。

$$P_a = \gamma_{\text{soil}} H^2 K_a / 2 - 2c_{\text{soil}} H \sqrt{K_a} + 2c_{\text{soil}}^2 / \gamma_{\text{soil}}, \quad (25a)$$

$$H_0 = [H - 2c_{\text{soil}} / (\gamma_{\text{soil}} \sqrt{K_a})] / 3, \quad (25b)$$

$$q_{\text{max}} = [(W_1 + W_2) / (a+b)] [1 + 6e / (a+b)]. \quad (25c)$$

式中, K_a 和 e 为主动土压力系数和荷载的偏心距:

$$K_a = \tan^2(\pi/4 - \varphi_{\text{soil}}/2), \quad (26a)$$

$$e = |(a+b)/2 - (W_1 R_1 + W_2 R_2 - P_a H_0) / (W_1 + W_2)|. \quad (26b)$$

为了避免挡土墙底部出现拉应力,应当满足几何条件 $e \leq (a+b)/6$ 。对半重力式挡土墙进行系统可靠度及敏感性分析时,视 c_{soil} , φ_{soil} , γ_{soil} 以及 γ_{wall} 为随机变量,其参数取值见表 2,其中墙后填土的黏聚力与内摩擦角之间的相关系数 $\rho_{c_{\text{soil}}-\varphi_{\text{soil}}} = -0.35$,显然,如图 7

所示,半重力式挡土墙的可靠度及敏感性分析问题属于复杂系统问题,3 种失效模式共计 7 个元件。

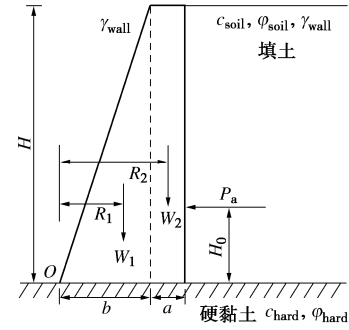


图 6 半重力式挡土墙示意图

Fig. 6 Schematic diagram of semi-gravity retaining wall

表 2 随机变量的概率分布

Table 2 Probability distribution of random variables

变量 (单位)	c_{soil} /kPa	φ_{soil} /($^\circ$)	γ_{soil} /($\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$)	γ_{wall} /($\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$)
均值	14	30	21	18.5
变异系数	0.3	0.1	0.1	0.05
标准差	4.2	3	2.1	0.925
分布类型	LN	LN	LN	LN

注: LN 表示对数正态分布。

(2) 系统可靠度敏感性分析

针对图 7 所示的半重力式挡土墙的混联系统,按图 2 所示的流程图进行系统可靠度分析及敏感性分析,使得系统总元件数 m 从 7 降为 1,实现系统可靠度及敏感性分析。在可靠度方面,SCM 和 MCS 的可靠指标 β_{sys} 分别为 1.842 和 1.910,二者十分接近。在敏感性方面,将 SCMSA 的敏感性分析结果与 CSP 和 FDM 的对比见图 8,其中参数设置与数值算例一致,容易看出 3 种方法的计算结果几乎一致,说明 SCMSA 的正确性。

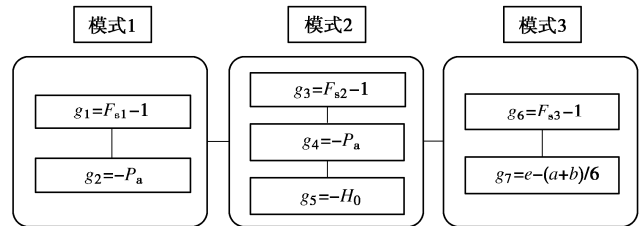


图 7 半重力式挡土墙的元素功能函数及其逻辑关系示意图

Fig. 7 Schematic diagram of component performance functions

and their logic relationship of semi-gravity retaining wall

从敏感性分析结果中容易看出,对于均值相对敏感性指标:由图 8(a)可知,在影响方向方面, γ_{soil} 的均值相对敏感性指标为负,代表系统可靠指标 β_{sys} 随着 γ_{soil} 均值的增大而减小, c_{soil} , φ_{soil} 以及 γ_{wall} 的均值相对敏感性指标为正,代表系统可靠指标 β_{sys} 随着 c_{soil} , φ_{soil} 以及 γ_{wall} 均值的增大而增大。在影响程度的大小方

面,根据均值相对敏感性指标的绝对值大小进行对比,可以看出 c_{soil} 的均值对系统可靠指标 β_{sys} 的影响程度最大,而 φ_{soil} 和 γ_{soil} 的均值对系统可靠指标 β_{sys} 的影响程度次之, γ_{wall} 的影响最小。对于标准差相对敏感性指标:由图8(b)可知,在影响方向方面,所有变量的标准差相对敏感性指标均为负,代表系统可靠指标 β_{sys} 随着变量标准差的增大而减小,说明参数的不确定性增大会导致挡土墙更容易发生失效。在影响程度的大小方面,同样可根据标准差相对敏感性指标的绝对值大小进行对比,影响程度由大到小依次顺序为 c_{soil} , γ_{soil} , φ_{soil} 和 γ_{wall} 。

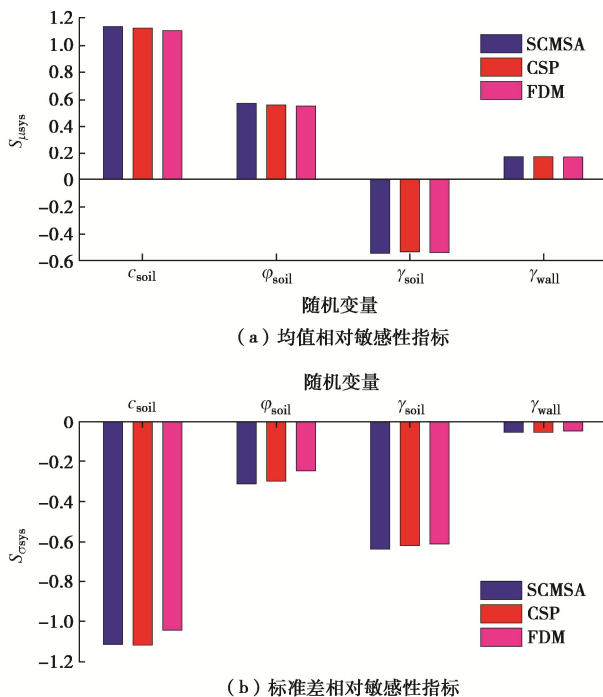


图8 半重力式挡土墙的系统相对敏感性指标

Fig. 8 System relative sensitivity indexes for semi-gravity retaining wall

综上所述, c_{soil} 为重要变量, φ_{soil} 和 γ_{soil} 为次要变量, γ_{wall} 为不重要变量,根据此结果可对挡土墙的稳定性评价及防治提供指导,亦说明提出方法对岩土工程具有实际意义。

4 结 论

(1)提出了基于顺序组件法的系统可靠度敏感性分析方法(SCMSA),该方法可适用于相关非正态的基本变量,不仅计算效率高而且敏感性分析结果考虑失效元件间的相关性。

(2)以简单的数值算例详细说明SCMSA的计算过程,并将计算结果与CSP和FDM的计算结果进行对比,说明提出方法的正确性及优势;

(3)将SCMSA应用于半重力式挡土墙的系统可

靠度敏感性分析中,求得基本变量及其概率统计参数的不确定性对系统可靠指标或失效概率的影响方向及程度,说明提出方法可为岩土工程的风险分析与防治提供理论基础。

参考文献:

- [1] 杜永峰, 余钰, 李慧. 重力式挡土墙稳定性的结构体系可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2008, 30(3): 349 - 353. (DU Yong-feng, YU Yu, LI Hui. Analysis of reliability of structural systems for stability of gravity retaining walls[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, 30(3): 349 - 353. (in Chinese))
- [2] WANG Y. Reliability-based design of spread foundations by Monte Carlo simulations[J]. Géotechnique, 2011, 61(8): 677 - 685.
- [3] JOHARI A, RAHMATI H. System reliability analysis of slopes based on the method of slices using sequential compounding method[J]. Computers and Geotechnics, 2019, 114: 103116.
- [4] 谭晓慧, 王建国, 胡晓军, 等. 边坡稳定的模糊随机有限元可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(7): 991 - 996. (TAN Xiao-hui, WANG Jian-guo, HU Xiao-jun, et al. Fuzzy random finite element reliability analysis of slope stability[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, 31(7): 991 - 996. (in Chinese))
- [5] 宛良朋, 许阳, 李建林, 等. 岩体参数敏感性分析对边坡稳定性评价影响研究——以大岗山坝肩边坡为例[J]. 岩土力学, 2016, 37(6): 1737 - 1744. (WAN Liang-peng, XU Yang, LI Jian-lin, et al. Sensitivity analysis of the effect of rock mass parameters on slope stability evaluation: a case study of abutment slope of Dagangshan[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, 37(6): 1737 - 1744. (in Chinese))
- [6] CORNELL C A. Bounds on the reliability of structural systems[J]. Journal of the Structural Division, 1967, 93(1): 171 - 200.
- [7] DITLEVSEN O. Narrow reliability bounds for structural systems[J]. Journal of Structural Mechanics, 1979, 7(4): 453 - 472.
- [8] 贡金鑫. 工程结构可靠度计算方法[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2003. (GONG Jin-xin. Computational Methods for Reliability of Engineering Structures[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2003. (in Chinese))
- [9] PANDEY M D. An effective approximation to evaluate multinormal integrals[J]. Structural Safety, 1998, 20(1): 51 - 67.

- [10] 李典庆, 周创兵, 胡 冉. 基于 n 维等效方法的岩质边坡楔体稳定体系可靠度分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, **28**(7): 1415 - 1424. (LI Dian-qing, ZHOU Chuang-bing, HU Ran. System reliability analysis of rock slope wedge stability based on n -dimensional equivalent method[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, **28**(7): 1415 - 1424. (in Chinese))
- [11] KANG W, SONG J. Evaluation of multivariate normal integrals for general systems by sequential compounding[J]. Structural Safety, 2010, **32**(1): 35 - 41.
- [12] HASOFER A M, LIND N C. Exact and invariant second-moment code format[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1974, **100**(1): 111 - 121.
- [13] MELCHERS R E, AHAMMED M. A fast approximate method for parameter sensitivity estimation in Monte Carlo structural reliability[J]. Computers & Structures, 2004, **82**(1): 55 - 61.
- [14] 杨 杰. 结构可靠度计算方法及灵敏度分析研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2012. (YANG Jie. Research on Structure Reliability Calculation Method and Sensitivity Analysis[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2012. (in Chinese))
- [15] 宋述芳, 吕震宙. 系统可靠性灵敏度分析方法及其应用研究[J]. 机械强度, 2007, **29**(1): 53 - 57. (SONG Shu-fang, LÜ (Zhen-zhou. Reliability sensitivity analysis method for structural system and its application[J]. Journal of Mechanical Strength, 2007, **29**(1): 53 - 57. (in Chinese))
- [16] SUES R H, CESARE M A. System reliability and sensitivity factors via the MPPSS method[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2005, **20**(2): 148 - 157.
- [17] CHUN J, SONG J, PAULINO G H. Parameter sensitivity of system reliability using sequential compounding method[J]. Structural Safety, 2015, **55**: 26 - 36.
- [18] 王笑纷, 吴彰敦. 结构体系可靠度分析中二维标准正态分布函数的近似计算[J]. 水力发电学报, 2005, **24**(3): 39 - 43. (WANG Xiao-fen, WU Zhang-dun. An approximation to bi-normal probability distribution function in reliability analysis of structural system[J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2005, **24**(3): 3943. (in Chinese))
- [19] BIRNBAUM Z W. Effect of linear truncation on a multinormal population[J]. The Annals of Mathematical Statistics, 1950, **21**(2): 272 - 279.
- [20] 秦 权, 林道锦, 梅 刚. 结构可靠度随机有限元——理论及工程应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006. (QIN Quan, LIN Dao-jin, MEI Gang. Theory and Application Reliability Stochastic Finite Element Methods[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006. (in Chinese))
- [21] TAN X H, SHEN M F, JUANG C H, et al. Modified robust geotechnical design approach based on the sensitivity of reliability index[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2020, **60**: 103049.
- [22] 谭晓慧. 边坡稳定的非线性有限元可靠度分析方法研究[D]. 合肥: 合肥工业大学, 2007. (TAN Xiao-hui. Research on the Method of Nonlinear FEM Reliability Analysis of Slope Stability[D]. Hefei: Hefei University of Technology, 2007. (in Chinese))
- [23] LI D Q, ZHANG L, TANG X S, et al. Bivariate distribution of shear strength parameters using copulas and its impact on geotechnical system reliability[J]. Computers and Geotechnics, 2015, **68**: 184 - 195.