DOI：10.11779/CJGE2021S2064

悬链线法计算桩承式加筋路堤的土拱形态

王一楠[1]，陈梅君[2]
（1. 中建安装集团有限公司，江苏 南京 210046；2. 苏交科集团股份有限公司，江苏 南京 210017）

摘 要：针对桩承式加筋路堤中的土拱效应问题，构建了悬链线土拱计算模型。采用平面土拱及拱下空洞假设，推导了悬链线土拱的方程表达式，给出了计算模型下土拱高度及形态的求解方法。采用该方法计算所得土拱高度、土拱形态及桩顶应力与实测结果吻合较好。路基填料内摩擦角增大时，土拱高度由0.36倍增大至0.72倍桩间净距。宽距修正系数从0.3增大至1时，土拱高度迅速由0.6倍增大至2.4倍桩间净距。不同的桩（帽）宽与桩间净距组合是引起不同学者所得土拱高度差异的内在原因。

关键词：桩承式加筋路堤；土拱效应；悬链线模型；土拱高度；土拱形态
中图分类号：TU473 **文献标识码**：A **文章编号**：1000－4548(2021)S2－0276－04

作者简介：王一楠(1991—)，男，硕士，主要从事建筑工程、基础工程等方面的研究。E-mail: 114831698@zju.edu.cn。

Forms of soil arch in GRPS embankment by catenary method

WANG Yi-nan[1], CHEN Mei-jun[2]
(1.China Construction Industrial & Energy Engineering Group Co., Ltd., Nanjing 210046, China; 2. Jsti Group, Co., Ltd., Nanjing 210017, China)

Abstract: The model for calculating catenary soil arch is established aimed at solving the problem of soil arch effect in GRPS embankment. The relevant equation is derived based on the hypothesis of plain strain and real cavity below the arch and solved to obtain the height and shape of soil arch. Several test results are compared in height and shape of soil arch and soil stress of pile top. The calculated results are in good agreement with the measured ones. The ratio of the soil arch height to the net distance between the piles increases from 0.36 to 0.72 when the friction angle of subgrade fill magnifies. The correction factor of width and space increasing from 0.3 to 1 will cause the sharp acceleration of soil arch height from 0.6 to 2.4. The difference of width and space combinations is the internal reason that researchers obtaine different soil arch heights.

Key words: GRPS embankment; soil arch effect; catenary model; soil arch height; soil arch form

0 引 言

中国软土分布十分广泛，采用桩承式加筋路堤（GRPS）已有许多成功案例。土拱效应是主要的荷载传递及变形机理，其计算的准确性对路堤设计至关重要。目前已取得共识的是土拱高度与桩间净距（$s-a$）有关，但不同学者对土拱的高度看法却存在较大差异，不同模型的计算结果差异明显。土拱高度的确定主要有以下4类方法：①经典设计计算方法主观假设土拱高度：Terzaghi 的土拱理论采用柱状土拱假设，土拱高度为2倍（$s-a$）；Carlson 楔形体土拱理论假定土拱高度为1.87倍（$s-a$）；Guido 等[1]的金字塔土拱理论中取土拱高度为0.71倍（$s-a$）；H&R 半球壳土拱理论[2]假设土拱高度为0.5倍（$s-a$）。②现场测试时以桩顶应力大幅增大而桩间土压力增长缓慢位置为土拱高度，徐正中等[3]对申苏浙皖高速桩承式加筋路堤路段现场实测后得到土拱高度为1.0～1.4倍（$s-a$）；蔡德钩等[4]现场实测了武广客专某桩承式路基，当路堤填筑高度超过1.6～1.9倍（$s-a$）时，桩顶与桩间土压力增长规律差异显著。③模型试验以桩顶及桩间土应力偏离理论自重应力的位置为土拱高度。费康等[5]对三维模型试验的竖向应力沿高度方向的分布进行了研究，认为土拱高度为1.25～1.30倍（$s-a$）；陈仁朋等[6]基于全比尺模型试验，在2倍（$s-a$）高度上桩顶土压力急剧增大，为土拱高度。④从实际应用出发，判定桩顶土与桩间土间的差异沉降无显著差异位置为土拱高度。余闯等[7]采用有限元法对前人的三维室内模型试验进行分析，认为1.47倍（$s-a$）以上桩土差异沉降较小；Chen 等[8]对室内二维模型试验测得土拱高度约为1.4～1.6倍（$s-a$）；曹卫平等[9]依托台缙高速公路对试验段采用现场测试方法认为3.5倍（$s-a$）为形成完整土拱的高度。可以看出，至今尚没有一种理论能准确描述桩承式加筋路堤中土拱的形态，也无法解

收稿日期：2021－08－16

释不同文献中土拱高度差异。本文采用悬链线模拟土拱形态，给出桩承式加筋路堤的计算理论，并尝试对前人的各种计算、实测结果进行合理的解释。

1　计算假设

桩承式加筋路堤发挥承载能力的核心机理是土拱效应，最早由 Terzaghi 活动门试验验证。上承式实腹拱桥与路堤中的土拱在形态及受力特征上相似。受力上拱桥以拱承重将上部竖向荷载转化为轴向压应力，而剪应力和弯矩处处为零。设计时悬链线是拱桥的最合理拱轴线，而桩承式加筋路堤中的土拱（如图 1 所示）采用平面土拱假设时其受力特征与拱桥几近一致。赖汉江[10]通过模型箱试验得到路堤填料内的剪切面、沉降及侧向位移分布均为 0.8 倍（s–a）悬链线。但拱结构是“主动”形成而土拱是桩土差异沉降而“被动”形成，其次拱圈以下是真实净空，而土拱下方土体是否对拱起支撑作用则关系到土拱的受力和形态。芮瑞等[11]通过控制桩土沉降差模拟路基填筑过程，发现特定限值后继续增大不会影响土拱形态。

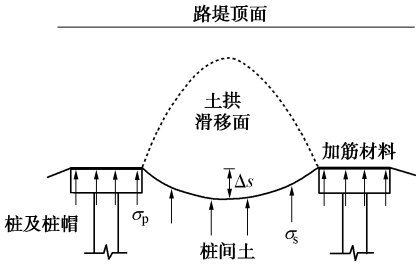

图 1　桩承式加筋路堤中的土拱

Fig. 1 Soil arch in GRPS embankment

本文采用平面土拱假设及悬链线形态假设计算土拱效应。考虑形成稳定土拱时下部土体脱离（拱下空洞），桩土沉降差不会对土拱的受力和形态产生影响。赖汉江[10]对比加筋和未加筋两种工况，认为是否加筋仅影响桩顶受力而对土拱的形态影响不大，因此本文在计算土拱形态时不考虑加筋的影响。

2　计算模型

2.1　模型公式

土拱的载荷集度由拱顶到拱脚连续分布、逐渐增大，其恒载压力线是一条悬链线。悬链线土拱计算模型如图 2 所示，建立 $O-x-y_1$ 坐标系，H，f，h 分别代表路基高度、土拱高度、土拱拱顶距路堤顶面距离，l_1 为 0.5 倍的桩间净距，H_g 代表拱顶处所受水平推力，g_j，g_d 分别代表土拱拱脚和拱顶的载荷集度，土拱上任意一点的坐标为 (x, y_1)，水平倾角表示为 α_1。g_x 为任意一点处的载荷集度：

$$g_x = g_d + \gamma y_1 \quad 。 \tag{1}$$

在悬链线土拱模型中，假设土拱上弯矩处处为零仅存在轴向力。图中任意截面对拱脚取矩，可以得到

$$y_1 = M_x / H_g \quad 。 \tag{2}$$

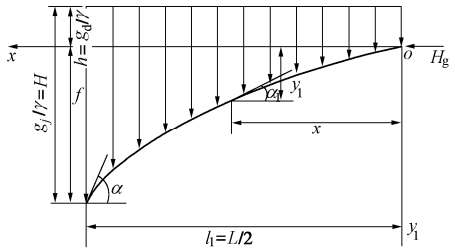

图 2　悬链线土拱形态计算模型

Fig. 2 Model for catenary soil arch

两边同时对 x 求二阶导数得到微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{H_g} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} = \frac{g_x}{H_g} \quad 。 \tag{3}$$

当 $y_1 = f$ 时 $g_j = g_d + \gamma f$，定义 m 拱轴系数为 $m = \frac{g_j}{g_d}$，由于路堤中填料通常为同种材料，可化简为 $m = \frac{g_j}{g_d} = \frac{\gamma H}{\gamma h} = \frac{H}{h}$，因此 $\gamma = (m-1)\frac{g_d}{f} = \frac{g_d}{h}$，引入式（1）中，可得到任意一点的载荷集度：

$$g_x = g_d \left[1 + \frac{y_1}{h} \right] \quad 。 \tag{4}$$

将式（4）代入式（3）中，并引入参数 $k^2 = \frac{l_1^2 g_d}{H_g h}$ 后原微分方程可变形为

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}\left(\frac{x}{l_1}\right)^2} = \frac{l_1^2 g_d}{H_g h}\left(1 + \frac{y_1}{h}\right) = \frac{l_1^2 g_d}{H_g} + k^2 y_1 \quad 。 \tag{5}$$

求解上述微分方程后并考虑边界条件当 $x = 0$ 时，$y_1 = 0$ 且 $\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = 0$ 即可得到悬链线的方程：

$$y_1 = h\left[\cosh\left(\frac{k}{l_1}x\right) - 1 \right] \quad , \tag{6}$$

式中，$\cos h\left(\frac{k}{l_1}x\right) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{k}{l_1}x} + \mathrm{e}^{-\frac{k}{l_1}x}}{2}$。对该方程进行求导，即可得到拱轴线处任意截面的水平倾角 α_1：

$$\tan\alpha_1 = y_1' = \frac{hk}{l_1}\sin h\left(\frac{k}{l_1}x\right) \quad , \tag{7}$$

式中，$\sin h\left(\frac{k}{l_1}x\right) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{k}{l_1}x} - \mathrm{e}^{-\frac{k}{l_1}x}}{2}$。对于拱脚截面，将 $x = l_1, y_1 = f$ 代入式（6），（7）中可得

$$\cos k = m \quad , \tag{8}$$

$$\tan\alpha = \frac{hk}{l_1}\sin h(k) \quad 。 \tag{9}$$

2.2 求解方法

拱桥设计时 f，l_1 已知，按照 $m \to k \to y_1$ 的顺序设计计算，而土拱中土拱高度未知。芮瑞通过模型试验得到滑移面水平面倾角大于朗肯理论，认为荷载引起土体主应力偏转，通过多组模型试验统计拟合，本文引入宽距修正系数 $R = a/L$ 即可得到

$$\alpha = 4.5831R^2 + 17.879R + 45^\circ + \varphi/2 \quad , \tag{10}$$

式中，$L = s - a$ 代表桩间净距。根据莫尔应力圆，悬链线土拱中单桩所分担的竖向荷载随着应力下降，水平倾角会增大。公式中 R 大于 1 时，函数的增大明显不符合客观规律。芮瑞在试验中所采用的 R 小于 1，同时桩帽的尺寸大于桩间净距对实际工程是不利的。芮瑞在试验中所测得的角度均小于 80°，实际当拱脚倾角大于 80° 后，其正切值会迅速增大影响后续计算精度，因此应限制该拱脚倾角极大值为 80°，尽量避免 R 超过 1，超限的 R 应反算。将 α 引入悬链线土拱模型中，代入式（8），（9）可以得到

$$(l_1/H)\tan\alpha = k\tanh(k) \quad 。 \tag{11}$$

式中，$\tanh k = \dfrac{e^k - e^{-k}}{e^k + e^{-k}}$，引入参数 $n = \dfrac{l_1}{H}\tan\alpha$。式（11）无法直接表达为 $k = f(n)$。对众多文献分析绝大多数 $k \in (0.5,3)$，用 $y = 0.03x^2 + x - 0.225, x \in (0.5,3)$ 来拟合 $y = x\tanh(x)$ 时，$R^2 = 0.9978$ 效果良好，并方便方程求解。通过求根公式并省略其负根求得

$$k = \frac{\sqrt{1.027 + 0.12n} - 1}{0.06} \quad 。 \tag{12}$$

将式（10），（11），（12）联立即可求得土拱高度：

$$f = H\left(1 - \frac{1}{\cos hk}\right) \quad 。 \tag{13}$$

2.3 公式在桩承式路堤中的应用

在桩承式加筋路堤中土拱形态可以用 m，n，k，f 等参数进行描述，半侧土拱自重可按下式计算：

$$V_g = \int_0^{l_1} g_x \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{m^2 - 1}}{k}\gamma h l_1 \quad 。 \tag{14}$$

平面假设土拱效应中任一单桩所分担的荷载为单位宽度下桩顶土和相邻的两个半拱的自重。代入可以得到单桩所承担的总荷载及单桩的竖向平均应力以及相应的荷载分担比：

$$P_p = a^2\gamma H + 2sV_g \quad , \tag{15}$$

$$\sigma_p = \frac{a^2\gamma H + 2sV_g}{a^2} \quad , \tag{16}$$

$$\frac{P_p}{P_0} = \frac{\gamma H + 2sV_g/a^2}{\gamma H s^2} \quad 。 \tag{17}$$

3 算例验证

赖汉江[10]采用室内二维模型试验研究土拱效应，路堤填料长江江砂内摩擦角 37.86°，路堤高度 0.6 m，桩宽 0.075 m，桩间净距 0.3 m。得到如图 3 所示的土拱实测照片及路堤填料沉降分布规律。参数代入悬链线模型，仅改变坐标位置将实测值与函数图像进行对比，悬链线方程能够准确的描述土拱形态。

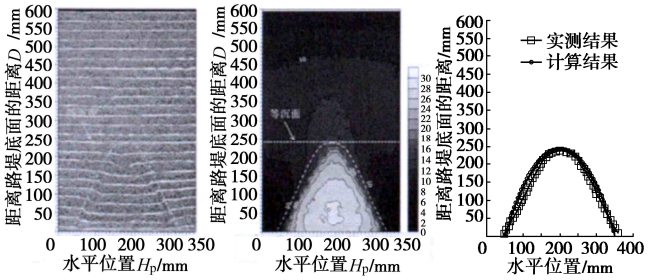

图 3 土拱悬链线与实测对比

Fig. 3 Soil arch catenary and test results

徐正中等[3]对申苏浙皖高速公路进行现场测试，K18+223 断面正方形管桩布桩，桩径 0.4 m，桩间距 2.5 m，桩帽宽 1.3 m，路基填筑高度 4.5 m，填料内摩擦角 35°，平均重度 22 kN/m^3。按本文模型计算，将拱脚倾角 87.25° 修正限制为 80°，结果如表 1 所示。土拱高度与现场测试的 1.60 m 偏差较小，桩顶平均竖向应力也与现场测试较为接近。说明本文悬链线土拱模型进行理论分析是有效且准确的。

表 1 悬链线土拱模型计算结果数据及对比

Table 1 Soil arch catenary and test results

n	k	m	$f_{计算}$ /m	$f_{实测}$ /m	$\sigma_{p计算}$ /kPa	$\sigma_{p实测}$ /kPa
0.76	0.95	1.49	1.48	1.60	208.9	238.4

4 影响因素分析

土拱高度表达为 $f = g(\varphi, R)$，影响因素为填料内摩擦角以及宽距修正系数。引用费康等[5]的室内模型试验数据进行参数分析，结果如图 4 所示，图中纵坐标 n 表示土拱高度与桩间净距的比值。随着内摩擦角增大，n 渐渐增大且在 40° 时与文献模型试验结果一致。同时内摩擦角的影响有限，n 的范围仅限于 0.36～0.72。

通常桩宽、桩帽会小于桩间净距，因此以桩宽与桩间净距相等时作为考虑的极限情况（R=1）。如图 5 表示不同宽距修正系数下路基土拱高度（内摩擦角取 40°）。随着 R 增大，土拱高度呈加速增大趋势。当 R 取 0.3 时，土拱的高度仅为 0.6 倍桩间净距，而当桩间净距缩小时，土拱的高度迅速增大本例中最多能够达到 2.4 倍。对比众多学者的不同试验结果，不同的土拱高度多数符合该区间范围，差异体现在不同设计参数上。采用悬链线土拱模型可以将不同学者的理论、试验结果进行统一解释。

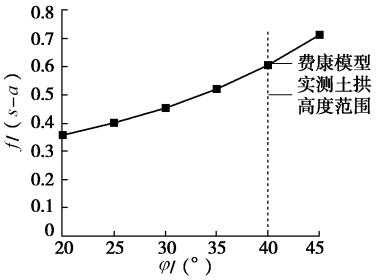

图 4 不同的填料内摩擦角对应的土拱高度

Fig. 4 Soil arch heights with different internal frictional angels

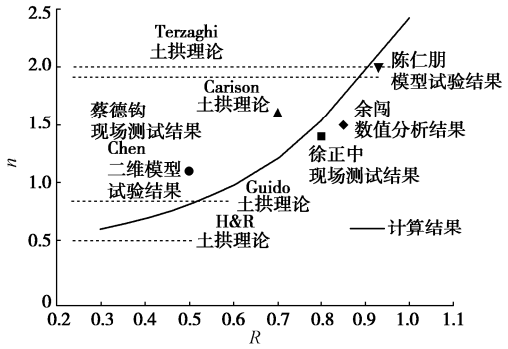

图 5 不同的桩宽度与桩间距的组合对应的土拱高度

Fig. 5 Soil arch heights with different correction factors

5 结　　论

（1）推导了悬链线土拱模型的表达方程，给出了求解方法并应用于桩土应力及荷载分担比公式计算。

（2）与室内模型、现场测试结果对比，土拱的高度、形态以及桩顶土的土压力与实测结果吻合良好，验证了该方法的准确性。

（3）土拱的高度主要受填料内摩擦角以及不同的桩与桩间距的组合的影响。内摩擦角的影响相对较小，设计时应重点关注桩径、桩帽、桩间距尺寸。悬链线土拱可解释其他计算模型的土拱高度差异。

参考文献：

[1] GUIDO V A, KNUEPPEL J D, SWEENY M A. Plate loading tests on geogrid-reinforced earth slabs[C]// Geosynthetic’87 Conference, 1987, New Orlenns.

[2] HEWLETT W J, RANDOLH M F. Analysis of piled embankments[J]. Ground Engineering, 1988, **21**(3): 12 – 18.

[3] 徐正中, 陈仁朋, 陈云敏. 软土层未打穿的桩承式路堤现场实测研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, **28**(11): 2336 – 2341. (XU Zheng-zhong, CHEN Ren-peng, CHEN Yun-min. Study of in-situ data of pile-supported embankment with pile partially penetrated in soft soils[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, **28**(11): 2336 – 2341 (in Chinese))

[4] 蔡德钩, 叶阳升, 张千里, 等. 桩网支承路基受力及加筋网垫变形现场试验研究[J]. 中国铁道科学, 2009, **30**(5): 1 – 8. (CAI De-gou, YE Yang-sheng, ZHANG Qian-li, et. al.In-situ study of bedding force and deformation of Geosynthetics Reinforced and Pile Supported embankment[J]. China Railway Science, 2009, **30**(5):1 – 8. (in Chinese))

[5] 费　康, 王军军, 陈　毅. 桩承式路堤土拱效应的试验和数值研究[J]. 岩土力学, 2011, **32**(7): 1975 – 1983. (FEI Kang, WANG Jun-jun, CHEN Yi. Experimental and numerical studies of soil arching in piled embankment[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, **32**(7): 1975 – 1983. (in Chinese))

[6] 陈仁朋, 汪炎卫, 陈金苗, 等. 大振次列车动荷载作用下桩网加筋路堤土拱效应模型试验研究[J]. 铁道学报, 2015, **37**(9): 107 – 113. (CHEN Ren-peng, WANG Yan-wei, CHEN Jin-miao, et al. Experimental study on soil arching effect in pile-supported reinforced embankment under dynamic train loads with large number of vibration cycles[J]. Journal of The China Railway Society, 2015, **37**(9): 107 – 113. (in Chinese))

[7] 余　闯, 刘松玉, 杜广印, 等. 桩承式加筋路堤土拱效应的三维数值模拟[J]. 东南大学学报, 2009, **39**(1): 58 – 62. (YU Chuang, LIU Song-yu, DU Guang-yin, et al. Three dimensional simulations on soil arching of piled embankments[J]. Journal of Southeast University (Natural Science Edition), 2009, **39**(1): 58 – 62. (in Chinese))

[8] CHEN Y M, CAO W P, CHEN R P. An experimental investigation of soil arching within basal reinforced and unreinforced piled embankments[J]. Geotextiles and Geomembranes, 2008, **26**(2): 164 – 174.

[9] 曹卫平, 胡伟伟. 桩承式加筋路堤三维土拱效应试验研究[J]. 岩土力学, 2014, **35**(2): 351 – 358. (CAO Wei-ping, HU Wei-wei. Experimental study of 3D soil arching in piled reinforced embankments[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, **35**(2): 351 – 358. (in Chinese))

[10] 赖汉江. 桩承式加筋路堤土拱形成-演化机理及承载特性宏细观分析[D]. 武汉: 华中科技大学, 2016. (LAI Han-jiang. Analysis of Formation-Evolution Mechanism and Bearing Characteristics of Soil Arching Within A Piled Embankment[D]. Wuhan: Huazhong University of Science & Technology, 2016. (in Chinese))

[11] 芮　瑞, 黄　成, 夏元友, 等. 砂填料桩承式路堤土拱效应模型试验[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(11): 2082 – 2089. (RUI Rui, HUANG Cheng, XIA Yuan-you, et al. Model tests on soil arching effects of piled embankments with sand fills[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(11): 2082 – 2089. (in Chinese))

（编校：黄贤沙）