

DOI: 10.11779/CJGE2021S2046

# 基于多元概率分布模型的珠海黏土多参数预测

汪海林<sup>1</sup>, 刘航宇<sup>1</sup>, 顾晓强<sup>\*1,2</sup>, 宋许根<sup>3</sup>

(1. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 同济大学岩土及地下工程教育部重点试验室, 上海 200092;

3. 中铁第四勘察设计院集团有限公司交通市政与港航设计研究院, 湖北 武汉 430063)

**摘要:** 在岩土工程实践中, 一个重要任务是根据场地勘察报告获取实际设计中所需要的设计参数。土体参数之间的相互转换对于岩土工程实践具有重要意义。本文在前人研究的基础上, 对珠海市某城区的软土的室内试验及现场数据进行了分析, 并建立了9个土体参数的多元概率分布模型以及相应的贝叶斯更新模型。使用该贝叶斯模型可以方便地使用多元土体参数信息对未知参数进行更新预测, 研究表明, 多参数更新预测模型能够综合所有已知土体参数的信息, 从而有效提升对于未知参数预测的准确性。

**关键词:** 土体参数; 多元概率分布; 贝叶斯更新; 多参数预测; 数据库

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2021)S2-0193-04

**作者简介:** 汪海林(1998—), 男, 博士研究生, 主要从事岩土基本特性大数据统计分析方面的研究工作。E-mail: wanghailin@tongji.edu.cn。

## Multi-parameter prediction of Zhuhai clay based on multivariate probability distribution model

WANG Hai-lin<sup>1</sup>, LIU Hang-yu<sup>1</sup>, GU Xiao-qiang<sup>1, 2</sup>, SONG Xu-gen<sup>3</sup>

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China; 3. Traffic Design and Research Institute, China Railway Siyuan Survey And Design Group Co., Ltd., Wuhan 430063, China)

**Abstract:** In geotechnical engineering practice, an important task is to obtain the design parameters required based on the site survey report. The mutual conversion of soil parameters is of great significance to the practice of geotechnical engineering. Based on the previous studies, the laboratory test and field test data of soft soil in a certain urban area of Zhuhai are analyzed. A multivariate probability distribution model of 9 soil parameters and a Bayesian updating model are established. Using this Bayesian updating model can easily make use of the information of multiple soil parameters to predict unknown parameters. The results show that the multi-parameter prediction model can synthesize the information of all known parameters, thereby effectively improving the accuracy of predicting unknown parameters.

**Key words:** soil parameter; multivariate probability distribution; bayesian updating; multi-parameter prediction; database

## 0 引言

在岩土工程实践中, 一个重要任务是根据场地勘察报告获取实际设计中所需要的设计参数。广泛的土体参数统计数据表明, 岩土参数存在着广泛的变异性。目前, 工程技术人员处理岩土变异性的一般方法是, 在现场调查中进行多次平行测试, 根据这些测试的平均值或在一定可信范围内选择最坏情况下的值。事实上, 由于土体参数的空间变异性, 在现场调查程序中收集到的数据本质上受到多元参数的影响<sup>[1]</sup>, 仅考虑将现场测试与设计参数相联系的转换模型中的少量参数显然是不合理的。为考虑岩土变异性对岩土工程设计的影响, 采用基于可靠性的岩土工程设计是一种比

较理想的手段<sup>[2-3]</sup>。国内许多学者也就此进行了研究, 例如高大钊<sup>[4]</sup>研究了土的抗剪强度等指标的概率分布模型, 姚耀武等<sup>[5]</sup>、倪红等<sup>[6]</sup>分别在不同岩土工程问题中研究了土土性参数的概率分布对岩土工程可靠性的影响。

学者针对于土体参数大多进行双变量的相关性分析, 例如顾晓强等<sup>[7]</sup>就研究了上海土体小应变硬化模型的参数与孔隙比之间的经验关系。许多学者还将双变量土体参数概率模型扩展到多变量土体参数概率分布模

基金项目: 国家自然科学基金项目(51822809)

收稿日期: 2021-08-16

\*通信作者 (E-mail: guxiaoqiang@tongji.edu.cn)

型<sup>[1, 8-10]</sup>。这种扩展是有必要的, 因为在实际岩土工程测试中, 一般可以获得场地的多无土体参数信息, 建立土体参数的多元概率分布模型, 从而有效描述多元变量之间的相关性, 有效利用土体的室内或现场试验的测试数据, 提高转换模型的准确性。

本文在前人研究的基础上, 对珠海市西部中心城区 A 片区的深厚软土区的土体参数进行了分析。研究了珠海黏土的 9 个参数, 包括含水率  $w$  (%)、孔隙比  $e$ 、液限  $w_L$  (%)、塑性指数  $w_p$  (%)、液性指数  $I_L$ 、压缩系数  $\alpha$  (MPa<sup>-1</sup>)、压缩模量  $E_s$  (MPa)、有效竖向应力  $\sigma'_v$  (kPa) 以及不排水抗剪强度  $S_u$  (kPa)。基于 Ching 等<sup>[9]</sup>的研究, 构建了这 9 个参数的多元概率分布, 并使用贝叶斯更新给出了给定条件下参数的后验分布, 为工程设计中参数的取值提供参考。

## 1 多元概率分布模型的建立

为了全面掌握珠海西部中心城区 A 片区工程地质情况和软土工程特性, 进行了大量钻探、室内试验和现场静力触探、十字板剪切和标准贯入试验, 得到了大量室内土工试验数据和原位测试资料。本文分析的 9 个土体参数的统计信息如表 1 所示。

表 1 9 个土体参数的统计信息

Table 1 Statistics of 9 soil parameters

参数	$n$	均值	最小值	最大值	STD	COV
$w/\%$	885	65.11	39.40	98.60	10.25	0.16
$e$	885	1.75	1.00	2.62	0.27	0.15
$w_L$	885	56.54	32.90	87.30	9.29	0.16
$I_p$	885	25.49	12.80	44.70	5.32	0.21
$I_L$	885	1.35	0.94	2.58	0.26	0.19
$\alpha$	742	1.56	0.53	3.74	0.53	0.34
$E_s$	742	1.75	0.77	3.52	0.49	0.28
$\sigma'_v$	885	98.30	5.00	368.94	69.97	0.71
$S_u$	216	10.53	2.10	54.00	7.13	0.68

### 1.1 边缘分布

边缘分布描述了单个参数的概率分布。Phoon<sup>[11]</sup>指出, 正态分布是唯一可行的选择, 因为它易于使用实测数据表征其分布参数。但是, 并非所有土体参数服从正态分布, 尤其是对于土力学中的许多非对称参数而言。Phoon 等<sup>[12]</sup>指出约翰逊分布系统是一种不错的选择, 该分布系统将非正态的随机变量转化为标准正态分布的随机变量, 其转换模型为

$$X = \begin{cases} b_x + a_x \sinh^{-1}[(Y - b_y)/a_y] & \text{SU} \\ b_x + a_x \ln[(Y - b_y)/(a_y + b_y - Y)] & \text{SB } (b_y \leq Y \leq a_y + b_y), \\ b_x^* + a_x \ln(Y - b_y) & \text{SL } (Y \geq b_y) \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $a_x$ ,  $b_x$ ,  $a_y$ ,  $b_y$  和  $b_x^*$  为分布参数。约翰逊系统中存在 3 种类型的分布: SU (无界系统), SB (有界系统) 和 SL (对数正态系统)。分布类型和参数的

估计可参考 Slifker 等<sup>[13]</sup>。表 2 中的最后一列给出了经过变换后的土体参数的 K-S 正态性检验的  $p$  值, 取显著性水平  $\alpha = 0.05$ , 表中的  $p$  值均大于 0.05, 说明转化后参数的分布与标准正态分布没有显著差别, 可以接受转化后参数服从标准正态分布的假设。

表 2 分布类型与参数

Table 2 Distribution types and parameters

参数	类型	$a_x$	$b_x$	$a_y$	$b_y$	$p$
$w$	SU	0.85	0.01	5.91	65.19	0.24
$e$	SU	1.06	-0.19	0.22	1.70	0.48
$w_L$	SB	1.19	0.65	53.29	36.30	0.67
$I_p$	SB	1.43	0.71	34.45	12.09	0.21
$I_L$	SB	0.73	0.89	1.20	1.01	0.06
$\alpha$	SU	2.18	-2.35	0.63	0.65	0.89
$E_s$	SU	1.65	-1.02	0.61	1.28	0.97
$\sigma'_v$	SB	0.98	1.20	394.85	-7.32	0.77
$S_u$	SB	0.99	1.02	26.44	1.86	0.99

### 1.2 多元概率分布模型

多元正态分布的密度函数为

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\mathbf{C})}} \exp\left[\frac{1}{2}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})\right] \quad (2)$$

由于转换后的数据服从标准正态分布, 式 (2) 中的均值向量  $\boldsymbol{\mu}$  和协方差矩阵  $\mathbf{C}$  可以表示为

$$\boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_n]^\top = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \dots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \dots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n & \dots & \sigma_{nn}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{12} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1n} & \rho_{2n} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

式中,  $\rho_{ij}$  为参数间的相关系数, 可以使用皮尔逊相关系数:

$$\rho_{ij} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [X_{i,k} - E(X_i)][X_{j,k} - E(X_j)]}{\text{std}(X_i) \cdot \text{std}(X_j)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_{i,k} X_{j,k} \quad (4)$$

图 1 给出了采用式 (1) 转化得到的珠海黏土数据库统计信息。对角线下方、对角线和对角线上方分别为两两参数间的散点图、各参数的直方图和相应的拟合概率密度函数, 以及两两参数间的皮尔逊相关系数。

## 2 岩土参数的贝叶斯更新

在岩土工程实践中, 通过测量得到的部分岩土数据, 根据上述岩土参数的多元概率分布, 可以使用贝叶斯分析获得其余参数的后验分布, 从而为基于可靠性的岩土工程设计提供依据。例如, 通过测量得到了关于岩土参数  $X_2$  的信息, 若将前面构建的多元正态分布作为先验分布, 由于多元正态分布的共轭性, 通过贝叶斯分析可以得到在给出测量参数信息  $X_2$  后, 其

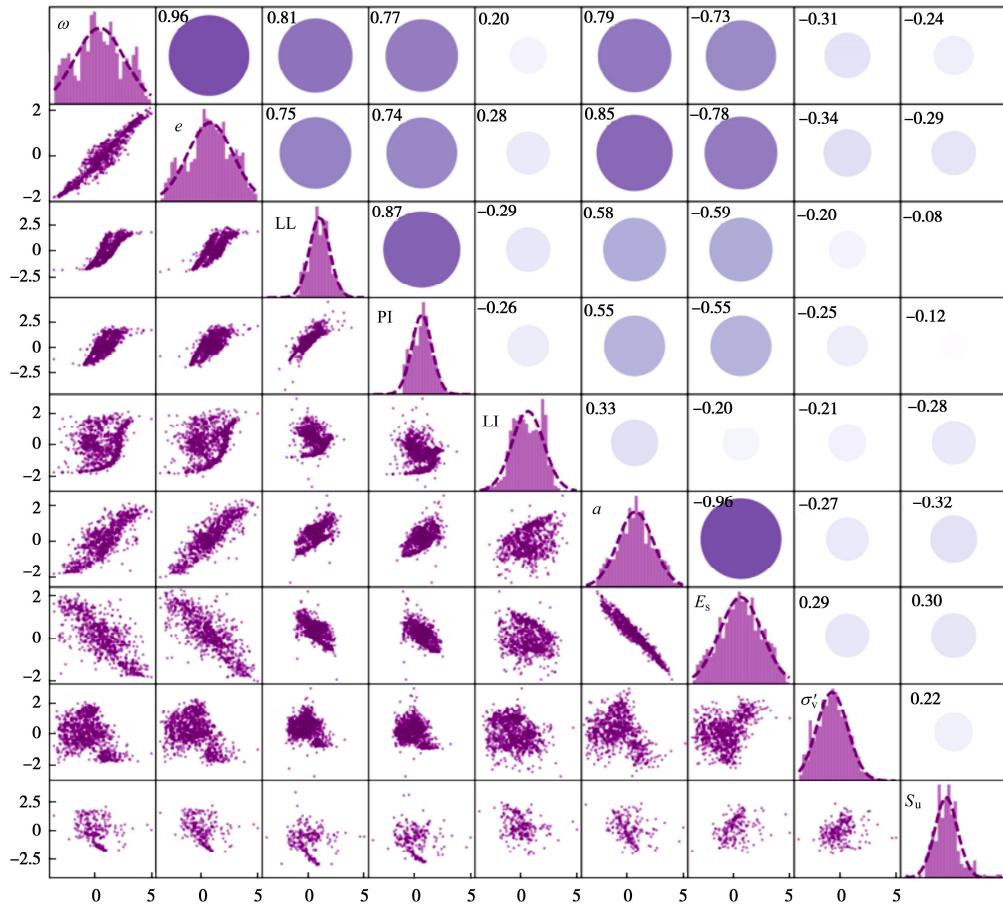


图 1 土体参数的直方图、散点图以及相关系数

Fig. 1 Histogram, scatter plot and correlation coefficients of soil parameters

余参数  $X_1$  仍然服从正态分布<sup>[14]</sup>:

$$X_1 | X_2 \sim N(\mathbf{C}_{12}\mathbf{C}_{22}^{-1}X_2, \mathbf{C}_{11} - \mathbf{C}_{12}\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{C}_{21})。 \quad (5)$$

更新后土体参数的约翰逊分布参数可以表示为<sup>[5]</sup>

$$\left. \begin{array}{l} a'_X = a_X / \sigma'_X, \\ b'_X = (b_X - \mu'_X) / \sigma'_X, \\ b_X^* = (b_X^* - \mu'_X) / \sigma'_X. \end{array} \right\} \quad (6)$$

还可以使用下面的比值表示  $X_1$  与  $X_2$  间的多重相关系数的平方<sup>[14]</sup>:

$$\rho_{12}^2 = \frac{\mathbf{C}_{12}\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{C}_{21}}{\mathbf{C}_{11}} = \mathbf{C}_{12}\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{C}_{21}。 \quad (7)$$

式 (7) 表示式 (5) 所示的参数更新预测 (其本质上是一种线性回归) 的决定系数  $R^2$ , 反映了现场测试的数据与未知参数之间的整体相关程度。

### 3 具体实现

使用第 2 节给出的岩土参数的贝叶斯更新模型, 可方便建立起土体参数的贝叶斯更新框架。具体步骤如下: ①给定土体参数信息  $Y_2$ ,  $Y_2$  是一个包含一个或多个土体参数信息的列向量; ②将  $Y_2$  代入式 (1) 得到  $X_2 = f(Y_2)$ ; ③组建  $\mathbf{C}_{12}$ 、 $\mathbf{C}_{22}$  和  $\mathbf{C}_{21}$  矩阵, 下标 1 表示预测参数, 下标 2 表示已知参数, 若预测参数为压缩模量, 已知参数为液限和塑性指数, 则  $\mathbf{C}_{12}$  取  $\mathbf{C}$  矩

阵 (图 1, 该矩阵为对角线为 1 的对称阵) 第 6 行的第 1 列和第 2 列。④使用式 (5) 计算未知参数  $X_1$  更新后的分布参数; ⑤将  $X_1$  的均值和标准差代入式 (6) 获得更新后的约翰逊分布参数; ⑥获得了  $X_1$  的更新后的分布参数后, 即可根据约翰逊分布的概率分布函数确定其均值和置信区间。

由于液限  $w_L$ 、塑性指数  $I_p$ 、含水率  $w$ 、孔隙比  $e$  和压缩系数  $a$  之间存在很强的正相关关系, 而压缩模量  $E_s$  与前者存在较强的负相关关系。我们尝试使用前面 5 个参数的信息来更新压缩模量的分布。图 2 展示了更新结果。由图 2 可见, 由于压缩系数与压缩模量本身存在很强的线性相关关系, 若给出压缩系数的信息, 压缩模量的不确定性能够得到显著降低。值得注意的是, 当能够获得一些其它岩土参数时, 仍然可以有效利用这些数据进一步降低估计参数的不确定性。同时, 若进一步给出了关于液限、塑性指数、含水率与孔隙比的信息, 对压缩模量估计的不确定性进一步得到了一定程度的降低, 这也体现了多元数据分析的价值: 尽可能有效利用已知岩土参数降低对参数估计的不确定性。

为了验证贝叶斯更新的正确性, 随机抽取数据库中的数据点, 使用液限、塑性指数、含水率、孔隙比和压缩系数的信息来更新压缩模量的分布。图 3 给出了计算结果。结果表明, 更新后的压缩模量均值与实

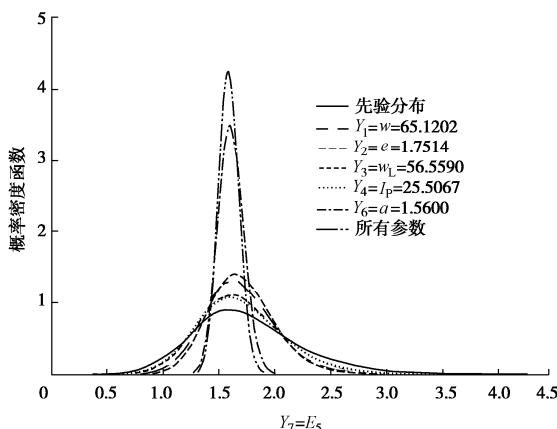


图 2 压缩模量的更新结果

Fig. 2 Updating results of compressive modulus

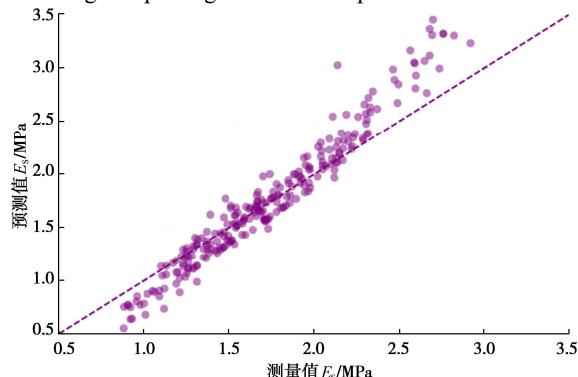


图 3 压缩模量的预测均值与实测值对比

Fig. 3 Comparison of predicted and measured values of compressive modulus

测值比较接近, 表明上述贝叶斯方法能够有效使用测量数据对岩土参数进行更新预测。

## 4 结语

本文在已有土体参数数据库建模方法的基础上, 基于珠海某城区黏土的土体参数测试数据, 建立了珠海黏土的多元概率分布模型, 该模型使用约翰逊分布系统将岩土参数随机变量转化为标准正态分布分布的随机变量, 正态性检验结果表明可以认为转化后的随机变量服从标准正态分布。同时, 基于岩土测量数据的贝叶斯模型, 该模型能够有效使用测试数据对岩土参数进行更新预测。研究结果表明, 本文给出的贝叶斯更新模型能够有效利用已知的土体参数信息, 提升对未知参数预测的准确性。

## 参考文献:

- [1] CHING J, PHOON K K. Transformations and correlations among some clay parameters—the global database[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2014, **51**(6): 663 – 685.
- [2] PHOON K K, KULHAWY F H. Evaluation of geotechnical property variability[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1999, **36**(4): 625 – 639.
- [3] PHOON K K, KULHAWY F H. Characterization of geotechnical variability[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1999, **36**(4): 612 – 624.
- [4] 高大钊. 地基土力学性质指标的可靠性分析与取值[J]. 同济大学学报, 1985, **13**(4): 59 – 68. (GAO Da-zhao. Reliability analysis and evaluation of soil-property parameters[J]. Journal of Tongji University, 1985, **13**(4): 59 – 68. (in Chinese))
- [5] 姚耀武, 陈东伟. 土坡稳定可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 1994, **16**(2): 80 – 87. (YAO Yao-wu, CHEN Dong-wei. Reliability analysis of slope stability[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1994, **16**(2): 80 – 87. (in Chinese))
- [6] 倪红, 刘新宇, 秦玉. 土性参数概率特性对地基承载力可靠度的影响[J]. 解放军理工大学学报(自然科学版), 2004, **5**(3): 67 – 69. (NI Hong, LIU Xin-yu, QIN Yu. Reliability analysis of bearing capacity of soil[J]. Journal of PLA University of Science and Technology (Natural Science), 2004, **5**(3): 67 – 69. (in Chinese))
- [7] 顾晓强, 吴瑞拓, 梁发云, 等. 上海土体小应变硬化模型整套参数取值方法及工程验证[J]. 岩土力学, 2021, **42**(3): 833 – 845. (GU Xiao-qiang, WU Rui-tuo, LIANG Fa-yun, et al. On HSS model parameters for Shanghai soils with engineering verification[J]. Rock and Soil Mechanics, 2021, **42**(3): 833 – 845. (in Chinese))
- [8] CHING J, PHOON K K. Modeling parameters of structured clays as a multivariate normal distribution[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2012, **49**(5): 522 – 545.
- [9] CHING J, PHOON K K. Correlations among some clay parameters—the multivariate distribution[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2014, **51**(6): 686 – 704.
- [10] ZOU H F, LIU S Y, CAI G J, et al. Multivariate correlation analysis of seismic piezocone penetration (SCPTU) parameters and design properties of Jiangsu quaternary cohesive soils[J]. Engineering Geology, 2017, **228**: 11 – 38.
- [11] PHOON K K. Modeling and simulation of stochastic data[C]//GeoCongress 2006. Atlanta, 2006: 1 – 17.
- [12] PHOON K K, CHING J. Multivariate model for soil parameters based on Johnson distributions[C]// Geo-Congress 2013. 2013, San Diego.
- [13] SLIFKER J F, SHAPIRO S S. The Johnson system: selection and parameter estimation[J]. Technometrics, 1980, **22**(2): 239 – 246.
- [14] HÄRDLE W K, SIMAR L. Multivariate distributions [M]// Applied Multivariate Statistical Analysis. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2012: 107 – 165.

(编校: 孙振远)