

DOI: 10.11779/CJGE2021S1002

框架预应力锚杆支护边坡稳定性极限分析

朱彦鹏¹, 侯喜楠^{*2,1}, 马响响¹, 杨奎斌¹

(1. 兰州理工大学土木工程学院, 甘肃 兰州 730050; 2. 兰州理工大学西部土木工程防灾减灾教育部工程研究中心, 甘肃 兰州 730050)

摘要: 框架预应力锚杆在边坡工程中应用广泛。在考虑支护结构、锚杆对土体边坡稳定性影响的情况下, 基于塑性力学极限分析上限理论的基本原理, 推导了其支护边坡的安全系数计算公式。并采用 Matlab 语言编制算法对推导公式进行全局最优解搜索。对算例采用 Flac3d 模拟求解其安全系数, 和用上限法求得的结果相近。最后采用正交试验设计方法讨论在框架预应力锚杆支护边坡中坡角、坡高、土体性质等内在因素对其稳定性的影响, 得出对框架预应力锚杆支护边坡的稳定性影响最大的是坡角, 然后再依次为内摩擦角和坡高、黏聚力、坡底支护结构推力设计值、重度, 且坡角和内摩擦角对边坡稳定性影响高度显著。

关键词: 边坡工程; 框架预应力锚杆; 稳定性; 极限分析

中图分类号: TU457 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2021)S1-0007-06

作者简介: 朱彦鹏(1960—), 男, 硕士, 教授, 博士生导师, 主要从事支挡结构、地基处理和工程事故处理与分析等方面的研究工作。E-mail: zhuyp1@163.com。

Limit analysis of slope stability supported by framed prestressed anchor rods

ZHU Yan-peng¹, HOU Xi-nan^{2,1}, MA Xiang-xiang¹, YANG Kui-bin¹

(1. College of Civil Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China; 2. Western Center of Disaster Mitigation in Civil Engineering, Ministry of Education, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract: Framed prestressed anchor rods are widely used in slope engineering. Considering the influences of supporting structures and anchor rods on the stability of soil slopes, the basic principles of the upper limit theory are analyzed, and the formula for calculating the safety factor of supported slope is deduced on the basis of plastic mechanics limit. The algorithm based on Matlab language is adopted to search the global optimal solution. Finally, according to the orthogonal design method, the influences of the internal factors such as slope angle, slope height and soil properties on the stability of prestressed anchor supported slope are discussed. It is concluded that the slope angle has the greatest influences on the stability of the prestressed anchor supported slope, following by the internal friction angle and slope height, cohesion force, design value of thrust of supporting structures for the slope and soil weight, and the slope height, internal friction angle and slope angle have significant influences on its stability.

Key words: slope engineering; framed prestressed rod; stability; limit analysis

0 引言

框架预应力锚杆边坡支护结构由钢筋混凝土框架、挡土板、小吨位预应力锚杆、锚下承载结构、坡面排水系统和墙后土体组成, 属于轻型柔性支护结构。周勇等^[1]和李忠等^[2]以边坡极限平衡理论及圆弧滑动破坏模式为基础, 推导了安全系数计算模型。

塑性极限分析方法通过运用静力学和运动学, 构建相对应的许可应力场或者运动许可速度场, 然后建立虚功平衡方程, 得到满足平衡方程的解, 且该解介于真实解的上限和下限之间^[3]。

极限分析上限法将土体假想为理想刚塑体, 满足关联流动法则, 并且在极限状态时假定边坡内存在一个各点都达到屈服的塑性区(服从 Mohr-Coulomb 破坏

准则)。极限分析上限法认为对任意的机动容许的破坏模式, 内能耗损率不小于外力的功率, 具体可以表示为:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega \geq \int_s T_i V_i dS + \int_{\Omega} X_i V_i d\Omega \quad , \quad (1)$$

式中 $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ 为运动许可速度场中的实际应力和应变率; T_i 为作用在对象边界或表面上的面力; X_i 为作用在对象体积上的体力; V_i 为运动许可场中速度矢量。

基金项目: 教育部长江学者和创新团队支持计划项目(IRT13068, IRT_17R51); 国家自然科学基金项目(51978321)

收稿日期: 2020-12-15

* 通信作者(E-mail: 799178392@qq.com)

虽然极限分析上限法不如极限平衡法的原理简单,也不如有限元法适用范围广、本构模型精确,但它利用的是能量平衡原理,不需要解复杂的偏微分方程,因而计算简便快捷,并且求解的过程与应力初始状态无关,避免了复杂的本构关系,力学概念十分清晰,所以中国的很多学者把此方法应用到边坡研究当中。董倩等^[4]和方薇等^[5]采用极限分析上限法分别分析均质和非均质边坡的稳定性。周强^[6]采用极限分析法分析了二级边坡的稳定性。李新坡等^[7]和王根龙等^[8]利用极限分析研究预应力锚索加固边坡的稳定性。

本文在已有理论成果的基础上,将极限分析上限法应用到框架预应力锚杆支护边坡的稳定性研究上,推导其能量平衡方程并通过 Matlab 程序搜索边坡安全系数的最优解。

1 强度折减方法

强度折减法最早在 1955 年由 Bishop^[9]提出, Zienkiewicz^[10]把抗剪强度折减系数定义为在外荷载保持不变的情况下,边坡内土体所发挥的最大抗剪强度与外荷载在边坡内所产生的实际剪应力之比。Duncan^[11]在 1996 年把 F_s 定义为导致稳定状态边坡出现失稳的剪切强度折减系数。边坡安全系数的定义方法有许多,当前较为公认和应用较多的有三种^[12]:强度贮备安全系数、超载储备安全系数、下滑力超载储备安全系数。其中最为公认的强度贮备安全系数,让滑裂面上的抗剪强度指标按同一比例降低为 c/F_s 和 $\tan\varphi/F_s$,从而让边坡达到极限破坏状态,其中 c 为黏聚力, φ 为内摩擦角, F_s 为安全系数。本文将采用强度贮备安全系数的方法,将折减后的 c_f 和 φ_f 变为

$$\begin{cases} c_f = c/F_s, \\ \varphi_f = \arctan(\tan\varphi/F_s) \end{cases} \quad (2)$$

2 框架预应力锚杆支护边坡模型建立

上限法也称能量法,通常需要假定一个滑裂面,并将土体分成若干块,土体视作刚塑性体,然后构筑一个协调位移场,为此需要假设滑裂面为对数螺旋线或者直线,然后根据虚功原理求解滑体处于极限状态时的稳定安全系数^[12]。

边坡破坏时常用的滑裂面有折线滑裂面、圆弧滑裂面和对数螺旋线破坏面和组合破坏面等。国际相关研究显示^[13],边坡实际破坏时所表现的破坏面往往和对数螺旋线破坏面相似,由于所选用的相容速度场和实际的破坏模式相似,其解就越接近真实解的上限解,

故本文建立了对数螺旋滑面破坏的边坡假象机构模型,模型建立如图 1 所示。

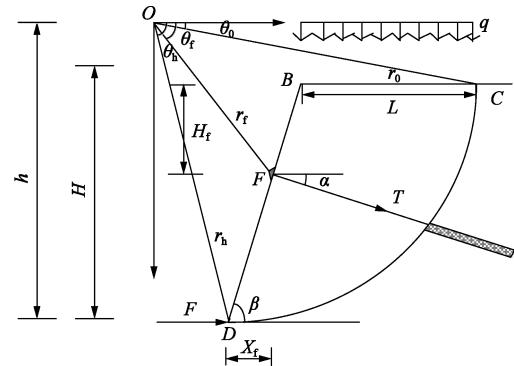


图 1 框架预应力锚杆支护边坡模型图

Fig. 1 Model for slope supported by framed prestressed anchor rods

由图 1 可知框架预应力锚杆支护边坡所受外力为:土体自重、坡顶地面附加荷载 q 、锚杆的极限抗拉承载力 T_i 和结构底部推力设计值 F 。图中 θ_0 、 θ_h 和 θ 分别为滑裂面上下和其上任一点对应的极角, θ_f 为滑裂面与锚索的交点所对应的极角,通常假设极限状态下的滑裂面通过坡趾或坡趾下方^[14-16],但本文只考虑滑裂面经过坡趾的情况。

3 公式推导

对数螺旋线方程为

$$r = r_0 e^{[(\theta_i - \theta_0) \tan\varphi]} \quad (3)$$

根据图 1 的几何关系可知

$$\frac{h}{r_0} = \sin\theta_h e^{(\theta_h - \theta_0) \tan\varphi}, \quad (4)$$

$$\frac{H}{r_0} = \sin\theta_h e^{(\theta_h - \theta_0) \tan\varphi} - \sin\theta_0. \quad (5)$$

$$\frac{L}{r_0} = \frac{\sin(\theta_h - \theta_0)}{\sin\theta_h} - \frac{\sin(\theta_h + \beta) [\sin\theta_h e^{(\theta_h - \theta_0) \tan\varphi} - \sin\theta_0]}{\sin\theta_h \sin\beta}. \quad (6)$$

3.1 外功率计算

土体重力所做的功 W_g 采取间接的方式求出,即用图 1 中 OCD 所做的功率减去 OBC 和 OBD 所做的的功率。最终整合可得

$$W_g = \omega r_0^3 \gamma [f_1 - f_2 - f_3], \quad (7)$$

式中, γ 为土体重度, ω 为角速度, f_1 、 f_2 、 f_3 是含有 θ_h 和 θ_0 的函数。 f_1 、 f_2 、 f_3 可分别表示如下:

$$f_1(\theta_h, \theta_0) = \frac{1}{3(1 + 9 \tan^2 \varphi)} [(3 \tan\varphi \cos\theta_h + \sin\theta_h) \cdot e^{3(\theta_h - \theta_0) \tan\varphi} - (3 \tan\varphi \cos\theta_0 + \sin\theta_0)]; \quad (8)$$

$$f_2(\theta_h, \theta_0) = \frac{L}{6r_0} \left(2 \cos\theta_0 - \frac{L}{r_0} \right) \sin\theta_0; \quad (9)$$

$$f_3(\theta_h, \theta_0) = \frac{1}{6} e^{(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi} \left[\sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{L}{r_0} \sin \theta_h \right] \cdot \left[\cos \theta_0 - \frac{L}{r_0} + \cos \theta_h e^{(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi} \right] \quad (10)$$

为求坡顶均布荷载所做功率, 如图 2 所示将均布荷载等效为集中力 F_q , 则

$$W_q = \bar{F} \cdot \bar{v} = qL \cdot \omega r_q \cdot \cos \varphi = qL \cdot \omega L_q \quad (11)$$

其中 L_q 为均布荷载等效集中力作用点到 O 点的水平距离。

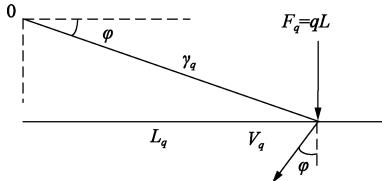


图 2 荷载等效示意图

Fig. 2 Schematic diagram of equivalent load

根据已有的研究成果, 在求解预应力锚杆的外力功率时, 将锚杆的锚固力视为轴向力作用在滑坡体上, 可忽略其切向力。而锚固力作用在图 1F 点或者锚杆与滑裂面交点的能量计算方法一致^[17], 故本文取 F 点为锚杆作用点。以图 1 中 O 点为圆心, 并根据相应的几何关系可知:

$$X_F = r_0 \cos \theta_0 - L - (h - H) \cot \beta \quad (12)$$

$$y_F = r_0 \sin \theta_0 + (h - H) \quad (13)$$

$$r_F = \sqrt{x_F^2 + y_F^2} \quad (14)$$

$$\sin \theta_F = \frac{r_h \sin \theta_h - \frac{x_F}{\tan \beta}}{r_F} \quad (15)$$

则求得预应力锚杆所做的功率:

$$W_a = -T \cdot \omega \cdot r_F \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_F + \alpha\right) \quad (16)$$

框架预应力锚杆支护结构的基础埋深一般都较大, 考虑其对内部整体稳定性的作用, 由静力平衡^[1]求得支护结构底部推力设计值

$$F = E_h S_h - T \cos \alpha \quad (17)$$

式中, E_h 为侧向土压力合力水平分力设计值, S_h 为边坡长度。

则支护结构底部推力设计值所做的功率:

$$W_F = -F \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_h\right) \cdot \omega \cdot r_h = -Fh \quad (18)$$

综上式(7), (11), (16), (18)可求出框架预应力锚杆支护外边坡的外功率

$$W_s = W_g + W_q + W_a + W_F \quad (19)$$

3.2 内功率计算

$$W_D = \int_{\theta_0}^{\theta_h} c(v \cos \varphi) \frac{rd\theta}{\cos \varphi} = \frac{cr_0^2 \omega}{2 \tan \varphi} [e^{2(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi} - 1] \quad (20)$$

3.3 求解安全系数

$$K = \frac{W_D}{W_s} \geq 1 \quad (21)$$

当 $K \geq 1$ 时, 边坡为稳定状态。取其 $K = 1$ 时的特殊状态(边坡稳定达到极限状态)来求其安全系数, 即

$$\frac{W_D}{W_s} - 1 = 0 \quad (22)$$

式(22)中的 c 、 φ 全部替换成式(2)中的 c_f 和 φ_f , 如此一来, 等式(22)中只含有 θ_h 、 θ_0 和 F_s 三个未知量, 其中

$$\theta_0 < \theta_h < \pi, 0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2} \quad (23)$$

每改变一次 θ_0 和 θ_h 的值都会得到一个相应的 F_s 值, 不断改变 θ_0 和 θ_h 的组合值, 搜索相应 F_s 的最小值 $F_{s\min}$ 即为框架预应力锚杆支护边坡的安全系数。该式实为隐函数, 求解比较麻烦, 故采用 Matlab 编制相应的遗传算法来求解, 算法原理为用构造好的目标函数, 作为遗传算法求解的适应度函数, 算法通过 Gauss 分布随机生成第 1 代种群, 并计算适应值和使用轮盘赌法选择 n 个父体, 通过基因交叉算子对 n 个父体进行基因片段交叉, 产生的 n 个后代通过变异算子进行基因片段变异, 同时保留精英一代存活下来形成下一代。算法迭代中不断重复上述过程, 在达到最大迭代次数时收敛, 求解出该适应度函数的最优值, 其所对应的精英个体的参数 θ_0 、 θ_h 和 F_s 即为所求目标函数的最优参数。

4 算例计算及参数分析

4.1 算例计算

某边坡全由黄土填筑而成, 采用框架预应力锚杆支护。边坡高 8 m, 坡角为 4°, 黄土重度为 16×10^3 N/m³, 黏聚力为 20 kPa, 内摩擦角为 21.9°。采用三排锚杆进行锚固, 入射角为 10°, 每排锚杆的锚固力为 1×10^5 N/m。三排锚杆的自由端长度分别为 7, 6, 5 m; 锚固段长度分别为 11, 10 和 9 m; 每排距坡底分别为 0.5, 3, 5.5 m。坡顶均布荷载为 1×10^5 N/m, 坡底支护结构推力设计值为 1.3×10^4 N/m。所建模型如图 3 所示。

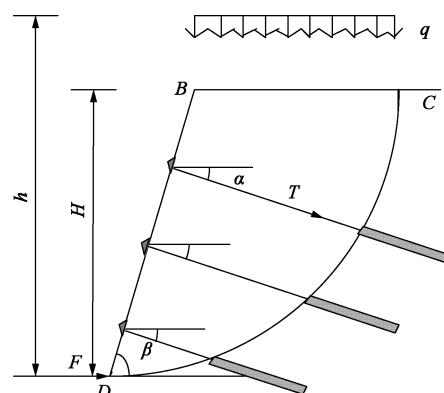


图 3 算例模型图

Fig. 3 Model for case study

根据极限分析上限法可求得该边坡的安全系数 F_s 为 1.3183。采用不同的极限平衡法可求安全系数如表 1 所示。

表 1 不同极限平衡法所求的安全系数值

Table 1 Values of safety factor calculated by different limit equilibrium methods

Janbu	Morgenstern- price	Spencer	Bishop	Janbu Generalized
1.270	1.379	1.378	1.380	1.353

从表 1 可以看出用极限分析上限解分析框架预应力锚杆支护边坡所得到的结果具有一定的合理性。为增加结果的可靠性, 又采用 Flac3d 软件对该边坡进行模拟, 应用有限差分强度折减法求解安全系数^[18], 数值计算模型图和模拟结果分别见图 4, 5。

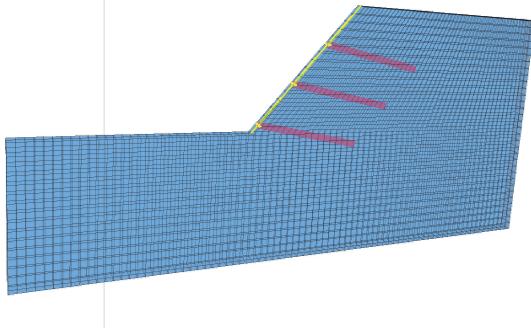


图 4 Flac3D 建模图

Fig. 4 Flac^{3D} modeling

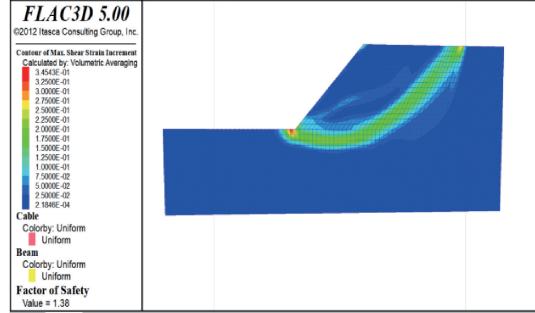


图 5 Flac3d 模拟结果

Fig. 5 Results of Flac^{3D} simulation

目前, 边坡失稳一般以数值计算不收敛^[19]、坡面位移突变和塑性区贯通为判据。本文采用边坡发生最大剪切应变率的地方作为滑裂带, 模拟所求得的安全系数为 1.38。这与采用 Bishop 法计算的结果相同, 比采用极限分析上限法求出的安全系数大, 但其结果非常接近。

4.2 参数分析

影响框架预应力锚杆支护边坡稳定性的因素众多, 本文基于正交设计方法, 对正交设计结果运用极差分析法和方差分析法进行分析, 确定各个因素在不同水平下对边坡安全系数的影响规律以及显著性大小。

其中框架预应力锚杆支护边坡的底部支护结构推力设计值与边坡的黏聚力、内摩擦角和坡高等有关, 之间也有交互作用, 但本文正交设计不涉及它们之间的交互作用。试验结果依靠上文所列功能平衡方程求出。其因素水平表见表 2, 正交设计组合情况见表 3, 正交结果表见表 4, 方差分析表见表 5。

表 2 关于边坡黏聚力、内摩擦角等的因素水平

Table 2 Factors related to slope cohesion, internal friction angle, soil weight, slope angle, slope height and design value of thrust of supporting structures for slope

水平	黏聚力 /kPa	内摩 擦角 /(°)	重度 /(kN·m ⁻³)	坡角 /(°)	坡高 /m	底部支护结 构推力设计 值/(kN·m ⁻¹)
1	18	20	12	30	6	10
2	21	23	14	40	8	30
3	24	26	16	50	10	50
4	27	29	18	60	12	70
5	30	32	20	70	14	90

表 3 正交设计组合情况

Table 3 Combined situations of orthogonal design

试验号	黏聚力 /kPa	内摩 擦角 /(°)	重度 /(kN·m ⁻³)	坡角 /(°)	坡高 /m	底部推力 设计值 /(kN·m ⁻¹)	试验 结果
1	18	20	12	30	6	10	1.2240
2	18	23	14	40	8	30	1.2250
3	18	26	16	50	10	50	1.1517
4	18	29	18	60	12	70	1.0310
5	18	32	20	70	14	90	0.9062
6	21	20	14	50	12	90	0.9322
7	21	23	16	60	14	10	0.7520
8	21	26	18	70	6	30	1.1593
9	21	29	20	30	8	50	1.7832
10	21	32	12	40	10	70	1.7141
11	23	20	16	70	8	70	0.8876
12	23	23	18	30	10	90	1.4269
13	23	26	20	40	12	10	1.1765
14	23	29	12	50	14	30	1.1735
15	23	32	14	60	6	50	1.7726
16	27	20	18	40	14	50	0.9716
17	27	23	20	50	6	70	1.4204
18	27	26	12	60	8	90	1.4562
19	27	29	14	70	10	10	1.0271
20	27	32	16	30	12	30	1.8385
21	30	20	20	60	10	30	0.8457
22	30	23	12	70	12	50	0.8671
23	30	26	14	30	14	70	1.5460
24	30	29	16	40	6	90	2.0201
25	30	32	18	50	8	10	1.5728

表 4 正交设计结果

Table 4 Values of orthogonal design

因素	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	R
黏聚力	1.1076	1.2682	1.2874	1.3428	1.3703	0.2628
内摩擦角	0.9722	1.1383	1.2979	1.407	1.5608	0.5886
重度	1.287	1.3006	1.33	1.2323	1.2264	0.1036
坡角	1.5637	1.4215	1.2501	1.1715	0.9695	0.5943
坡高	1.5193	1.385	1.2331	1.1691	1.0699	0.4494
底部推力 设计值	1.1505	1.2484	1.3092	1.3198	1.3483	0.1978

表 5 各个因素显著性分析

Table 5 Significance analysis of various factors

变异 来源	偏差 平方和	自由 度	方差	F 值	Fa	显著 水平
黏聚力	0.210	4	0.053	5.177		显著
内摩 擦角	1.049	4	0.262	25.864	F0.01(4,4) = 15.977	极为 显著
坡角	1.048	4	0.262	25.829	F0.05(4,4) = 6.388	高度 显著
坡高	0.636	4	0.159	15.674	F0.1(4,4) = 4.107	显著
推力 设计值	0.123	4	0.031	3.033	F0.25(4,4) = 2.064	有一定 影响
误差 e	0.041	4	0.010			
总和	3.107					

表 4 中的 R 栏为极差值, 是由某个因素在不同水平下平均值中的最大值和最小值差值所得, 数值越大, 说明该因素对分析指标的影响越大。由该表极差分析可知, 对框架预应力锚杆支护边坡的稳定性影响最大的是坡角, 然后再依次为内摩擦角、坡高、黏聚力、坡底支护结构推力设计值、重度。

显著性分析以方差最小的黏聚力作为误差项进行误差分析, 由表 5 可以看出坡角、内摩擦角和坡高的显著性很高, 符合相应的极差分析结果。通过图 6 的效应曲线可以更直观地看出各个因素对边坡安全系数的影响程度。

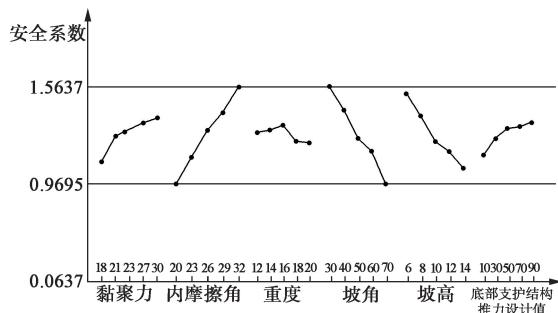


图 6 正交设计效应曲线图

Fig. 6 Graph of orthogonal design effect

5 结 论

本文采用塑性力学极限分析上限法对框架预应力锚杆支护边坡进行稳定性分析, 主要得出以下结论:

(1) 采用 Matlab 编制算法求解极限分析上限法功能平衡方程, 所得安全系数和有限差分法以及极限平衡法所求解的安全系数十分相近。

(2) 采用正交试验设计法对影响框架预应力锚杆支护边坡稳定性的各个因素进行极差分析和方差分析, 得出对框架预应力锚杆支护边坡的稳定性影响最大的是坡角, 然后再依次为内摩擦角、坡高、黏聚力、坡底支护结构推力设计值、重度, 且坡角、内摩擦角对其稳定性影响高度显著。

参考文献:

- [1] 周 勇, 朱彦鹏. 框架预应力锚杆边坡支护结构的稳定性分析方法及其应用 [J]. 工程地质学报, 2008, 16(3): 89–95. (ZHOU Yong, ZHU Yan-peng. Stability analysis method for prestressed anchor and grillage supporting structures and its application [J]. Journal of Engineering Geology, 2008, 16(3): 89–95. (in Chinese))
- [2] 李 忠, 朱彦鹏. 框架预应力锚杆边坡支护结构稳定性计算方法及其应用 [J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(21): 3922–3926. (LI Zhong, ZHU Yan-peng, Stability calculation methods for grillage supporting structure with prestressed anchor and its application [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(21): 3922–3926. (in Chinese))
- [3] 龚晓南. 土塑性力学 [M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1990. (GONG Xiao-nan. Soil Plastic Mechanics [M]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 1990. (in Chinese))
- [4] 董 倩, 刘东燕. 均质边坡稳定分析的上限解探讨 [J]. 公路交通科技, 2007, 24(6): 8–11. (DONG Qian, LIU Dong-yan. Discussion on the upper-bound solution of homogeneous soil slope stability [J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2007, 24(6): 8–11. (in Chinese))
- [5] 方 薇, 杨果林, 刘晓红, 等. 非均质边坡稳定性极限分析上限法 [J]. 中国铁道科学, 2010, 31(6): 14–20. (FANG Wei, YANG Guo-lin, LIU Xiao-hong, et al. The upper-bound limit analysis of the inhomogeneous slope stability [J]. China Railway Science, 2010, 31(6): 14–20. (in Chinese))
- [6] 周 强. 利用上限定理的二级边坡地震稳定性研究 [J]. 公路工程, 2013, 38(2): 174–176. (ZHOU Qiang. Slope with multi-step stability under earthquake forces based on limit analysis [J]. Highway Engineering, 2008, 38(2): 174–176. (in Chinese))
- [7] 李新坡, 何思明, 徐 骏, 等. 预应力锚索加固土质边坡的稳定性极限分析 [J]. 四川大学学报(工程科学版), 2006,

- [38(5): 82 – 85. (LI Xin-po, HE Si-ming, XU Jun, et al. Stability analysis of slopes reinforced with pre-tensioned cables by limit analysis method [J]. Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition), 2006, 38(5): 82 – 85. (in Chinese))
- [8] 王根龙, 伍法权, 郭生文, 等. 加锚岩质边坡稳定性评价的极限分析上限法研究 [J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(12): 2556 – 2563. (WANG Gen-long, WU Fa-quan, QI Sheng-wen, et al. Research on limit analysis upper bound method for stability evaluation of anchored rock slope [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 26(12): 2556 – 2563. (in Chinese))
- [9] BISHOP A W. The use of the slip circle in the stability analysis of slopes [J]. Géotechnique, 1955, 5(1): 7 – 17.
- [10] ZIENKIEWICZ O C, HUMPHESON C, LEWIS R W. Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics [J]. Géotechnique, 1975, 25(4): 671 – 689.
- [11] DUNCAN J M. State of the art: limit equilibrium and finite element analysis of slopes [J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1996, 122(7): 577 – 596.
- [12] 郑颖人, 陈祖煜, 王恭先, 等. 边坡与滑坡工程治理 [M]. 北京: 人民交通出版社, 2007. (ZHENG Ying-ren, CHEN Zu-yu, WANG Gong-xian, et al. Slope and Landslide Engineering Treatment [M]. Beijing: China Communications Press, 2007. (in Chinese))
- [13] SOUBRA A H, MACUH B. Active and passive earth pressure coefficients by a kinematical approach [J]. Geotechnical Engineering, 2002, 155(2): 119 – 131.
- [14] CHEN W F. Limit Analysis and Soil Plasticity [M]. New York: Elsevier Scientific Publishing Co, 1975.
- [15] 陈祖煜. 土力学经典问题的极限分析上、下限解 [J]. 岩土工程学报, 2002, 24(1): 1 – 11. (CHEN Zu-yu. Limit analysis for the classic problems of soil mechanics [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(1): 1 – 11. (in Chinese))
- [16] 杨昕光, 周密, 张伟, 等. 基于二阶锥规划的边坡稳定上限有限元分析 [J]. 长江科学院院报, 2016, 33(12): 61 – 67. (YANG Xin-guang, ZHOU Mi, ZHANG Wei, et al. Upper bound finite element analysis of slope stability using second-order cone programming [J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 2016, 33(12): 61 – 67. (in Chinese))
- [17] 赵炼恒, 罗强, 李亮, 等. 基于失稳状态耗能最小原理的预应力锚索加固边坡稳定性上限解析 [J]. 岩土力学, 2013, 34(2): 426 – 432. (ZHAO Lian-heng, LUO Qiang, LI Liang, et al. Energy analysis method for slopes reinforcing with prestressed anchor cables based on minimum energy principle of instability state [J]. Rock and Soil Mechanics, 2013, 34(2): 426 – 432. (in Chinese))
- [18] 夏世友, 张电吉, 夏亮, 等. 有限差分强度折减法求解边坡安全系数 [J]. 武汉工程大学学报, 2012, 34(4): 19 – 21, 26. (XIA Shi-you, ZHANG Dian-ji, XIA Liang, et al. Strength reduction finite difference method for solving safety factor of slope [J]. Journal of Wuhan Institute of Technology, 2012, 34(4): 19 – 21, 26. (in Chinese))
- [19] LUAN Mao-tian, WU Ya-jun, NIAN Ting-kai. A criterion for evaluating slope stability based on development of plastic zone by shear strength reduction FEM [J]. Journal of Seismology, 2003, 23(3): 1 – 8.

(编校: 明经平)