

DOI: 10.11779/CJGE20211387

基于比例边界有限元法的成层半空间中斜坡场地地震响应计算模型

李艳朋^{1,2}, 李志远^{*3}, 胡志强^{1,2}, 林皋^{1,2}

(1. 大连理工大学海岸与近海工程重点实验室, 辽宁 大连 116024; 2. 大连理工大学建设工程学部水利工程学院工程抗震研究所, 辽宁 大连 116024; 3. 中国水利水电科学研究院工程抗震研究中心, 北京 100048)

摘要: 由于左右侧不对称且不规则的边界条件延伸到远场, 斜坡地形场地的地震波动场求解存在一定困难。为得到成层半空间中斜坡地形场地的地震动力响应, 基于波场理论提出一种以相似拼接线为缩放中心的比例边界有限元法计算模型: 首先将待求波动场分解为具有规则边界条件的已知波场和由已知波场在真实不规则边界处引起的散射波场, 然后通过在斜坡场地的不规则边界处施加等效地震荷载将散射波场的求解由外源输入问题转化为内源辐射问题, 最后推导了适用于水平及倾斜成层、左右岸不对称等复杂地基的比例边界有限元法, 可沿径向解析地求解斜坡场地的内源辐射问题。通过与文献中均质和成层弹性半空间中凹陷地形场地在 SH 波入射条件下地表动力响应进行对比, 表明了计算模型的准确性, 并通过分析成层半空间中斜坡地形场地的波动响应验证了模型的有效性。提出的计算模型, 为复杂地基-结构相互作用分析的输入波动场计算提供了新的技术手段。

关键词: 斜坡地形; 成层半空间; 地震动输入; 比例边界有限元法; 地震波动响应

中图分类号: TU435 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2023)05-1008-09

作者简介: 李艳朋(1994—), 男, 博士研究生, 主要从事地震工程和工程波动等方面的研究工作。E-mail: liyanp@mail.dlut.edu.cn。

Model for seismic dynamic response of slope terrain site in layered half-space based on scaled boundary finite element method

LI Yanpeng^{1,2}, LI Zhiyuan³, HU Zhiqiang^{1,2}, LIN Gao^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Coast and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China; 2. Institute of Earthquake Engineering, Faculty of Infrastructure Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China; 3. Earthquake Engineering Research Center, China Institute of Water Resources and Hydropower Research, Beijing 100048, China)

Abstract: For the slope terrain site, the asymmetric and irregular boundary conditions at the left and right sides extend to the far field, which makes it difficult to solve the ground motion waves. In order to obtain the seismic dynamic response of the layered slope terrain sites, based on the wave field theory, a computational model proposed for the scaled boundary finite element method (SBFEM) whose scaling center is the splicing lines. Firstly, the wave field to be determined is decomposed into the known wave field with regular boundary conditions and the scattered wave field caused by the real irregular boundary of the slope-shaped site in the known wave field. Then, the solution of the scattered wave field is transformed from the wave scattered problem to the internal radiation one by applying the equivalent seismic loads on the irregular boundary of the slope terrain site. Finally, the SBFEM, which is suitable for the foundation with horizontal and inclined layers and asymmetric left and right sides, is derived for the internal radiation problem of the slope terrain site analytically along the radial direction. The accuracy of the model is demonstrated by comparing the surface dynamic responses of the depressed terrain site in the uniform and layered elastic half-space under the SH wave incident in the literature, and the validity of the model is verified by analyzing the wave response of the slope terrain site in the layered half-space. The proposed model provides an alternative technique for calculation of the input wave field of the complex soil-structure interaction analysis.

Key words: slope terrain; layered half-space; seismic wave input; SBFEM; seismic wave response

0 引言

多次震害调查表明斜坡地形对地震波的传播影响

基金项目: 国家自然科学基金项目(52209157); 西藏自治区重点研发计划项目(XZ202101ZY0002G)

收稿日期: 2021-11-23

*通信作者(E-mail: zhiyuanli@mail.dlut.edu.cn)

巨大: 1985年智利中部发生7.4级地震, 位于山脊顶部的诸多建筑物破坏严重, 几乎不可修复; 1987年Celebi^[1]对实测地震数据的研究发现, 地震引起的破坏在山脊顶部及陡崖顶趋于严重; 1997年Ashford等^[2]对发生在太平洋断崖陡坡的北岭地震定量化分析的结果表明, 建筑结构最严重的破坏都集中在陡坡顶部; 在2008年汶川地震中也存在多例坡顶建筑物倒塌现象^[3]。由此可见, 斜坡地形地震灾害造成的损失巨大, 已在地震工程和工程抗震领域引起了广泛关注。随着西部大开发的深入及“一带一路”建设, 深入研究斜坡地形场地的地震波动特性对工程实践和科学研究所具有重要意义。

如图1所示, 斜坡场地是典型的左右岸非对称场地, 显著特点为不规则的边界条件一直延伸到远场, 不能通过构造近场广义结构将所有的不规则边界包括在内。

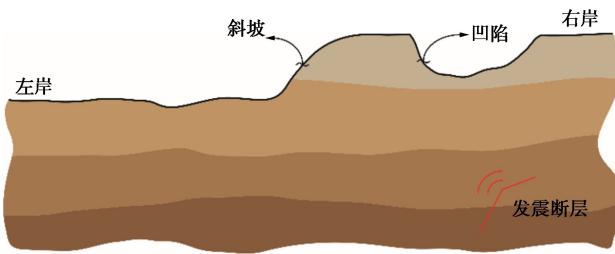


图1 成层场地中斜坡等地表不规则地形震区示意图

Fig. 1 Schematic diagram of asymmetric topographical earthquake zone at left and right banks of layered site

现有的场地地震波动响应求解模型^[4-6]都假定左右两岸的远场地表具有相同的高程, 这样可以采用水平波数描述地震波的水平向的传播。但对于左右岸地表高程不同的斜坡场地, 因其地表边界条件的不规则性, 采用上述计算模型直接进行分析存在较大近似性, 其计算结果的可靠性缺乏有效的校验。为解决以上问题, 针对斜坡地形的地震波传播问题, 国内外学者发展了多种求解模型。Ashford等^[7]将斜坡场地分成三部分, 并在左侧、右侧和底部分别设置一致透射边界, 其中左右两侧的透射边界在水平向是解析的, 垂直向采用一阶形函数进行插值, 底部半空间采用黏弹性人工边界进行模拟, 然而该模型中尚存在从边界处反射回系统的散射能量。赵密等^[8]基于黏弹性边界, 发展了一种阶梯地形成层场地的地震动输入方法, 侧面人工边界处采用各自高程场地的自由场响应作为输入, 底部边界采用入射波场作为输入。该方法假定左右两侧的波场为各自高程场地的自由场, 在应用中需将模型的水平向范围取得足够大, 用以消除左右岸不同高程场地产生的散射波对输入地震动的影

响, 在截取模型的计算范围时依赖于经验或多次试算, 导致计算结果仍存在近似性。Zhang等^[9]采用类似思路, 将三维复杂场地截断模型的5个界面(4个侧立面和1个底面)分别按照自由场进行计算, 得到地震动等效输入荷载, 进而计算了左右岸非对称的三维河谷场地地震动力响应, 但需要指出该方法中5个界面交界处的等效荷载不满足连续性条件。巴振宁等^[10]提出一种用于求解成层半空间中斜坡地形动力响应的间接边界元方法, 通过在边界上施加斜线和水平线虚拟均布荷载来模拟斜坡地形产生的散射波场, 计算精度较高。

综合以上研究可以看出, 斜坡形场地的地震波动响应的难点主要集中在两个方面: ①在截断处设置的人工边界条件均是基于自由场波动传播假定而进行地推导, 对于斜坡形场地会有一定近似性; ②地震的输入仍依赖于具有规则边界条件的自由场的波场, 这导致必须要将截断边界放置的足够远以保证计算精度。比例边界有限元方法(SBFEM)^[11-13]是近年来发展起来的一种半解析的数值方法, 能够很好地模拟无限域的波动传播问题。SBFEM只需离散边界, 使计算降低一维; SBFEM构造的无限域在径向上严格满足辐射条件, 并且 SBFEM 在求解控制方程时无需基本解。但传统 SBFEM 为基于相似点的比例坐标变换, 要求离散边界能够缩放到相似中心, 对于均质半空间的散射问题可以得到满意的分析结果^[14], 但对于成层场地找不到这样一个点作为相似中心进行边界单元的离散。为解决这个难题, Li等^[15]提出了一种改进的 SBFEM, 采用相似拼接线作为比例缩放中心, 能够准确地模拟水平或倾斜层状地基。Li等^[16]进一步发展了基于相似拼接线的 SBFEM, 并用于求解层状梯形河谷场地的散射问题。需要指出的是, 以上的 SBFEM 模型都针对平面内 SV-P 波的波动方程, 本文将在此基础上推导平面外 SH 波的 SBFEM 求解模型, 用以得到左右岸不对称场地的高精度人工边界。

基于自由场的地震动输入方法具有推导严格、物理意义明确等优点, 在土-结构相互作用分析、复杂场地散射场分析等问题中具有广泛应用。但对于斜坡形场地, 由于不规则边界延伸至远场, 自由场的波场不能简单地获得。为解决该问题, 本文将基于波场分解原理对待求波场进行转化以构造满足无穷边界条件的求解模型。将待求场地分解为两个辅助波场: 具有规则边界条件的已知自由波场和由已知自由波场在不规则边界产生的散射场。为求解该散射场, 将等效地震荷载施加在不规则边界使散射场的求解转化为一个内源辐射问题, 提高了计算效率和准确性。最后将两个辅助波场响应叠加即可得到场地总波场。通过与文献

中的经典解进行比较, 验证了提出模型的正确性, 进而讨论了成层半空间中斜坡场地的地震波动场特性。

1 模型控制方程

1.1 计算模型及其求解思路

图 1 为成层场地中包括斜坡地形等地表不规则地形震区示意图, 假定地基为线性黏弹性材料, 地震震源距离斜坡等地表不规则地形足够远, 地震动为平面波, 土层为水平土层。该真实场地可理想化为水平成层半空间中包含斜坡地形的场地模型, 斜坡坡顶右侧为本文关注的场地位置。图 2 为本文模型的求解过程示意图, 待求解场地的总波场可通过构造具有规则边界条件的波场 f 和波场 s 叠加得到: 辅助波场 f 为沿斜坡坡顶左侧地表回填后具有规则边界的平整场地, 如图 2 (b) 所示, 因此, 其地震动响应可解析或数值求解; 波场 s 是从待求解场地中截取的散射体模型, 包含斜坡地形、周围土体和辐射边界, 如图 2 (c) 所示, 波场 s 为辅助波场 f 在待求解场地中不规则边界处产生的牵连波场, 可转化为等效荷载作用下的内源辐射问题, 其数值计算的准确性将取决于复杂地基无限地基辐射阻尼模拟的精度。针对水平及倾斜成层、左右岸不对称等复杂地基的辐射边界, 本文推导了改进的 SBFEM, 可获得半解析的复杂地基辐射边界。因此, 地震动输入被转化为利用波场 f 求得的地震荷载, 反向施加到模型 s 的不规则边界, 得到待求解散射波场; 将辅助场地 f 的已知波场与辅助波场 s 的散射场响应叠加即可得到待求解场地的总响应。

该问题求解的难度在于辅助模型 s 中斜坡地形坡顶左侧半无限地表等效地震荷载的施加。在本文定义的斜坡场地求解模型中, 不规则边界为由斜坡坡顶处向左延伸至无穷远处, 理论上模型左侧半无限地表处均应施加荷载, 但从物理意义上讲, 当荷载施加位置距离坡顶右侧关注的位置足够远时, 荷载产生的响应对关注点的影响可以忽略不计; 因此本文采用截取的方式将坡顶左侧半无限地表截取到 A 点, 如图 2 (b) 所示; 为验证截断假定的合理性, 截断点 A 的位置需通过数值试验确定, 详见下文。同时需要说明的是,

坡顶右侧为自由边界, 并不存在等效荷载, 因此右侧只需要满足关注场地位置的取值范围即可, 右侧的延伸范围不会对场地总体响应造成影响。需要指出的是, 这里的截断与采用 FEM 截取有限域进行分析是不同的, 本文推导的改进 SBFEM 方法可以较为精确地获得截断后边界 b 处的地基辐射阻尼即地基动刚度。

1.2 控制方程推导

如图 2 所示, 以字母 s 和 i 分别表示近场地表不规则的局部地形和回填土, 以 b 和 c 分别表示截断边界和不规则地形表面, g 表示截断后的远场地基。

在频域中, 待求解场地仅在地震作用下平面外的运动方程为 Navier's 方程, 将其在计算域内进行有限元离散, 并写成分块形式:

$$\begin{bmatrix} S_{cc}^s(\omega) & S_{cs}^s(\omega) & S_{cb}^s(\omega) \\ S_{sc}^s(\omega) & S_{ss}^s(\omega) & S_{sb}^s(\omega) \\ S_{bc}^s(\omega) & S_{bs}^s(\omega) & S_{bb}^s(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c^t(\omega) \\ u_s^t(\omega) \\ u_b^t(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -p(\omega) \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中: ω 为圆频率; $S(\omega)$, $u(\omega)$ 分别为地基动刚度和平面外位移; 上角标 t 表示计算域内总位移; $p(\omega)$ 为近场结构与土的相互作用力幅值。为表述简洁, 后续推导将省略括号中的圆频率 ω 。近场区域 s 和远场地基 g 对截断边界上的节点的动力平衡方程都有影响。首先讨论无限土体的影响。对于远场开挖地基表面的位移幅值 u_b^g , 在交界面 b 上由于开挖后土体引起的相互作用力等于零^[17]。在这种情况下, 土的相互作用力将取决于 u_b^g 相对的运动, 等于 $S_{bb}^g(u_b^t - u_b^g)$, S_{bb}^g 为无限地基动刚度。则与远场地基土体接触点的运动方程为

$$S_{bc}^s u_c^t + S_{bs}^s u_s^t + S_{bb}^s u_b^t + S_{bb}^g (u_b^t - u_b^g) = 0 \quad (2)$$

将式 (2) 代入式 (1), 可以得到土-结构总体系的运动方程为

$$\begin{bmatrix} S_{cc}^s & S_{cs}^s & S_{cb}^s \\ S_{sc}^s & S_{ss}^s & S_{sb}^s \\ S_{bc}^s & S_{bs}^s & S_{bb}^s + S_{bb}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c^t \\ u_s^t \\ u_b^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S_{bb}^g u_b^g \end{bmatrix} \quad (3)$$

式 (3) 中要确定 u_b^g 并不容易。为了简化分析, 将总位移 u^t 表示为自由场位移 u^f 和除自由场以外的散射

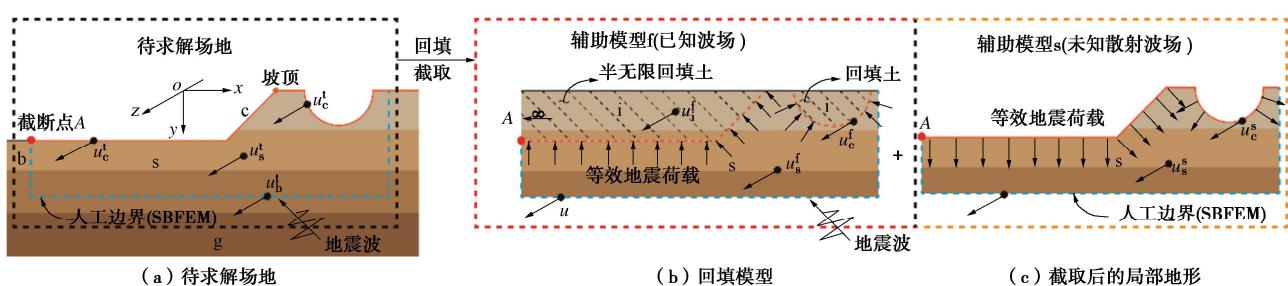


图 2 计算模型分析过程示意图

Fig. 2 Schematic diagram of analysis process

场位移 u^s 之和, 即

$$u^t = u^f + u^s \quad . \quad (4)$$

将式 (4) 代入式 (3) 可得

$$\begin{bmatrix} S_{cc}^s & S_{cs}^s & S_{cb}^s \\ S_{sc}^s & S_{ss}^s & S_{sb}^s \\ S_{bc}^s & S_{bs}^s & S_{bb}^s + S_{bb}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c^s + u_c^f \\ u_s^s + u_s^f \\ u_b^s + u_b^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S_{bb}^g u_b^g \end{bmatrix} \quad . \quad (5)$$

进一步整理得

$$\begin{bmatrix} S_{cc}^s & S_{cs}^s & S_{cb}^s \\ S_{sc}^s & S_{ss}^s & S_{sb}^s \\ S_{bc}^s & S_{bs}^s & S_{bb}^s + S_{bb}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c^s \\ u_s^s \\ u_b^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_c \\ p_s \\ p_b \end{bmatrix} \quad . \quad (6)$$

式中:

$$p_c = -(S_{cc}^s u_c^f + S_{cs}^s u_s^f + S_{cb}^s u_b^f) \quad ; \quad (7a)$$

$$p_s = -(S_{sc}^s u_c^f + S_{ss}^s u_s^f + S_{sb}^s u_b^f) \quad ; \quad (7b)$$

$$p_b = S_{bb}^g u_b^g - [S_{bc}^s u_c^f + S_{bs}^s u_s^f + (S_{bb}^s + S_{bb}^g) u_b^f] \quad . \quad (7c)$$

将待求场地沿不规则地表回填得到地表平整的辅助模型 f , 区域 i 表示回填土。辅助模型 f 中的地震激励、区域 s 的介质材料均与待求场地中对应位置相同, 其自由场响应可解析获得。 u_i^f , u_s^f , u_b^f 分别表示相应区域的节点位移, 下标 s 和 b 与原场地 (图 2 (a)) 具有相同的意义。对辅助模型 f 中区域 s (图 2 (b)) 进行有限元离散, 其运动方程可以写为

$$\begin{bmatrix} S_{cc}^s & S_{cs}^s & S_{cb}^s \\ S_{sc}^s & S_{ss}^s & S_{sb}^s \\ S_{bc}^s & S_{bs}^s & S_{bb}^s + S_{bb}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c^f \\ u_s^f \\ u_b^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f \\ 0 \\ S_{bb}^g u_b^g \end{bmatrix} \quad . \quad (8)$$

式中: f 为地震作用下回填土与不规则地形交界面 c 处的界面荷载, 称其为等效地震荷载。

进一步地, 式 (8) 可写为

$$-(S_{cc}^s u_c^f + S_{cs}^s u_s^f + S_{cb}^s u_b^f) = f \quad , \quad (9a)$$

$$S_{sc}^s u_c^f + S_{ss}^s u_s^f + S_{sb}^s u_b^f = 0 \quad , \quad (9b)$$

$$S_{bc}^s u_c^f + S_{bs}^s u_s^f + (S_{bb}^s + S_{bb}^g) u_b^f = S_{bb}^g u_b^g \quad . \quad (9c)$$

将式 (9a), (9b), (9c) 代入式 (7a), (7b), (7c) 得

$$p_c = f \quad , \quad (10a)$$

$$p_s = 0 \quad , \quad (10b)$$

$$p_b = 0 \quad . \quad (10c)$$

将式 (10a), (10b), (10c) 代入式 (6) 得

$$\begin{bmatrix} S_{cc}^s & S_{cs}^s & S_{cb}^s \\ S_{sc}^s & S_{ss}^s & S_{sb}^s \\ S_{bc}^s & S_{bs}^s & S_{bb}^s + S_{bb}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c^s \\ u_s^s \\ u_b^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (11)$$

式 (11) 即为等效地震荷载反向施加到辅助模型 s (图 2 (c)) 上局部地形的运动方程, 求解该方程的关键为等效地震荷载 f 的求解。

对于辅助模型 f , 回填土 (区域 i) 的运动学方程

可写为

$$\begin{bmatrix} S_{ss}^i & S_{sc}^i \\ S_{cs}^i & S_{cc}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^f \\ u_c^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} \quad . \quad (12)$$

进一步地推导得

$$S_{cs}^i u_i^f + S_{cc}^i u_c^f = f \quad , \quad (13a)$$

$$S_{ss}^i u_i^f + S_{sc}^i u_c^f = 0 \quad . \quad (13b)$$

将式 (13b) 代入式 (13a) 即可得到等效地震荷载 f 为

$$f = (-S_{cs}^i S_{ss}^{i-1} S_{sc}^i + S_{cc}^i) S_c^f \quad . \quad (14)$$

将式 (14) 代入式 (11) 得

$$\begin{bmatrix} S_{cc}^s & S_{cs}^s & S_{cb}^s \\ S_{sc}^s & S_{ss}^s & S_{sb}^s \\ S_{bc}^s & S_{bs}^s & S_{bb}^s + S_{bb}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c^s \\ u_s^s \\ u_b^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-S_{cs}^i S_{ss}^{i-1} S_{sc}^i + S_{cc}^i) u_c^f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (15)$$

利用式 (15) 就可以得到辅助模型 s 的散射场响应 u^s , 最后将辅助模型 f 的自由场响应与辅助模型 s 的散射场响应 u^s 叠加就可以得到整个场地的总响应 u^t 。通过以上推导可以明确的是, 本文模型通过将地震动输入转化为等效地震荷载施加到辅助模型地表, 将地震动外源问题转化为内源问题, 从而避免了求解左右岸非对称场地的自由场作为地震动输入的难题。式中的无限地基动刚度 S_{bb}^g 的求解见下文。

2 标量波动方程的相似拼接线 SBFEM

2.1 比例边界坐标变换

在求解辅助模型 s 的内源辐射问题时, 地基辐射阻尼采用基于相似拼接线的 SBFEM 模拟。为克服传统 SBFEM 的相似性局限, 本文选取相似拼接线作为相似中心建立比例坐标变换。如图 3 所示, M_1-M_9 为近场-远场交界面即截断边界线, L_1-L_9 为相似拼接线。截断边界线沿着材料分界面向内平移, 将各段拼接线首尾相连, 并平行于各自对应的边界线, 得到对应的相似拼接线。 ξ 为归一化的径向坐标并定义相似拼接线 L_1-L_9 处的 $\xi_0=0$, 截断边界 M_1-M_9 处 $\xi_b=1$, 无限域地基域内 $\xi>1$, η 为环向坐标。

根据无限子域内任意拼接线 $\xi=\text{const}$ 和边界线的相似性, 可建立域内任意一点笛卡尔坐标 (\hat{x}, \hat{y}) 与比例坐标 (ξ, η) 的变换关系为

$$\begin{cases} \hat{x} = \hat{x}_0 + \xi(\hat{x}_b - \hat{x}_0) \\ \hat{y} = \hat{y}_0 + \xi(\hat{y}_b - \hat{y}_0) \end{cases} \quad . \quad (16)$$

式中: \hat{x} , \hat{y} 为无限域内任意点的坐标; \hat{x}_0 , \hat{y}_0 为相似拼接线上点的坐标; \hat{x}_b , \hat{y}_b 为边界线上点的坐标。

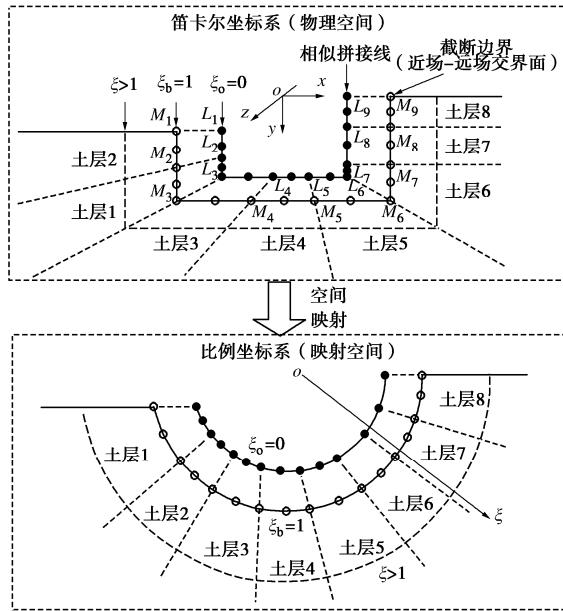


图 3 不同坐标系的映射关系

Fig. 3 Mapping relationship of different coordinate systems

用相同的线单元离散边界线和相似拼接线, 其坐标可用相同的形函数由所在单元节点坐标插值得

$$\begin{cases} \hat{x}_i = N(\eta)x_i \\ \hat{y}_i = N(\eta)y_i \end{cases} \quad (17)$$

式中: $N(\eta)$ 为线单元节点对应的形函数; x_i , y_i 为线单元节点坐标; $x_i = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, $y_i = [y_1, y_2, \dots, y_n]$, $i=0, b$ 。

将式(17)代入式(16)得

$$\begin{cases} \hat{x} = N(\eta)x_0 + \xi N(\eta)(x_b - x_0) \\ \hat{y} = N(\eta)y_0 + \xi N(\eta)(y_b - y_0) \end{cases} \quad (18)$$

笛卡尔坐标(\hat{x}, \hat{y})与比例边界坐标(ξ, η)之间的 Jacobian 矩阵为

$$\begin{aligned} \hat{J}(\xi, \eta) &= \begin{Bmatrix} \hat{x}_{,\xi} & \hat{y}_{,\xi} \\ \hat{x}_{,\eta} & \hat{x}_{,\eta} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} N(\eta)x - N(\eta)\hat{x}_0 & N(\eta)y - N(\eta)\hat{y}_0 \\ \xi(N(\eta)_{,\eta}x - N(\eta)_{,\eta}\hat{x}_0) & \xi(N(\eta)_{,\eta}y - N(\eta)_{,\eta}\hat{y}_0) \end{Bmatrix} + \\ &\quad \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ N(\eta)_{,\eta}\hat{x}_0 & N(\eta)_{,\eta}\hat{y}_0 \end{Bmatrix} \quad (19) \end{aligned}$$

由式(19)得到 Jacobian 矩阵的逆矩阵为

$$\hat{J}^{-1}(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} j_{11}(\xi, \eta) & j_{12}(\xi, \eta) \\ j_{21}(\xi, \eta) & j_{22}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (20)$$

式中:

$$\begin{cases} j_{11}(\xi, \eta) = |\hat{J}(\xi, \eta)|^{-1}(\xi(N(\eta)_{,\eta}y - N(\eta)_{,\eta}\hat{y}_0) + N(\eta)_{,\eta}\hat{y}_0), \\ j_{22}(\xi, \eta) = |\hat{J}(\xi, \eta)|^{-1}(N(\eta)x - N(\eta)\hat{x}_0), \\ j_{21}(\xi, \eta) = -|\hat{J}(\xi, \eta)|^{-1}(\xi(N(\eta)_{,\eta}x - N(\eta)_{,\eta}\hat{x}_0) + N(\eta)_{,\eta}\hat{x}_0), \\ j_{12}(\xi, \eta) = -|\hat{J}(\xi, \eta)|^{-1}(N(\eta)y - N(\eta)\hat{y}_0). \end{cases} \quad (21)$$

2.2 平面外比例边界坐标体系位移方程

由式(19)~(21)可得到整体坐标(\hat{x}, \hat{y})的偏导数为

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \end{Bmatrix} = \hat{J}^{-1}(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_{11}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} + j_{12}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \\ j_{21}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} + j_{22}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

因此, 偏微分算子可以表示为

$$\mathbf{L} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \end{Bmatrix} = b^1 \frac{\partial}{\partial \xi} + b^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \quad , \quad (23)$$

$$\text{式中: } b^1 = \begin{bmatrix} j_{11}(\xi, \eta) \\ j_{21}(\xi, \eta) \end{bmatrix}; \quad b^2 = \begin{bmatrix} j_{12}(\xi, \eta) \\ j_{22}(\xi, \eta) \end{bmatrix}.$$

对于平面外波动, 笛卡尔坐标系下二维弹性动力学频域内的运动方程为

$$L^T \boldsymbol{\tau} + \mathbf{p} + \omega^2 \rho \mathbf{u} = 0 \quad . \quad (24)$$

式中: $\boldsymbol{\tau} = [\tau_{zy} \ \tau_{zx}]^T$ 为应力向量; \mathbf{p} 为体力向量 $\mathbf{p} = p_z$; \mathbf{u} 为平面外位移向量; $\mathbf{u} = u_z = u(y)$ 。

利用式(23), (24)可被转换到比例边界坐标系(ξ, η)中:

$$b_1^T \boldsymbol{\tau}_{,\xi} + b_2^T \boldsymbol{\tau}_{,\eta} + \mathbf{p} + \omega^2 \rho \mathbf{u} = 0 \quad . \quad (25)$$

采用使余量的加权积分为零来求解控制方程(25)的近似解可以得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w^T b_1^T \boldsymbol{\tau}_{,\xi} d\Omega + \int_{\Omega} w^T b_2^T \boldsymbol{\tau}_{,\eta} d\Omega + \int_{\Omega} w^T \mathbf{p} d\Omega + \\ \omega^2 \int_{\Omega} w^T \rho \mathbf{u} d\Omega = 0 \quad , \end{aligned} \quad (26)$$

式中: Ω 为求解域; $w = w(\xi, \eta) = N_u(\eta)\hat{w}(\xi)$ 为权函数; $d\Omega = |\hat{J}| d\xi d\eta$ 。应力-应变关系为

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{G}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad , \quad (27)$$

式中: $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_{zy} \ \gamma_{zx}]^T$ 为应变向量, \mathbf{G} 为弹性矩阵。位移 $\mathbf{u}(\xi, \eta)$ 可表示为

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = N_u(\eta)\hat{\mathbf{u}}(\xi) \quad , \quad (28)$$

式中: $\hat{\mathbf{u}}(\xi)$ 为与 ξ 相关的节点位移向量。

将式(23), (28)代入式(27), 则应力向量可以用节点位移表示为

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{G}(B_1 \hat{\mathbf{u}}(\xi)_{,\xi} + B_2 \hat{\mathbf{u}}(\xi)) \quad , \quad (29)$$

$$\text{式中: } B_1 = b^1 N_u(\eta); \quad B_2 = b^2 N_u(\eta)_{,\eta}.$$

进一步整理可得到频域内基于相似拼接线的平面外 SBFEM 位移控制方程:

$$(E_0(\xi)\hat{\mathbf{u}}(\xi)_{,\xi} + E_1(\xi)^T \hat{\mathbf{u}}(\xi))_{,\xi} - (E_1(\xi)\hat{\mathbf{u}}(\xi)_{,\xi} + E_2(\xi)\hat{\mathbf{u}}(\xi)) + \omega^2 M_0(\xi)\hat{\mathbf{u}}(\xi) + F_t(\xi) = 0 \quad , \quad (30)$$

式中:

$$\begin{aligned}
 E_0(\xi) &= \sum_e \int_{-1}^{+1} B_1^T \mathbf{G} B_1 |\hat{J}| d\eta ; \\
 E_1(\xi) &= \sum_e \int_{-1}^{+1} B_2^T \mathbf{G} B_1 |\hat{J}| d\eta ; \\
 E_2(\xi) &= \sum_e \int_{-1}^{+1} B_2^T \mathbf{G} B_2 |\hat{J}| d\eta ; \\
 M_0(\xi) &= \sum_e \int_{-1}^{+1} N_u(\eta)^T \rho N_u(\eta) |\hat{J}| d\eta ; \\
 M_0(\xi) &= \sum_e \int_{-1}^{+1} N_u(\eta)^T \rho N_u(\eta) |\hat{J}| d\eta ; \\
 F_t(\xi) &= \sum_e ([N_u(\eta)]^T [b^2]^T |\hat{J}| \tau) \Big|_{\eta=-1}^{+1} .
 \end{aligned}$$

2.3 平面外比例边界坐标体系动刚度方程

定义 t^ξ 为曲线 S_η 法线方向的应力向量:

$$t^\xi = \frac{b_1^T \tau |\hat{J}|}{g^\xi} . \quad (31)$$

式中: $g^\xi = \sqrt{(\hat{x}_\eta)^2 + (\hat{y}_\eta)^2}$ 。当 ξ 为某一常数时, 无限小曲线 dS_η 可以表示为

$$dS_\eta = \sqrt{(\hat{x}_\eta)^2 + (\hat{y}_\eta)^2} d\eta . \quad (32)$$

对于任意曲线 dS_η , 虚功原理可以写成如下形式:

$$\hat{w}^T Q(\xi) = \int_{S_\eta} w(\xi, \eta) t^\xi dS_\eta . \quad (33)$$

式中: $Q(\xi)$ 为内部节点力。

将式 (31), (32) 代入式 (33) 得

$$\begin{aligned}
 Q(\xi) &= \sum_e \int_{-1}^{+1} N_u(\eta)^T b_1^T \tau |\hat{J}| d\eta \\
 &= E_0(\xi) \hat{u}(\xi)_{,\xi} + E_1(\xi)^T \hat{u}(\xi) .
 \end{aligned} \quad (34)$$

将体积力和表面力引起的节点力定义为 $R^F(\xi)$, 动刚度 $S(\omega, \xi)$ 可以表示为

$$R(\xi) = S(\omega, \xi) \hat{u}(\xi) - R^F(\xi) . \quad (35)$$

利用式 (34), (35) 以及 $Q(\xi)$ 与 $R(\xi)$ 之间的关系可得

$$S(\omega, \xi) \hat{u}(\xi) - R^F(\xi) = -E_0(\xi) \hat{u}(\xi)_{,\xi} - E_1(\xi)^T \hat{u}(\xi) . \quad (36)$$

由式 (30), (36), 并考虑到 $\hat{u}(\xi)$ 的任意性, 可得

$$\begin{aligned}
 S(\omega, \xi)_{,\xi} - [S(\omega, \xi) + E_1(\xi)] E_0(\xi)^{-1} [S(\omega, \xi) + \\
 E_1(\xi)^T] - E_2(\xi) - \omega^2 M_0(\xi) = 0 .
 \end{aligned} \quad (37)$$

式 (37) 即为频域内基于相似拼接线的平面外 SBFEM 对 ξ 求偏导的动刚度控制方程。对于任意的 ξ , 引入无量纲频率 a_0 :

$$a_0 = \frac{\omega(L_0 + \Delta L \xi)}{c_s} . \quad (38)$$

式中: L_0 为相似拼接线的长度; ΔL 为相似拼接线与边界线之间的差值; c_s 为剪切波速。由量纲分析可得:

$$\frac{\partial S(\omega, \xi)}{\partial \xi} = \frac{\omega \Delta L}{L_0 + \Delta L \xi} \frac{\partial S(\omega, \xi)}{\partial \omega} . \quad (39)$$

将式 (39) 代入式 (37) 得

$$\begin{aligned}
 \omega S(\omega, \xi)_{,\omega} - (S(\omega, \xi) + \bar{E}_1(\xi)) \bar{E}_0(\xi)^{-1} (S(\omega, \xi) + \\
 \bar{E}_1(\xi)^T) + \bar{E}_2(\xi) - \omega^2 \bar{M}_0(\xi) = 0 .
 \end{aligned} \quad (40)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{E}_0(\xi) &= \frac{\Delta L}{L_0 + \Delta L \xi} E_0(\xi) ; \\
 \bar{E}_1(\xi) &= E_1(\xi) ; \\
 \bar{E}_2(\xi) &= \frac{L_0 + \Delta L \xi}{\Delta L} E_2(\xi) ; \\
 \bar{M}_0(\xi) &= \frac{L_0 + \Delta L \xi}{\Delta L} M_0(\xi) .
 \end{aligned} \right\}$$

式 (40) 即为基于相似拼接线的平面外 SBFEM 对 w 求偏导的刚度控制方程。当相似拼接线 L_0 取为零时, 式 (40) 即退化为传统 SBFEM 对应的控制方程。由此可认为基于点相似的传统 SBFEM 为基于相似拼接线 SBFEM 的一种特殊情况, 这也证明了以拼接线为相似中心的 SBFEM 具有更广泛的解题范围。

为求解式 (40) 文献中发展了多种技术, 本文采用高频渐进展开法进行求解。首先求出当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 人工边界处 ($\xi_b = 1$) 的动刚度, 这里取一个较大的频率 ω_h 用于替换 $\omega \rightarrow \infty$, 即可得到动刚度 $S(\omega_h, \xi_b = 1)$, 之后可采用 Runge-Kutta 法计算指定频率 ω^* 的人工边界上的动刚度 S_{bb}^g 。

3 数值算例

本节首先通过与文献中经典算例进行对比, 验证建立模型的准确性和适用性, 进而基于所提出模型, 研究斜坡地形场地的地震波场特性。

3.1 均匀半空间中凹陷场地 SH 波入射

为验证本文提出方法的正确性, 首先研究均匀弹性半空间中半圆形河谷在 SH 波垂直入射和斜入射 (入射角 $\Phi = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$) 条件下的动力响应。弹性半空间的泊松比 $\nu = 1/3$, 河谷半径为 a , 见图 4。

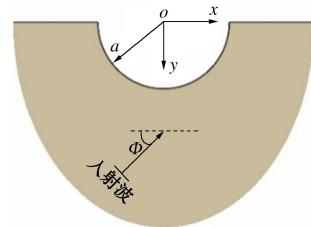


图 4 均质半空间中半圆形河谷示意图

Fig. 4 Schematic diagram of a semi-circular valley in homogeneous half-space

无量纲频率可以表示为 $\eta = \omega a / (c_s \pi)$ 。图 5 为无量纲频率为 0.25, 1.25 时 SH 波入射半圆形河谷地表位移响应。结果表明: 在 SH 波垂直入射和斜入射条件

下, 本文方法得到的结果与解析解^[18]吻合较好。

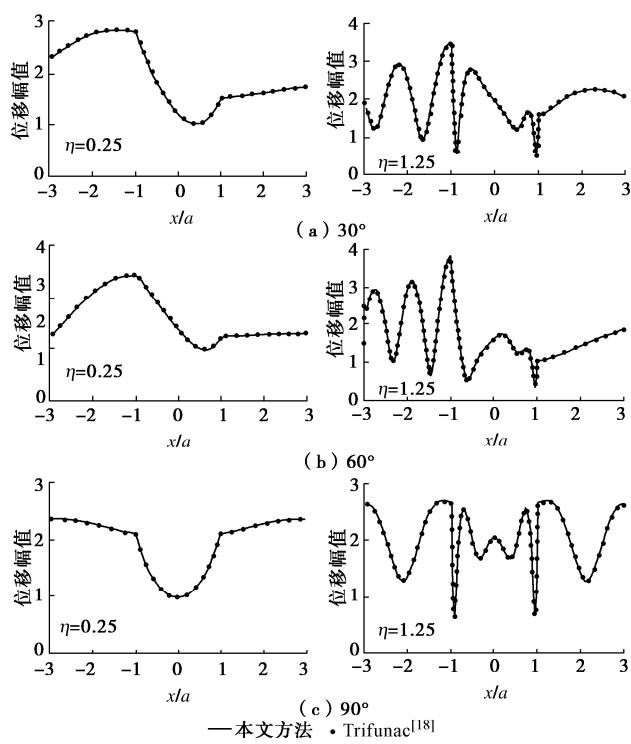


图 5 SH 波入射时地表位移响应

Fig. 5 Surface displacements induced by incident SH waves

3.2 成层半空间中梯形河谷场地 SH 波入射

为验证本文方法在计算成层半空间中凹陷地形动力响应的准确性, 本节以图 6 所示的单一土层 (下角标 L 表示) 置于弹性半空间 (下角标 R 表示) 中的梯形截面河谷为例, 计算了入射角为 60°, 90° 的 SH 波入射条件下地表动力响应。河谷总宽度为 a , 河谷底面与下部岩石表面重合。计算中介质参数假设: 质量密度 $\rho_L / \rho_R = 1.0$, 剪切波速 $c_{sL}/c_{sR}=0.5$, 泊松比 $\nu_L = \nu_R = 1/3$, 阻尼比 $\xi_L = \xi_R = 0.05$ 。采用弹性半空间的剪切波速 c_{sR} 进行无量纲化, 无量纲频率为 $\lambda = 2\pi c_{sR}/(\omega a)$ 。图 7 为入射波无量纲频率 λ 为 4, 2 时的河谷地表位移响应。可见本文结果与 Vogt 等^[19]采用频域内间接边界元方法的结果趋于一致。

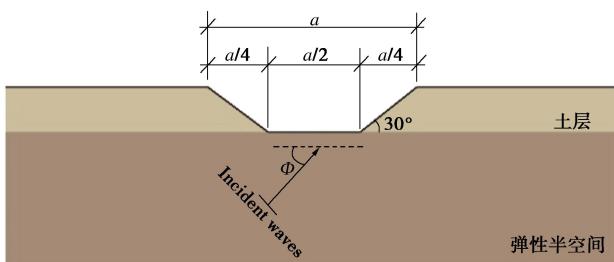


图 6 成层半空间中梯形河谷横截面示意图

Fig. 6 Cross section of canyon in layered half-space

3.3 成层半空间中斜坡地形场地 SH 波垂直入射

采用本文提出的模型计算了 SH 波垂直入射条件下成层半空间中斜坡地形场地地震动力响应。如图 8

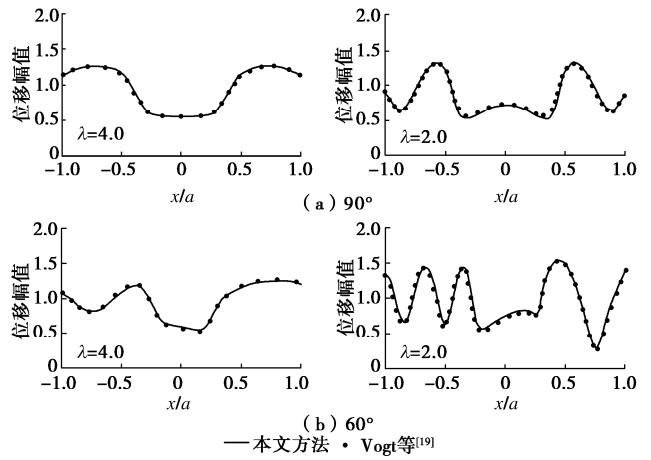


图 7 SH 波入射时地表位移响应

Fig. 7 Surface displacements induced by SH waves

所示, 斜坡垂直高度为 H ; 斜坡坡角为 70°; 上覆土层厚度为 $2H$; 坡顶右侧的斜坡上台阶 (地表绿线) 为所要讨论的场地区域, 其截断范围 L 的大小不会对场地响应造成影响, 可根据实际需要进行取值, 本节中取 L 为 $10.5H$ 。假设材料参数: 覆盖土层用下标 L 表示, 弹性半空间用下标 R 表示, 剪切波速 $c_{sL}/c_{sR}=0.25$, 泊松比 $\nu_{sL} = \nu_{sR} = 0.25$, 密度 $\rho_L / \rho_R = 1.0$, 阻尼比 $\xi_R = \xi_L = 0.05$ 。分别计算了入射波无量纲频率 $\eta = \omega H/(c_{sR}\pi) = 1.0$, 2.0 和 4.0 时斜坡上台阶地表位移响应, 入射波幅值取为 1。按照本文建立的求解模型计算斜坡地形场地动力响应时需首先确定辅助模型中回填土的回填范围即截断点 A 的位置进而确定等效地震荷载。截断位置与入射波波长 λ 有关, 因此首先要进行求解模型的收敛性分析, 进而确定截断距离 $n\lambda$ 。

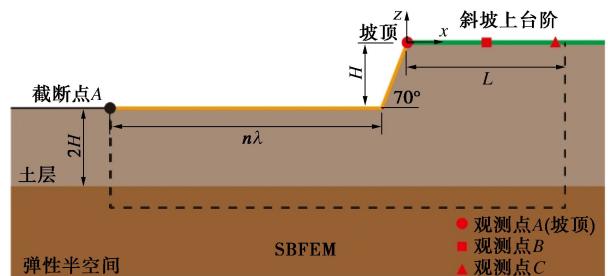


图 8 成层半空间中斜坡地形场地

Fig. 8 Slope terrain site in layered elastic half-space

图 9 给出了待求解入射波频率下具有代表性的观测点位移幅值随截断距离 $n\lambda$ 的变化, 可以看出, 在本文计算的入射波频率下, 随着截断距离的增大, 位移幅值具有较好的收敛性, 当截断距离大于 6 倍波长时, 观测点位移幅值几乎不再变化。后文中在计算等效地震荷载时, 回填土的回填范围取为 6 倍的波长即 $n=6$ 就可以满足计算精度要求。截取的局部地形采用 FEM 模拟, 网格大小取为 $\lambda/10$, 无限地基采用第 2 节推导的 SBFEM 模拟。

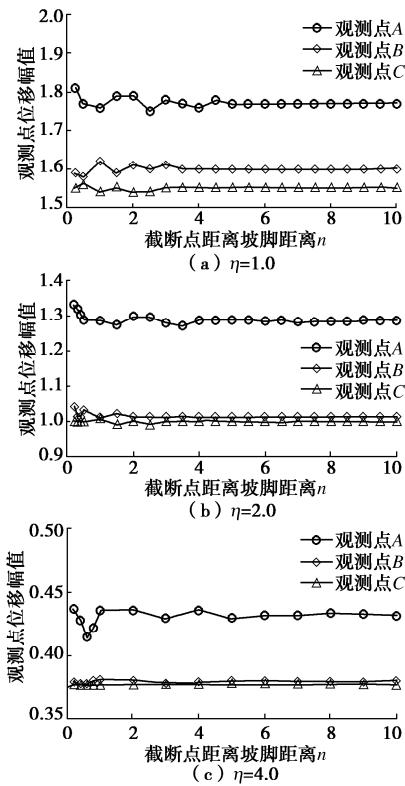


图9 不同入射波频率下各观测点位移幅值截断距离 $n\lambda$ 收敛情况

Fig. 9 Convergence of displacement amplitude versus cutoff distance at some positions with different incident frequencies

图10为不同频率入射波条件下斜坡上台阶的地表位移幅值。可以发现,不同入射波频率对地表位移分布、幅值均有很大影响,随着入射波频率的增大,地表位移幅值峰值 u_{\max} 逐渐增大,位置靠近斜坡顶点(观测点A)。斜坡地形对场地的放大效应明显,不同入射波频率激励条件下,本文所讨论的成层半空间中斜坡地形场地对应的平整场地的自由场响应即距离斜坡地形足够远时地表的位移响应分别为1.52, 1.01, 0.38, 因此,地震动放大倍数分别为1.22, 1.31, 1.45, 可见对于本文计算模型,随着入射波频率的增大,放大倍数逐渐增大。由图10可以发现当斜坡上台阶位置点的坐标 x 逐渐变大即远离斜坡地形时,各点的位移幅值逐渐接近平整场地的自由场响应,此时斜坡地形的散射效应对这些位置的响应几乎没有影响,这一现象从另一个方面证明了本文模型的正确性。

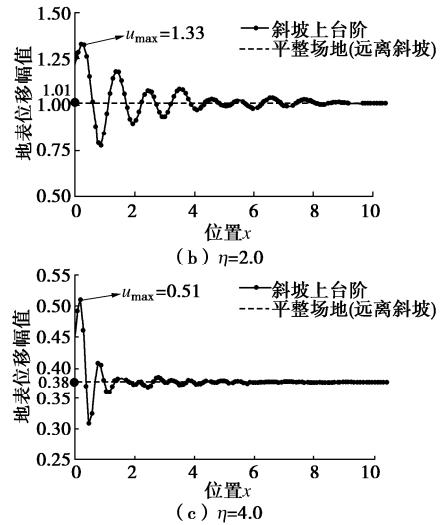
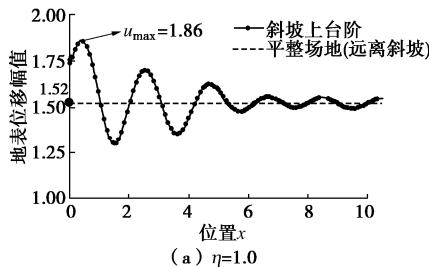


图10 斜坡上台阶地表位移幅值

Fig. 10 Amplitudes of ground surface displacement of steps on slope

4 结 论

在土-结构相互作用分析中,首先要完成的任务就是计算未开挖或未叠加结构前场地地震动力响应。斜坡地形是工程中常见的地形及场地形态,研究其地震动的空间分布对核电、大坝、桥梁等结构的选址和抗震安全分析都具有重要意义。

(1) 本文基于波场分解理论,提出一种针对成层斜坡地形场地地震波动力响应的求解模型。方法将复杂波场的求解转化为等效地震荷载作用下的辐射问题,有效地降低了波动问题的求解难度。提出的基于相似拼接线的比例边界有限元法严格满足斜坡形场地无穷远处的辐射条件,从而保证了等效地震荷载作用下辐射问题的求解精度。

(2) 针对SH波垂直和斜入射时均质弹性半空间和成层弹性半空间的散射问题,采用本文方法的结果与文献中结果吻合较好,从而验证了地震动输入方法及SBFEM人工边界的正确性。

(3) 基于提出模型对成层半空间中斜坡地形场地进行了研究,结果表明:斜坡地形对地震动放大效应明显,尤其在坡顶位置,且随着入射波频率的增大,放大倍数逐渐增大。因此,在结构选址和抗震安全分析时需谨慎考虑斜坡地形带来的不利影响。

本文提出的地震动输入方法不仅限于SH波,对于二维平面内和三维波动问题同样适用。本文仅验证了计算模型的可靠性和准确性,尚缺乏对斜坡成层半空间中斜坡场地的动力响应特征以及如何将其简化为水平成层场地的定量评价,这将是后续研究工作的重点。

参 考 文 献:

- [1] CELEBI M. Topographical and geological amplifications

- determined from strong-motion and aftershock records of the 3 March 1985 Chile earthquake[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1987, **77**(4): 1147-1167.
- [2] ASHFORD S A, SITAR N. Analysis of topography amplification of inclined shear waves in a steep coastal bluff[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1997, **87**(3): 692-700.
- [3] 殷跃平. 汶川八级地震地质灾害研究[J]. *工程地质学报*, 2008, **16**(4): 433-444. (YIN Yueping. Research on the geo-hazards triggered by Wenchuan earthquake[J]. *Journal of Engineering Geology*, 2008, **16**(4): 433-444. (in Chinese))
- [4] 刘晶波, 李彬. 三维黏弹性静-动力统一人工边界[J]. *中国科学(E辑)*, 2005, **9**: 72-86. (LIU Jingbo, LI Bin. A unified viscous-spring artificial boundary for 3D static and dynamic applications[J]. *Science China E*, 2005, **9**: 72-86. (in Chinese))
- [5] 赵密, 杜修力, 刘晶波等. P-SV 波斜入射时成层半空间自由场的时域算法[J]. *地震工程学报*, 2013, **35**(1): 84-90. (ZHAO Mi, DU Xiuli, LIU Jingbo, et al. Time-domain method for free field in layered half space under P-SV waves of oblique incidence[J]. *Chinese Earthquake Engineering Journal*, 2013, **35**(1): 84-90. (in Chinese))
- [6] 杜修力, 赵密. 一种新的高阶弹簧-阻尼-质量边界-无限域圆柱对称波动问题[J]. *力学学报*, 2009, **41**(2): 207-215. (DU Xiuli, ZHAO Mi. A novel high-order spring-dashpot-mass boundary for cylindrical-symmetry wave motions in infinite domain[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2009, **41**(2): 207-215. (in Chinese))
- [7] ASHFORD S A, SITAR N, LYSMER J, DENG N. Topographic effects on the seismic response of steep slopes[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1997; **87**(3):701.
- [8] 赵密, 孙文达, 高志懂, 等. 阶梯地形成层场地的斜入射地震动输入方法[J]. *工程力学*, 2019, **36**(12): 62-68. (ZHAO Mi, SUN Wenda, GAO Zhidong, et al. Input method of obliquely incident earthquake for step-shaped layered site[J]. *Engineering Mechanics*, 2019, **36**(12): 62-68. (in Chinese))
- [9] ZHANG X L, PENG X B, Li X J, et al. Three-Dimensional seismic response in complex site conditions: A new approach based on an auxiliary-model method[J]. *Journal of Earthquake Science*, 2021, **32**(5): 1152-1165.
- [10] 巴振宁, 吴孟桃, 梁建文. 坡体几何参数与弹性模量对岩质斜坡地震动力响应的影响: IBEM 求解[J]. *岩石力学与工程学报*, 2019, **38**(8): 1578-1592. (BA Zhenning, WU Mengtao, LIANG Jianwen. Influence of geometric parameters and elastic modulus on seismic dynamic response of rock slopes by IBEM[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2019, **38**(8): 1578-1592. (in Chinese))
- [11] SONG C, WOLF J P. Consistent infinitesimal finite-element-cell method: Out-of-plane motion[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1995, **121**(5): 613-619.
- [12] WOLF J P, SONG C. Consistent infinitesimal finite-element cell method: in-plane motion[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1995, **123**(01): 355-370.
- [13] SONG C M, WOLF J P. The scaled boundary finite-element method—alias consistent infinitesimal finite-element cell method—for elastodynamics[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1997, **147**(3/4): 329-355.
- [14] 李志远, 李建波, 林皋. 局部复杂场地 Rayleigh 波传播特性分析的 SBFEM 模型研究[J]. *岩土力学*, 2018, **39**(11): 4242 - 4250. (LI Zhiyuan, LI Jianbo, LIN Gao. Research on influence of partial terrain to scattering of Rayleigh wave based on SBFEM[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2018, **39**(11): 4242-4250. (in Chinese))
- [15] LI Z Y, HU Z Q, LIN G, et al. A modified scaled boundary finite element method for dynamic response of a discontinuous layered half-space[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2020, **87**: 77-90.
- [16] LI Y P, LI Z Y, HU Z Q, et al. Coupled FEM/SBFEM investigation on the characteristic analysis of seismic motions of a trapezoidal canyon in a layered half-space[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2021, **132**: 248-262.
- [17] WOLF J P. *Dynamic Soil-structure Interaction*[M]. Englewood-Cliffs: Prentice Hall Int., 1985.
- [18] TRIFUNAC M D. Scattering of plane SH waves by a semi-cylindrical canyon[J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 1972, **1**(3): 267-281.
- [19] VOGT R F, WOLF J P, BACHMANN H. Wave scattering by a canyon of arbitrary shape in a layered half-space[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1988, **16**(6): 803-812.