

DOI: 10.11779/CJGE202108006

温度变化对深基坑内支撑轴力和变形的影响研究

金亚兵, 沈翔*, 劳丽燕

(深圳市地质局, 广东 深圳 518023)

摘要: 温度变化对深基坑内支撑轴力和变形的影响明显, 当支撑长度和断面尺寸较大时, 温差引起的内支撑轴力和变形增量不容忽视。基于内支撑-支护桩-土相互作用且变形协调的前提, 提出了采用弹性抗力法对单道支撑和多道支撑的温度应力简化计算方法。结合多道内支撑的深基坑工程案例, 采用自主研发的地质灾害与工程结构安全自动化监测预警平台(简称监测平台), 实现了深基坑内支撑系统温度变化影响的实时、连续、在线的自动化监测。监测结果验证了本文提出的多道水平支撑温度应力简化计算方法的可行性和可靠性; 证明了监测平台是深基坑支撑轴力和变形实时、连续、在线最有效的监测方法。

关键词: 深基坑; 内支撑; 温度; 轴力; 变形

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2021)08-1417-09

作者简介: 金亚兵(1965—), 男, 湖北黄梅人, 博士, 教授级高级工程师, 主要从事岩土工程设计和研究工作。E-mail: jinyabing25@sina.com。

Influences of temperature change on axial force and deformation of inner support in deep foundation pits

JIN Ya-bing, SHEN Xiang, LAO Li-yan

(Shenzhen Geology Bureau, Shenzhen 518023, China)

Abstract: The effects of temperature change on axial force and deformation of inner support in deep foundation pits are obvious, and the axial force and deformation increment of inner support caused by the temperature difference cannot be ignored when the support length and section size are large. Based on the premise of inner support-retaining pile-soil interaction and deformation coordination, a simplified method for temperature stress with one-layer support and multi-layer supports is proposed by using the elastic resistance method. Based on the case of deep foundation pit with multi-level supports, the integration platform is used to realize the real-time, continuous and online automatic monitoring of the effects of temperature change in the support system in deep foundation pits. The feasibility and reliability of the proposed simplified method for temperature stress of multi-level horizontal supports is verified by the monitoring results, and it is proved that the integration platform is the most effective monitoring method for the axial force and deformation of inner support in deep foundation pits.

Key words: deep foundation pit; inner support; temperature; axial force; deformation

0 引言

随着基坑开挖深度越来越大, 所处环境越来越复杂, 内支撑(简称支撑)作为主要支撑构件越来越普遍地被使用。但是, 由于支撑构件材料多样性, 空间布置多变性, 基坑开挖期和使用期的短暂性, 对支撑轴力和变形大小的影响研究, 侧重点主要是其构件在恒温条件下长度、断面尺寸、平面或竖向布置的合理性, 较少关注温度变化对支撑体系和环境的影响。近20 a来, 超大深基坑数量与日俱增, 基坑事故频发, 环境控制要求愈发苛刻, 温度变化对支撑轴力和变形的影响逐渐受到重视, 特别是当支撑断面尺寸和长度较大时, 温差引起的支撑轴力和变形增量不容忽视。

规范^[1]第4.9.6条指出“当温度改变引起的支撑结构内力不可忽略不计时, 应考虑温度应力”, 该条文说明中, 进一步指出“温度变化对钢支撑的影响程度与支撑的长度有较大关系, 根据经验, 对长度超过40 m的支撑, 认为可考虑10%~20%的支撑内力变化”。规范^[2-3]给出了混凝土和钢材的线膨胀系数, 并指出结构分析时, 宜根据温度变化进行间接作用效应分析, 并应采取相应的构造和施工措施。有基坑实例观测到

基金项目: 广东省深圳市地质局地质工程院士工作站专项经费资助项目(2013B090400025)

收稿日期: 2020-12-25

*通信作者(E-mail: 228168159@qq.com)

水平支撑系统因短时间的温度变化而引起的支撑轴力变化约占总支撑轴力的 20%~30%。文献[4]报道了基坑设计中因为对温度应力考虑不足是事故发生的主要原因之一。因此,对于深大基坑,仅按照常温设计,是存在风险的。

温差对支撑轴力和变形的影响研究也有 20 a 了。郑刚等^[5]采用改进的弹性抗力法提出了一道水平支撑的温度应力迭代计算方法。林跃忠等^[6]建立了均质土中支护桩在土压力和弹性抗力作用下的挠曲微分方程,然后根据施工和钢支撑设置工况分阶段求取各道支撑的温度应力和支点位移,且总结了正负温差条件下的钢支撑轴力变化和土体位移的特征。陆培毅等^[7]将温度场耦合到应力场中进行基坑支护温度效应数值分析,得出支撑应力随温度呈线性变化,案例分析和实测结果均显示温度增高 20℃ 时,支撑轴力增加约 15%。吴明等^[8-9]、艾智勇等^[10]、惠渊峰^[11]、Chapman 等^[12]基于内支撑-支护桩-土相互作用且变形协调的前提,采用弹性抗力法提出了多道水平支撑的温度应力迭代计算方法。陈锋等^[13]依据热力学原理,考虑钢支撑两端受围护结构约束而纵向长度不变条件,推导了变温引起支撑轴力的变化计算公式,定量地分析了温度变化对钢支撑轴力的影响。范君宇^[14]基于 Winkler 地基梁模型,考虑多层地基土、多道水平支撑及围护墙的相互作用,建立了多道水平支撑下温度内力的计算方法,分析了影响温度内力 3 个主要因素土层的刚度、围护桩的刚度和支撑的长度的影响。向艳^[15]通过对某深基坑地连墙混凝土内支撑结构的应力变形监测,详细分析了温度应力对内支撑杆件轴力、支护结构变形和墙后土体位移的影响规律,提出了温控措施建议。刘畅等^[16]基于 Winkler 地基梁模型,采用弹性抗力法,以温度变化引起的内支撑轴力和水平变形达到平衡状态为推导前提,提出了等效弹簧刚度概念,建立了等效弹簧刚度计算公式,避免了繁琐的迭代计算过程。冉岸绿等^[17]通过理论计算和工程实例监测数据分析,得到了钢支撑轴力受温度影响的规律。

综上所述,温度变化对支撑轴力和变形有明显影响已为工程实践所证实,但设计计算考虑的影响因素和理论计算方法存在分歧,要不要考虑以及如何考虑支护桩和腰梁(压顶梁)的抗力作用意见不一,因此,结合深基坑内支撑支护系统实时在线的自动化监测技术,深入开展温度变化对内支撑轴力和变形的影响是非常有理论意义和工程实用价值的。

1 单道支撑温度应力计算模型

1.1 单道支撑温度应力计算假定

内支撑(简称支撑)温度应力和变形的影响因素较多,如支撑杆件断面尺寸、长度、空间布置及弹性

模量、土体强度、变形模量,支护桩(墙)(以下均简称支护桩)和腰梁(压顶梁)(以下均简称腰梁)抗弯刚度、以及基坑深度和大气温度等。目前,支撑温度应力计算有基于弹性抗力法的解析法和考虑土体应力应变非线性的数值分析法。两种不同方法分析结果表明,温度变化引起支撑轴力变量和变形呈近似线性响应。因此,考虑到工程实用便捷性需要,对支撑、支护桩、腰梁以及支护桩后土体均按线弹性模型进行分析计算,桩后土体水平抗力系数 K_s 随深度呈线性变化。当温度升高时,支护结构整体呈现向坑外位移趋势;当温度降低时,支护结构整体呈现向坑内位移趋势。

1.2 单道支撑温度应力计算模型

对于图 1, 2 所示的单道支撑支护结构,假定温度升高引起支撑轴力增大和轴向伸长,如果将支护桩后土体、支护桩和腰梁假想成 3 根弹簧共同抵抗支撑的伸长,则存在并联弹簧分析模型和串联弹簧分析模型两种分析方法,下面对这两种分析模型均进行理论推导。根据并联弹簧模型原理,支护桩后土体水平位移 X_s 、支护桩桩身侧向位移 X_p 和腰梁侧向位移 X_b 与支撑支点对坑外位移 $\Delta_{左}$ ($\Delta_{右}$) 均应相等,如图 2 (b), 即

$$\Delta(\Delta_{左} \text{ 或 } \Delta_{右}) = X_s = X_p = X_b \quad (1)$$

式中 特殊情况外(如非对称荷载),一般可假定 $\Delta_{左} = \Delta_{右}$ 并统一用 Δ 表示; X_s , X_p , X_b 在支点处用 $X_s(1)$, $X_p(1)$ 和 $X_b(1)$ 表示。

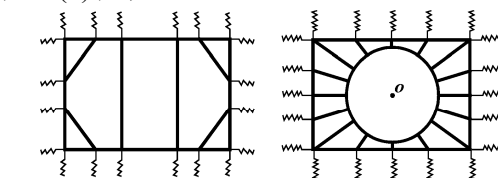


图 1 支撑结构体系弹性分析计算模型

Fig. 1 Model for elastic analysis and calculation of supporting structure system

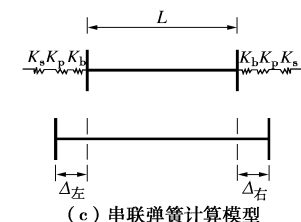
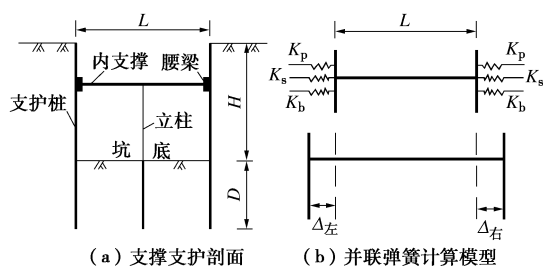


图 2 支撑弹性变形计算模型

Fig. 2 Model for elastic deformation of support

N_t , N_s , N_p 和 N_{tb} 分别为支撑温度升高引起的轴

力增量、支护桩后土体抗力合力、支护桩在支点处的抗力、腰梁在支点处的抗力, S 为支护桩后土体水平抗力作用宽度 (计算方法见规范^[1]), 则根据并联弹簧受力变形原理, 有

$$N_t = N_{ts} + N_{tp} + N_{tb} \quad (2)$$

其中,

$$N_{ts} = \int_0^H SK_s X_s dz \quad (3)$$

$$N_{tp} = K_p X_p \quad (4)$$

$$N_{tb} = K_b X_b \quad (5)$$

式中, K_s , K_p 和 K_b (通式 K_{bj}) 分别为支护桩后土体水平刚度系数、支护桩侧向水平刚度系数和腰梁任意支点 j 侧向水平刚度系数。求算假定: 桩后土体水平抗力系数 K_s 随深度呈线性变化; 腰梁为简支梁; 支护桩在坑底处固支。计算公式如下:

$$K_s = mz \quad (6)$$

$$K_p = \frac{3E_p I_p}{(H-Z)^3} \cdot \frac{S}{S_p} \quad (7)$$

$$K_{bj} = \frac{6E_l I_l L_{AB} S_j}{\sum_{i=1}^j a_i a_j (L_{AB}^2 - a_i^2 - a_j^2) S_i + \sum_{i=j+1}^n a_j (L_{AB} - a_i) (2L_{AB} a_i - a_i^2 - a_j^2) S_i} \quad (8)$$

式 (6) 中 K_s 为支护桩后任意深度处土体的水平抗力应力系数 (kN/m^3); 土体在支点处的水平刚度系数应为综合刚度系数 (kN/m); 计算公式见后续推导; m 为土体水平抗力比例系数。式 (7) 中 $E_p I_p$ 为支护桩抗弯刚度; S_p 为支护桩水平间距; S 为支撑水平间距; H 为基坑深度 (如图 3 所示); 当 S_p 大于土反力计算宽度 b_0 时取 b_0 , 当 S_p 小于 b_0 时取 S_p , b_0 计算参见规范^[1]; 当竖向支护结构为地连墙时, $E_p I_p$ 为单幅地连墙的抗弯刚度, S_p 取单幅地连墙宽度。式 (8) 中 K_{bj} 为平面布置的第 j 根支撑处腰梁的侧向水平刚度系数; $E_l I_l$ 为腰梁侧向抗弯刚度; L_{AB} 为腰梁长度; S_i , S_j 分别为第 i 根、第 j 根支撑受力计算间距; a_i , a_j 分别为第 i 根、第 j 根支撑距梁端距离, $i, j=1, 2, \dots, n$, n 为平面支撑根数, 如图 4 所示。

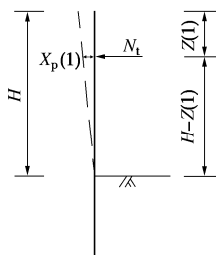


图 3 支护桩水平刚度系数计算模型

Fig. 3 Model for calculating horizontal stiffness coefficient of supporting pile

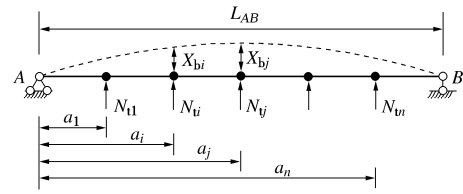


图 4 腰梁水平刚度系数计算模型

Fig. 4 Model for calculating horizontal stiffness coefficient of waist beam

如果忽略温度变化过程, 并考虑温度应力作用下支撑在支点处的变形协调, 则有如下变形协调方程:

$$N_t = \frac{EA}{L} [\alpha \Delta T L - (\Delta_{\text{左}} + \Delta_{\text{右}})] \quad (9)$$

假设 $\Delta_{\text{左}} = \Delta_{\text{右}} = \Delta$, 则 N_t 为

$$N_t = EA(\alpha \Delta T - 2\Delta/L) \quad (10)$$

式中 α 为支撑杆件材料线膨胀系数, 混凝土材料取 $1.0 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$, 钢材取 $1.2 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$; ΔT 为温度变化量; EA 为支撑杆件抗拉 (压) 强度; L 为支撑杆件长度。

为计算式 (10) 中的 Δ 值, 假设支护桩桩顶处土体水平位移为 $X_s(0)$, 坑底处土体水平位移为 0, 坑底以上土体水平位移呈线性变化, 如图 5 所示, 利用式 (3) 可以得到

$$N_{ts} = \int_0^H SK_s X_s dz = \int_0^H Sm X_s(0) \left(1 - \frac{Z}{H}\right) Z dz = mSH^2 X_s(0) / 6 \quad (11)$$

于是, 利用式 (11) 可求出

$$X_s(0) = 6N_{ts} / (mSH^2) \quad (12)$$

支护桩后土体任意深度和支撑支点处的水平位移 $X_s(Z)$ 和 $X_s(1)$ 分别为

$$X_s(Z) = X_s(0) \left(1 - \frac{Z}{H}\right) = \frac{6N_{ts}}{mSH^2} \left(1 - \frac{Z}{H}\right) \quad (13)$$

$$X_s(1) = \frac{6N_{ts}}{mSH^2} \left(1 - \frac{Z_1}{H}\right) \quad (14)$$

利用式 (14) 可得到土体在支点处的综合水平刚度系数 K_s 为

$$K_s = mSH^3 / [6(H - Z)] \quad (15)$$

利用式 (4), (5) 和 (7), (8), 可得到支撑在支点处支护桩和腰梁的水平位移 $X_p(1)$ 和 $X_b(1)$ 分别为

$$X_p(1) = \frac{N_{tp}}{K_p} = \frac{N_{tp} (H - Z_1)^3 S_p}{3E_p I_p S} \quad (16)$$

$$X_{bj}(1) = \frac{N_{tb}}{K_{bj}} \quad (17)$$

式中, K_{bj} 可由式 (8) 计算得到。于是, 对于并联弹簧模型图 2 (b), 支撑轴力因温度变化的增量 N_t 由式 (1), (2), (7), (8), (15) 和 (10) 可得到

$$N_t = \frac{\alpha \Delta T}{\frac{1}{EA} + \frac{2}{KL}}, \quad (18)$$

式中, $K=K_s+K_p+K_{bj}$, K_s , K_p , K_{bj} 分别由式 (15), (7) 和 (8) 计算得到。

对于串联弹簧模型图 2 (c), Δ 与 X_s , X_p , X_{bj} 之间的关系和 N_t 与 N_{ts} , N_{tp} , N_{tb} 之间的关系, 有

$$\Delta = X_s + X_p + X_{bj}, \quad (19)$$

$$N_t = N_{ts} = N_{tp} = N_{tb}. \quad (20)$$

将式 (14), (16), (17) 代入式 (19) 中, 计算出 Δ , 将 Δ 代入式 (10) 中, 并利用等式 (20), 则得到串联弹簧模型支撑轴力因温度升高的增量 N_t 为

$$N_t = \frac{\alpha \Delta T}{\frac{1}{EA} + \frac{2}{K_s L} + \frac{2}{K_p L} + \frac{2}{K_{bj} L}}. \quad (21)$$

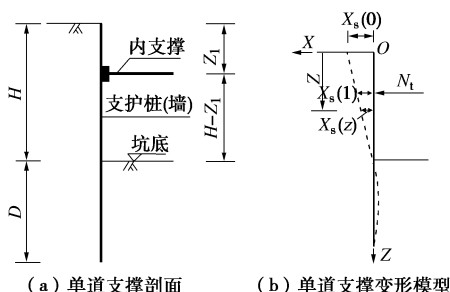


图5 单道支撑土体变形计算模型

Fig. 5 Model for soil deformation under one-layer support

算例 1: 假设某基坑平面长 60 m, 宽 40 m, 深 12 m; 沿基坑长边方向布置一道水平间距均为 7 m 的对撑 3 根和角撑 4 根, 对撑和角撑断面尺寸均为 0.8 m×0.8 m; 腰梁设置在地面下 2.0 m 处, 断面尺寸 0.8 m×0.6 m; 支护桩长 20 m, 桩径 1.0 m, 水平间距 1.6 m; 所有混凝土构件强度等均为 C25; 土体水平抗力比例系数 $m=5500 \text{ kN/m}^4$ 。以中间对撑为分析对象, 计算温度升高 10℃ 时支撑轴力增量。

根据上述条件, 计算可得到: $EA=1.79 \times 10^7 \text{ kN}$, $E_p I_p=1.17 \times 10^6 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$, $E_l I_l=4.03 \times 10^5 \text{ kN}$; $X_s(1)=9.02 \times 10^{-7} N_{ts}$, $X_p(1)=6.51 \times 10^{-5} N_{tp}$, $X_{b4}(1)=3.59 \times 10^{-2} N_{tb}$, $\alpha \Delta T=1.0 \times 10^{-4}$ 。该算例中, 土体在支点处综合水平刚度系数 $K_s=11 \times 10^5 \text{ kN/m}$, 支护桩在支点处水平刚度系数 $K_p=1.54 \times 10^4 \text{ kN/m}$, 腰梁在支点处水平刚度系数 $K_{b4}=27.83 \text{ kN/m}$, 于是, $K_s/K_p=72$, $K_s/K_{b4}=39839$ 。如视土体、支护桩、腰梁为 3 个并联弹簧, 由于 3 个刚度系数数值相差较大, 土体为主控因素, 按式 (18) 计算得到的支撑轴力增量 $N_t=997.21 \text{ kN}$ 。

如果按串联弹簧模型分析, 支撑轴力增量和变形同时受控于土体、支护桩和腰梁, 但按式 (21) 计算得到的支撑轴力增量仅为 0.06 kN 是不合理的。相反,

如不考虑腰梁影响, 则 $N_t=29.79 \text{ kN}$; 如既不考虑腰梁又不考虑支护桩的影响, 则 $N_t=991.11 \text{ kN}$, 与按并联弹簧模型计算得到的 $N_t=997.21 \text{ kN}$ 相近。算例 1 说明, 将土体、支护桩、腰梁 3 个抗力体视作 3 个并联弹簧模型进行分析更合理。

2 多道支撑温度应力计算模型

2.1 多道支撑温度应力计算假定

与单道支撑基本假定一致, 参照单道支撑算例结论, 分析多道支撑温度应力增量只考虑土体抗力和支护桩抗力, 并将土体和支护桩抗力按并联弹簧模型进行分析。如图 6 所示, 支护桩(墙)土体在各道支撑处的侧向位移用 $X_s(i)$ 表示, 支护桩桩身在各道支撑处的侧向位移用 $X_p(i)$ 表示。支护桩、支护桩后土体、支撑均按线弹性模型分析。对非均质土体, 水平抗力比

例系数 m 可以利用 $\int_0^H \bar{m} z dz = \sum_{i=1}^n \int_{H_{i-1}}^{H_i} m_i z dz$ 对 m_i 进行加权平均 (n 为坑底以上地层总数), 则平均值 \bar{m} 为

$$\bar{m} = \frac{m_1 H_1^2 + m_2 (H_2^2 - H_1^2) + \dots + m_n (H_n^2 - H_{n-1}^2)}{H^2}, \quad (22)$$

式中, H 为基坑深度, H_1, H_2, \dots, H_n 分别为第一层、第二层、…、第 n 层土底标高距地面的距离, 且 $H_n=H$ 。

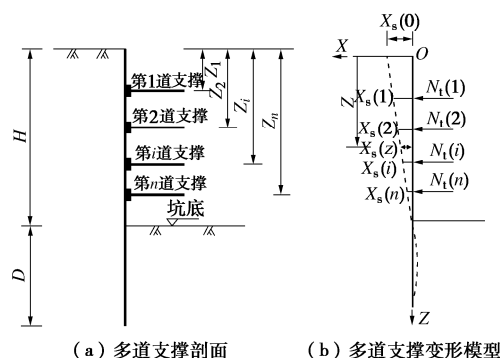


图6 多道支撑土体变形计算模型

Fig. 6 Model for soil deformation under multi-layer supports

为简化分析, 同单道支撑一样, 假定支护桩后土体水平位移呈线性变化, 地面处水平位移为 $X_s(0)$, 坑底处水平位移为 0, 中间任意深度水平位移 $X_s(Z)$ 采用线性内插法计算, 于是 $X_s(Z)$ 为

$$X_s(Z) = X_s(0) \left(1 - \frac{Z}{H} \right). \quad (23)$$

对第 i 道支撑支点处, 深度 Z 换成 Z_i , 则

$$X_s(i) = X_s(0) \left(1 - \frac{Z_i}{H} \right). \quad (24)$$

2.2 多道支撑温度应力计算模型

假设多道支撑温度应力增量 $N_t(i)$ 由相应的土体水平抗力 $N_{ts}(i)$ 来平衡, 并定义 $N_{ts}(i)$:

$$N_{ts}(1) = K_s(1) \cdot X_s(1) = \int_0^{\frac{Z_1+Z_2}{2}} S_1 \bar{m} Z X_s(Z) dZ$$

$$= S_1 \lambda_1 \bar{m} X_s(0) \quad , \quad (25)$$

$$N_{ts}(i) = K_s(i) \cdot X_s(i) = \int_{\frac{Z_{i-1}+Z_i}{2}}^{\frac{Z_i+Z_{i+1}}{2}} S_i \bar{m} Z X_s(Z) dZ$$

$$= S_i \lambda_i \bar{m} X_s(0) \quad , \quad (26)$$

$$N_{ts}(n) = K_s(n) \cdot X_s(n) = \int_{\frac{Z_{n-1}+Z_n}{2}}^H S_n \bar{m} Z X_s(Z) dZ$$

$$= S_n \lambda_n \bar{m} X_s(0) \quad . \quad (27)$$

式 (25) ~ (27) 中, $X_s(Z)$ 由式 (23) 代入, S_i 为第 i 道支撑水平间距, 定义 λ_1 , λ_i 和 λ_n :

$$\lambda_1 = \int_0^{\frac{Z_1+Z_2}{2}} (Z - Z^2/H) dZ \quad , \quad (28)$$

$$\lambda_i = \int_{\frac{Z_{i-1}+Z_i}{2}}^{\frac{Z_i+Z_{i+1}}{2}} (Z - Z^2/H) dZ \quad , \quad (29)$$

$$\lambda_n = \int_{\frac{Z_{n-1}+Z_n}{2}}^H (Z - Z^2/H) dZ \quad . \quad (30)$$

由式 (26), (28) ~ (30) 可以得到支护桩后土体在支撑支点处的综合水平刚度系数 $K_s(i)$ 为

$$K_s(i) = S_i \lambda_i \bar{m} H / (H - Z_i) \quad . \quad (31)$$

假定支护桩在各道支撑支点处的水平位移为 $X_p(i)$, 水平刚度系数为 $K_p(i)$, 水平抗力为 $N_{tp}(i)$ (或 $N_{tp}(j)$), $i, j=1, 2, \dots, n$, n 为竖向支撑道数, 则支护桩在各支点处的水平位移为

$$X_p(i) = \sum_{j=1}^n \frac{N_{tp}(j)}{K_p(i, j)} \quad , \quad (32)$$

式中, $K_p(i, j)$ 为第 j 道支撑支点单位作用力引起第 i 道支撑支点的水平位移, 计算公式如下:

$$K_p(i, j) = \begin{cases} \frac{6E_p I_p}{(H - Z_i)^2 (2H - 3Z_j + Z_i)} \cdot \frac{S_i}{S_p} & (j \leq i) \\ \frac{6E_p I_p}{(H - Z_j)^2 (2H - 3Z_i + Z_j)} \cdot \frac{S_i}{S_p} & (j > i) \end{cases} \quad . \quad (33)$$

式中 $E_p I_p$ 为支护桩抗弯刚度; S_p 为支护桩水平间距 (地连墙取单幅墙宽); S_i 为第 i 道支撑水平间距; 其余符号意义如前。

式 (32) 写成矩阵形式并经过变换后, 得到支护桩支点水平抗力 $N_{tp}(i)$ 与水平位移 $X_p(i)$ 矩阵之间的关系表达式为

$$[N_{tp}(i)] = [K'_p(i, j)] [X_p(i)] \quad , \quad (34)$$

式中, $[K'_p(i, j)]$ 为 $[1/K_p(i, j)]$ 的逆矩阵, 即

$$[K'_p(i, j)] = [1/K_p(i, j)]^{-1} \quad . \quad (35)$$

参照单道支撑温度应力增量计算公式, 则第 i 道支撑温度应力增量 $N_t(i)$ 为

$$N_t(i) = E_i A_i (\alpha_i \Delta T - 2\Delta_i / L_i) \quad . \quad (36)$$

式中 $E_i A_i$ 为第 i 道支撑抗压 (拉) 刚度; α_i 为第 i 道支撑杆件线膨胀系数; Δ_i 为第 i 道支撑支点处水平位移; L_i 为第 i 道支撑长度。如果令 $E_i A_i \alpha_i \Delta T = \xi(i)$, $2E_i A_i / L_i = \eta(i)$, 并将 $[\eta(i)]$ 拓展为 $[\eta(i, j)]$, 当 $i=j$ 时, $\eta(i, j) = \eta(i)$, 当 $i \neq j$ 时, $\eta(i, j) = 0$, 于是式 (36) 写成矩阵形式为

$$[N_t(i)] = [\xi(i)] - [\eta(i, j)] [\Delta_i] \quad . \quad (37)$$

利用并联弹簧模型特性, 即 $\Delta_i = X_s(i) = X_p(i)$ 和 $N_t(i) = N_{ts}(i) + N_{tp}(i)$, 并将 $[K_s(i)]$ 拓展成 $n \times n$ 阶矩阵 $[K_s(i, j)]$, 当 $i=j$ 时, $K_s(i, j) = K_s(i)$, 当 $i \neq j$ 时, $K_s(i, j) = 0$ 。于是, 得到支撑温度应力增量矩阵 $[N_t(i)]$ 和支点位移增量矩阵 $[\Delta_i]$ 的另一个关系式为

$$[N_t(i)] = [K_s(i, j) + K'_p(i, j)] [\Delta_i] \quad . \quad (38)$$

解式 (37) 和 (38), 则可得到支点位移增量矩阵 $[\Delta_i]$ 为

$$[\Delta_i] = [K_s(i, j) + K'_p(i, j) + \eta(i, j)]^{-1} [\xi(i)] \quad . \quad (39)$$

将式 (39) 代入式 (37) 中, 即可解出支撑温度应力增量矩阵 $[N_t(i)]$ 。

算例 2: 假设某基坑平面长 120 m, 宽 22 m, 深 20 m。沿基坑长边方向布置两道水平间距均为 6 m 的混凝土对撑 18 根和角撑 8 根, 对撑和角撑断面尺寸均为 1.0 m × 0.8 m; 沿基坑长边方向布置两道水平间距均为 3 m 的钢管支撑 36 根和角撑 2 根, 钢管为 $\phi 609$ mm 壁厚 16 mm 无缝钢管, 角撑同上; 设 4 道混凝土腰梁 (含一道压顶梁), 断面尺寸均为 1.0 m × 0.8 m; 4 道腰梁中心线分别位于地面以下 0.5, 6, 11, 16 m; 支护桩桩长 29 m, 桩径 1.2 m, 水平间距 1.6 m; 所有混凝土构件 (含桩) 混凝土强度等级均为 C25; 桩后土层 4 层根, 水平抗力比例系数加权平均值 \bar{m} 为 4500 kN/m⁴。以中间对撑为分析对象, 计算温度升高 1℃ 时 4 道支撑轴力增量及伸长量。

根据上述条件, 计算得到: $E_1 A_1 = E_2 A_2 = 2.24 \times 10^7$ kN, $\alpha_1 \Delta T = \alpha_2 \Delta T = 1.0 \times 10^{-5}$; $E_3 A_3 = E_4 A_4 = 6.14 \times 10^6$ kN, $\alpha_3 \Delta T = \alpha_4 \Delta T = 1.2 \times 10^{-5}$; $E_p I_p = 2.42 \times 10^6$ kN·m²; $H = 20$ m, $S_p = 1.6$ m, $S_1 = S_2 = 6$ m, $S_3 = S_4 = 3$ m, $Z_1 = 0.5$ m, $Z_2 = 6$ m, $Z_3 = 11$ m, $Z_4 = 16$ m; $K_s(1) = 1.3 \times 10^5$ kN/m, $K_s(2) = 8.17 \times 10^5$ kN/m, $K_s(3) = 7.27 \times 10^5$ kN/m, $K_s(4) = 11.17 \times 10^5$ kN/m;

$$[K_p(4, 4)] = \begin{bmatrix} 3675.53 & 6249.40 & 13594.53 & 62508.33 \\ 6249.40 & 9932.08 & 20391.79 & 89650.10 \\ 13594.53 & 20391.79 & 37384.95 & 148117.55 \\ 62508.33 & 89650.10 & 148117.55 & 425837.97 \end{bmatrix} \quad .$$

于是, 按照并联弹簧分析模型, 计算得到 4 道支撑轴力增量及变形增量为 $N_t(1) = 14.112$ kN, $\Delta_1 = 0.103$ mm; $N_t(2) = 67.526$ kN, $\Delta_2 = 0.077$ mm; $N_t(3) = 41.112$ kN, $\Delta_3 = 0.059$ mm; $N_t(4) = 56.844$ kN, $\Delta_4 = 0.030$ mm。

如果按串联弹簧模型且不考虑支护桩的抗力作用, 则 $N_t(1)=14.173 \text{ kN}$, $\Delta_1=0.103 \text{ mm}$; $N_t(2)=64.349 \text{ kN}$, $\Delta_2=0.078 \text{ mm}$; $N_t(3)=41.603 \text{ kN}$, $\Delta_3=0.057 \text{ mm}$; $N_t(4)=49.006 \text{ kN}$, $\Delta_4=0.044 \text{ mm}$ 。

算例 2 表明, 对多道支撑, 将土体和支护桩按并联模型与将土体和支护桩按串联模型且不考虑支护桩的抗力作用计算的结果是基本一致的。综合两个算例分析, 为简化分析, 对实际工程, 要么不计支护桩和腰梁的抗力作用, 要么把支护桩、腰梁和土体视作并联弹簧模型计算支撑温度应力增量和变形增量, 两种方法计算的结果相差较小。

3 工程实例

3.1 工程概况

深圳地铁 14 号线布吉站基坑为地下三层岛式换乘车站, 主体基坑围护结构均采用“咬合桩+内支撑”的支护形式。基坑平面长 239 m, 标准段基坑宽 22.3 m, 深 26.6 m。沿基坑长边方向布置四道支撑 (部分设置一道换撑), 标准段第一、二道混凝土对撑断面尺寸为 $0.8 \text{ m} \times 1.1 \text{ m}$, 第三、四道混凝土对撑断面尺寸为 $1.0 \text{ m} \times 1.2 \text{ m}$ 。设置四道混凝土腰梁 (含一道压顶梁), 标准段压顶梁截面尺寸为 $1.4 \text{ m} \times 1.1 \text{ m}$, 第二层混凝土腰梁截面尺寸为 $0.8 \text{ m} \times 1.1 \text{ m}$, 第三、第四层混凝土腰梁截面尺寸为 $1.2 \text{ m} \times 1.2 \text{ m}$; 四道腰梁中心线分别位于地面下 1, 7.8, 14.7, 20.5 m; 支护结构为咬合桩, 钢筋混凝土桩桩长 33.6 m, 桩径 1.4 m, 水平间距 1.7 m, 为简化计算不考虑素桩受力贡献。

各构件材料如下: 钻孔咬合混凝土桩为 C25 水下混凝土, 钢筋混凝土桩为 C35 水下混凝土, 压顶梁为 C35 混凝土, 各道混凝土支撑和腰梁均为 C30 混凝土; 桩后土层 4 层, 水平抗力比例系数加权平均值 \bar{m} 为 6660 kN/m^4 。以中间标准段 DC2 对撑为分析对象, 支护结构平面、剖面图详见图 7 (a), (b)。

3.2 计算结果

根据上述条件, 理论计算时假设温度升高 1.0°C 。计算得到: $E_1A_1=E_2A_2=2.64 \times 10^7 \text{ kN}$, $E_3A_3=E_4A_4=3.6 \times 10^7 \text{ kN}$; $\alpha_1\Delta T=\alpha_2\Delta T=\alpha_3\Delta T=\alpha_4\Delta T=1.0 \times 10^{-5}$; $E_pI_p=5.05 \times 10^6 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$; $H=26.6 \text{ m}$, $S_p=1.7 \text{ m}$, $S_1=S_2=S_3=S_4=6 \text{ m}$, $Z_1=1 \text{ m}$, $Z_2=7.8 \text{ m}$, $Z_3=14.7 \text{ m}$, $Z_4=20.5 \text{ m}$; $K_s(1)=3.58 \times 10^5 \text{ kN/m}$, $K_s(2)=20.8 \times 10^5 \text{ kN/m}$, $K_s(3)=36.7 \times 10^5 \text{ kN/m}$, $K_s(4)=54.7 \times 10^5 \text{ kN/m}$;

$$[K_p(4,4)] = \begin{bmatrix} 3186.51 & 5215.81 & 11633.93 & 40643.02 \\ 5215.81 & 8045.66 & 16967.24 & 57126.48 \\ 11633.93 & 16967.24 & 31724.46 & 97076.41 \\ 40643.02 & 57126.48 & 97076.41 & 235529.65 \end{bmatrix}。$$

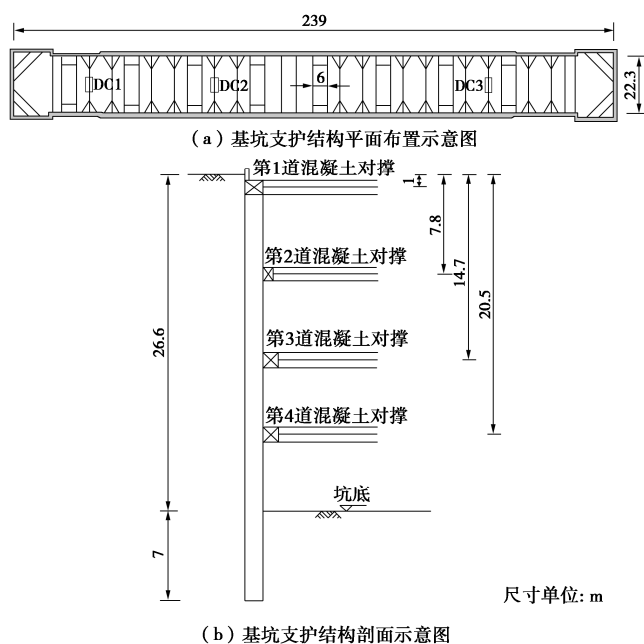


图 7 基坑支护结构平面和剖面图

Fig. 7 Structural plan and profile of support of foundation pit

按照并联弹簧分析模型, 计算得到四道支撑轴力增量及变形增量为 $N_t(1)=41.246 \text{ kN}$, $\Delta_1=0.094 \text{ mm}$; $N_t(2)=124.210 \text{ kN}$, $\Delta_2=0.059 \text{ mm}$; $N_t(3)=197.274 \text{ kN}$, $\Delta_3=0.050 \text{ mm}$; $N_t(4)=232.143 \text{ kN}$, $\Delta_4=0.040 \text{ mm}$ 。

3.3 监测结果

基坑施工期间, 对支护结构及周边环境实施了远程自动化监测, 选用振弦式钢筋应力计和振弦式轴力计, 分别对钢筋混凝土支撑和钢支撑进行支撑轴力监测。在支撑 DC1、DC2 及 DC3 位置布设 3 个轴力监测断面, 每个断面各布设 4 个轴力监测点, 采取针对温度变化对支撑轴力影响的专项自动化监测。因篇幅所限, 下面以监测断面 DC2 中的测点 DC2-4 为分析对象, 结合自主研发的“地质灾害与工程结构安全自动化监测预警平台”对监测数据进行分析。

DC2 监测断面坑内土方于 2020 年 5 月 25 日开挖到设计标高, 7 月 23 日完成底板浇筑施工。图 8 为 DC2-4 测点自 6 月 17 日至 7 月 20 日期间的支撑轴力随温度变化和坑内土方开挖实测曲线图。

由于 DC2 监测断面南侧约 6 m 开外坑内土方没有同步开挖, 直到 7 月 14 日整个基坑内土方才开挖完成, 使得 DC2-4 测点支撑轴力既随温度升高而递增, 还随南侧土方持续开挖而递增。在底板施工干扰较小时间段内, 截取测点 DC2-4 自 6 月 17 日至 6 月 23 日最高温度持续升高的 7 d 的实测数据与理论计算结果进行对比分析见表 1; 截取测点 DC2-4 自 7 月 14 日至 7 月 20 日最高温度变化较为平缓的 7 d 的实测数据与理论计算结果进行对比分析见表 2。

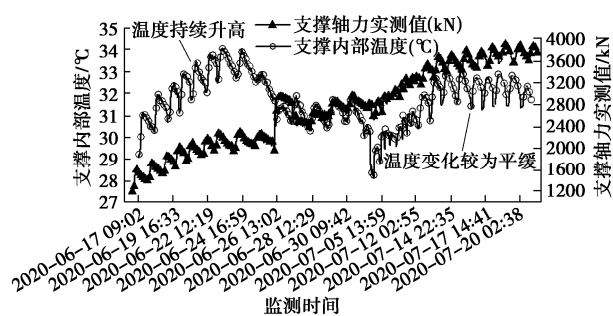


图 8 支撑轴力随温度变化和坑内土方开挖实测曲线图

Fig. 8 Variation of measured axial force with internal temperature and earth excavation of foundation pit of support

表 1 实测数据与理论计算结果对比表

Table 1 Comparison between measured data and calculated results

| 时间 | 实测轴力 最大值 N_{\max}/kN | 实测轴力 最小值 N_{\min}/kN | 支撑内 温差 $\Delta T/^{\circ}\text{C}$ | 单位温度支 撑轴力增量 $N_t/(\text{kN}\cdot^{\circ}\text{C}^{-1})$ |
|----------|-------------------------------------|-------------------------------------|--|---|
| 6 月 17 日 | 1600.29 | 1133.58 | 2.12 | 220.15 |
| 6 月 18 日 | 1731.89 | 1394.08 | 1.80 | 187.67 |
| 6 月 19 日 | 1866.71 | 1463.55 | 1.86 | 216.75 |
| 6 月 20 日 | 2042.26 | 1635.76 | 2.02 | 201.24 |
| 6 月 21 日 | 2125.76 | 1767.57 | 2.03 | 176.45 |
| 6 月 22 日 | 2189.91 | 1867.32 | 1.84 | 162.92 |
| 6 月 23 日 | 2293.05 | 1952.82 | 1.60 | 212.64 |
| 理论计算 | | | 1.00 | 232.14 |

表 2 实测数据与理论计算结果对比表

Table 2 Comparison between measured data and calculated results

| 时间 | 实测轴力 最大值 N_{\max}/kN | 实测轴力 最小值 N_{\min}/kN | 支撑内 温差 $\Delta T/^{\circ}\text{C}$ | 单位温度支 撑轴力增量 $N_t/(\text{kN}\cdot^{\circ}\text{C}^{-1})$ |
|----------|-------------------------------------|-------------------------------------|--|---|
| 7 月 14 日 | 3699.57 | 3383.70 | 1.51 | 209.19 |
| 7 月 15 日 | 3804.06 | 3435.85 | 1.65 | 223.16 |
| 7 月 16 日 | 3766.85 | 3449.24 | 1.66 | 191.33 |
| 7 月 17 日 | 3836.41 | 3490.91 | 1.65 | 209.39 |
| 7 月 18 日 | 3906.81 | 3546.86 | 1.67 | 215.54 |
| 7 月 19 日 | 3910.63 | 3563.41 | 1.51 | 229.95 |
| 7 月 20 日 | 3862.64 | 3585.43 | 1.06 | 261.52 |
| 理论计算 | | | 1.00 | 232.14 |

支撑 DC2-4 轴力实测值与支撑内部温度变化曲线见图 9 (a), (b), 支撑内部传感器测得的温度与大气温度数据统计见表 3 (数据来源于深圳市气象局布吉 G1166 测站的分钟温度数据)。支撑轴力和内部温度采集频率为 10 min 一次。实测结果和理论计算结果对比分析, 可得到以下结论:

(1) 在最高温度持续升高的 7 d 内, 支撑轴力随温度升高而增加, 且增幅明显, 最大温差引起的支撑轴力增量约占支撑轴力的 29.2%。实测单位温度下支撑轴力日增量平均值为 196.83 kN/°C (按 7 d 计), 按本文理论公式计算的结果为 232.14 kN/°C, 大于实测值 17.94%。按理论计算结果进行工程设计偏于安全。

(2) 在最高温度变化较为平缓的 7 d 内, 支撑轴

力随温度变化而变化, 变幅亦明显, 最大温差引起的支撑轴力增量约占支撑轴力的 9.6%。实测单位温度下支撑轴力日变化量平均值为 220.01 kN/°C (按 7 d 计), 理论公式计算的结果 232.14 kN/°C, 仅大于实测值 5.51%。按理论计算结果进行工程设计是合理的。

(3) 在最高温度持续升高的 7 d 内, 将支撑内部最低温度 29.01°C 和最小支撑轴力 1133.58 kN 作为基准值 (坐标 0 点), 其余 6 d 最高、最低温度和最大、最小支撑轴力与基准值进行比较分析, 得到支撑轴力增量与温度变化关系图 (图 10), 图中显示支撑轴力增量与温度变化量呈近似线性关系。

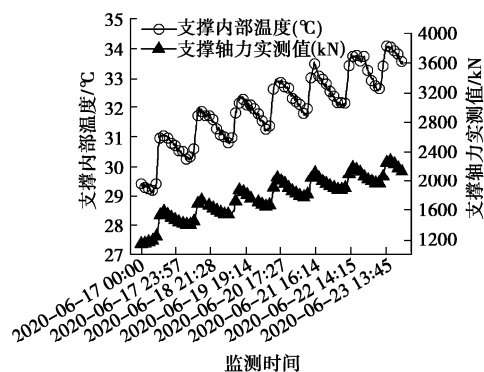
(4) 由于支撑断面尺寸较大, 材料热传导存在明显滞后效应, 因此, 支撑由表及里温度传递明显存在滞后特征, 传感器测得的支撑内部最高温度比大气最高气温滞后 0.25~2 h 不等, 传感器测得的支撑内部最低温度比大气最低气温滞后约 2.5~5 h 不等。而且, 传感器测得的温度与大气温度存在明显差异, 图 11 为支撑内部温度与大气温度对比图。图中当大气温度处于最高温时段时, 两者相差 0.2~1.95°C; 当大气温度处于最低温时段, 两者相差 2.11~3.68°C。

表 3 DC2-4 支撑内部温度与大气温度实测值

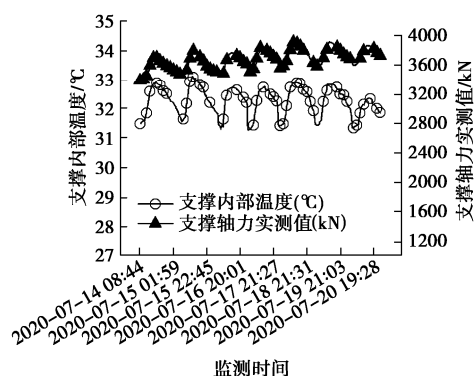
Table 3 Measured values of internal temperature of support DC2-4 and air temperature

| 时间 | 支撑内部最 低温度/°C | 测量 时间 | 支撑内部最 高温度/°C | 测量 时间 |
|----------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 6 月 17 日 | 29.01 (26.90) | 09:12 (05:30) | 31.13 (32.20) | 15:13 (14:16) |
| 6 月 18 日 | 30.21 (27.40) | 09:11 (03:45) | 32.01 (31.90) | 14:26 (13:24) |
| 6 月 19 日 | 30.61 (27.70) | 07:56 (05:30) | 32.47 (33.10) | 17:24 (16:43) |
| 6 月 20 日 | 31.12 (27.80) | 08:29 (06:09) | 33.14 (33.20) | 15:27 (15:06) |
| 6 月 21 日 | 31.51 (28.20) | 08:18 (03:35) | 33.54 (32.80) | 15:24 (14:14) |
| 6 月 22 日 | 31.87 (28.60) | 08:46 (06:04) | 33.85 (33.10) | 14:50 (14:05) |
| 6 月 23 日 | 32.48 (28.80) | 09:10 (05:22) | 34.08 (33.20) | 14:45 (13:19) |
| 7 月 14 日 | 31.44 (28.80) | 10:14 (06:33) | 32.95 (34.90) | 17:07 (13:32) |
| 7 月 15 日 | 31.49 (28.90) | 08:22 (05:01) | 33.14 (33.90) | 16:18 (12:58) |
| 7 月 16 日 | 31.17 (28.20) | 09:41 (05:17) | 32.83 (33.50) | 16:49 (15:19) |
| 7 月 17 日 | 31.15 (28.10) | 09:30 (03:06) | 32.80 (33.70) | 17:14 (15:11) |
| 7 月 18 日 | 31.35 (28.90) | 09:13 (05:46) | 33.02 (33.60) | 15:27 (13:32) |
| 7 月 19 日 | 31.40 (28.70) | 10:54 (03:22) | 32.91 (33.20) | 16:33 (14:58) |
| 7 月 20 日 | 31.30 (28.30) | 10:11 (04:01) | 32.36 (33.10) | 16:46 (13:55) |

注: 表中括号内数据为大气测站 G1166 实测大气温度值和测量时间。



(a) 最高温度持续增加时支撑轴力随温度变化曲线



(b) 最高温度变化平缓时支撑轴力随温度变化曲线

图9 支撑轴力随温度变化实测曲线图

Fig. 9 Variation of measured axial force with internal temperature of support

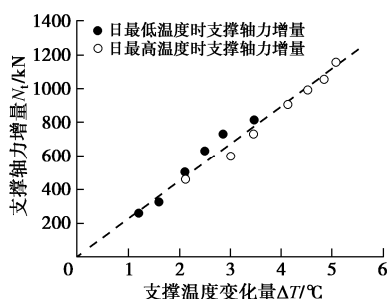
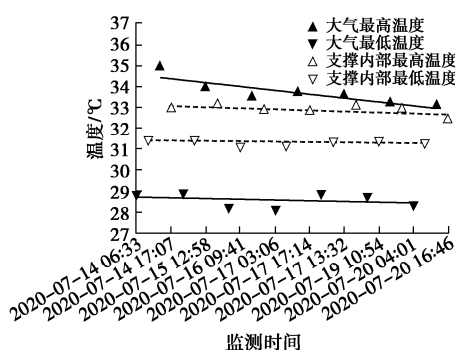
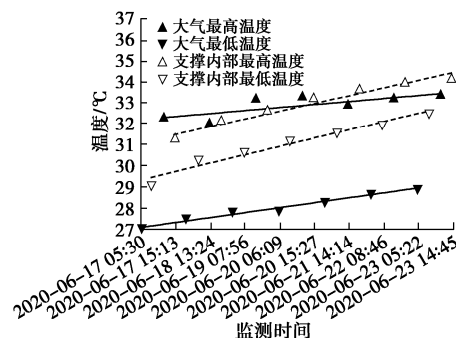


图10 支撑轴力增量与温度变化关系图

Fig. 10 Relationship between axial force increment of support and temperature change



(a) 最高温度持续增加时支撑内部温度与大气温度对比图



(b) 最高温度变化平缓时支撑内部温度与气温对比图

图11 支撑内部温度与大气温度对比图

Fig. 11 Comparison between internal temperature of support and air temperature

4 结 论

(1)理论计算和工程实测结果均揭示温度变化对基坑支撑轴力和变形的影响是客观存在且明显的,而且,温度变化引起的支撑轴力增量与温度变化呈近似线性响应。

(2)支撑因温度变化引起的轴力和变形增量受控于支护桩后土体抗力、支护桩抗力和腰梁抗力等因素。土体水平刚度系数、支护桩水平刚度系数和腰梁水平刚度系数的大小决定支撑轴力和变形增量的大小。

(3)算例和工程实例分析结果均表明,如将土体抗力、支护桩抗力和腰梁抗力用3个弹簧来替代,则这3个弹簧宜视为3个并联弹簧。通常情况下,土体水平刚度系数远大于支护桩水平刚度系数,远远大于腰梁的水平刚度系数,分析温度变化影响时,可以不计腰梁的作用。

(4)当支护桩后土体水平刚度系数较大时,分析温度变化影响可以不计支护桩的作用,只需考虑支护桩后土体抗力;当支护桩后土体水平刚度系数较小时,也就是支护桩后土体较为软弱时,分析温度变化影响宜考虑支护桩的抗力作用。

(5)由于支撑材料热传导存在滞后效应,支撑轴力出现最大、最小值时点滞后于大气最高、最低气温时点,不同地区应结合工程实际并采取实时、连续、在线的自动化监测技术进行工程安全监控和预警预报。

参考文献:

- [1] 建筑基坑支护技术规程: JGJ120—2012 [S]. 2012. (Technical Specification for Retaining and Protection of Building Foundation Excavations: JGJ 120—2012[S]. 2012. (in Chinese))
- [2] 混凝土结构设计规范: GB50010—2010[S]. 2010. (Code for Design of Concrete Structures: GB50010—2010[S]. 2010. (in Chinese))

- Chinese))
- [3] 钢结构设计规范: GB50017—2017[S]. 2017. (Code for Design of Steel Structures: GB50017—2012[S]. 2017. (in Chinese))
- [4] 张中普, 姚笑青. 某深基坑事故分析及技术处理[J]. 施工技术, 2005, **34**(12): 72 - 73. (ZHANG Zhong-pu, YAO Xiao-qing. Accident analysis and technology dispose of certain deep foundation pit[J]. Construction Technology, 2005, **34**(12): 72 - 73. (in Chinese))
- [5] 郑刚, 顾晓鲁. 考虑支撑-围护桩-土相互作用的基坑支护水平支撑温度应力的简化分析法[J]. 土木工程学报, 2002, **35**(3): 87 - 89, 108. (ZHENG Gang, GU Xiao-lu. Simple method for calculating temperature stress in horizontal strut of foundation pit considering strut-pile-soil interaction[J]. China Civil Engineering Journal, 2002, **35**(3): 87 - 89, 108. (in Chinese))
- [6] 林跃忠, 王铁成, 王来. 钢支撑温度应力对深基坑支护结构的影响研究[J]. 工业建筑, 2004(增刊): 1069 - 1074. (LIN Yue-zhong, WANG Tie-cheng, WANG Lai. Study on the influence of temperature stress of steel support on the supporting structure of deep foundation pit[J]. Industrial Building, 2004(S0): 1069 - 1074. (in Chinese))
- [7] 陆培毅, 韩丽君, 于勇. 基坑支护支撑温度应力的有限元分析[J]. 岩土力学, 2008, **29**(5): 1290 - 1294. (LU Pei-yi, HAN Li-jun, YU Yong. Finite element analysis of temperature stress in strut of foundation pit [J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, **29**(5): 1290 - 1294. (in Chinese))
- [8] 吴明, 孙鸣宇, 夏唐代. 等. 多层支撑深基坑中考虑支撑-围护桩-土相互作用的水平支撑温度应力简化计算方法[J]. 土木工程学报, 2009, **42**(1): 91 - 94. (WU Ming, SUN Ming-yu, XIA Tang-dai, et al. Simplified method of calculating temperature stress in multi-layer struts for deep excavations considering strut-pile-soil interactions [J]. China Civil Engineering Journal, 2009, **42**(1): 91 - 94. (in Chinese))
- [9] 吴明, 彭建兵, 邓亚虹. 等. 改进的深基坑多层支撑温度应力计算方法[J]. 现代隧道技术, 2013, **50**(1): 123 - 128. (WU Ming, PENG Jian-bing, DENG Ya-hong, et al. Modified method for calculating temperature stress in multi-layer struts of a deep foundation pit[J]. Modern Tunnelling Technology, 2013, **50**(1): 123 - 128. (in Chinese))
- [10] 艾智勇, 苏辉. 深基坑多层水平支撑温度应力的简化计算方法[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2011, **39**(2): 199 - 203. (AI Zhi-yong, SU Hui. A simplified method of calculating thermal Stress for multi-layered horizontal struts in deep excavations [J]. Journal of Tongji University(Natural Science), 2011, **39**(2): 199 - 203. (in Chinese))
- [11] 惠渊峰. 某地铁车站深基坑钢支撑温度应力计算与分析[J]. 建筑科学, 2012, **28**(9): 101 - 103, 111. (HUI Yuan-feng. The deep foundation pit steel brace temperature stresses analysis and calculation of subway station [J]. Building Science, 2012, **28**(9): 101 - 103, 111. (in Chinese))
- [12] CHAPMAN K R, CORDING E J, SCHNABEL H. Performance of a braced excavation in granular and cohesive soils[C]// ASCE Specially Conference on Performance of Earth and Earth-Supported Structures. Purdue University, 1972: 271 - 293.
- [13] 陈锋, 艾英铎. 基坑钢支撑温度应力的弹性热力学解答[J]. 科学技术与工程, 2013, **13**(1): 108 - 111. (CHEN Feng, AI Ying-bo. Calculation of temperature stress of steel support in foundation pit using thermodynamics of elasticity [J]. Science Technology and Engineering, 2013, **13**(1): 108 - 111. (in Chinese))
- [14] 范君宇. 深大基坑中水平支撑的温度内力与变形计算[J]. 山西建筑, 2014, **40**(18): 59 - 62. (FAN Jun-yu. In deep big hole excavated for building foundation level support temperature endogenic force and distortion computational method[J]. Shanxi Architecture, 2014, **40**(18): 59 - 62. (in Chinese))
- [15] 向艳. 温度应力对深基坑支护结构内力与变形的影响研究[J]. 岩土工程学报, 2014, **37**(增刊 2): 64 - 69. (XIANG Yan. Influence of temperature stress on internal force and deformation of retaining structures for deep excavations[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **37**(S2): 64 - 69. (in Chinese))
- [16] 刘畅, 张亚龙, 郑刚. 等. 改进的基坑支护水平支撑温度应力及水平位移的计算方法[J]. 岩土工程学报, 2015, **37**(增刊 1): 61 - 64. (LIU Chang, ZHANG Ya-long, ZHENG Gang, et al. Modified method for calculating temperature stress and displacement in horizontal strut of foundation pits[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, **37**(S1): 61 - 64. (in Chinese))
- [17] 冉岸绿, 孙旻, 王浩. 等. 温度变化对新型钢支撑轴力的影响分析 [C]// 第十届全国基坑工程研讨会学术论文集. 兰州: 兰州理工大学, 2018: 675 - 678. (RAN An-lu, SUN Min, WANG Hao, et al. Analysis of the influence of temperature change on the axial force of new steel support [C]// Academic Papers of the Tenth Nationwide Foundation Pit Engineering Seminar. Lanzhou: Lanzhou University of Technology, 2018: 675 - 678. (in Chinese))