

DOI: 10.11779/CJGE202108005

# 基于严格滑移线场理论临坡条形基础地基 极限承载力分析

李承超<sup>1, 2</sup>, 关云飞<sup>\*</sup>, 蔡正银<sup>1</sup>, 姜明明<sup>2</sup>, 韩 迅<sup>1</sup>

(1. 南京水利科学研究院岩土工程研究所, 江苏 南京 210024; 2. 苏州科技大学土木工程学院, 江苏 苏州 215009)

**摘 要:** 临坡地基极限承载力的计算是岩土工程中的常见问题, 欲求得其精确解, 必须同时满足静力平衡条件和机动许可条件。基于严格滑移线场理论, 利用特征线方程和三类基本边值问题构造同时满足应力边界条件和速度边界条件的滑移线场, 并提出临坡地基 5 种单侧破坏模式, 最终求得相应的地基极限承载力。利用上述方法, 分析了土体剪切强度、边坡几何形状以及基础与坡肩相对位置对临坡地基极限承载力和破坏机理的影响。研究结果表明: 计算结果与已有模型试验结果较为吻合。同时, 临坡地基极限承载力随土体剪切强度的增大而增大, 但随边坡高度和坡角的增大而减小。当边坡高度达到临界高度时, 地基极限承载力不再随之发生变化。此外, 极限承载力随基础与坡肩相对距离的增大而增大, 并最终达到稳定。当基础放置位置达到临界值时, 边坡稳定性对极限承载力不再产生影响, 此时临坡地基整体结构服从 Prandtl 地基承载力破坏。随着基础与坡肩相对距离的增加, 临坡地基的破坏模式由坡面承载力破坏, 逐渐过渡到坡面滑动破坏或深部滑动破坏, 并最终达到 Prandtl 地基承载力破坏, 在此过程中临界滑动范围不断增大直至服从平地地基破坏模式, 从而导致了极限承载力先增大后保持不变的过程。

**关键词:** 临坡地基; 极限承载力; 滑移线场理论; 边值问题

中图分类号: TU476

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2021)08-1408-09

**作者简介:** 李承超(1993—), 男, 博士, 从事岩土极限分析方面的研究工作。E-mail: justlcc2015@163.com。

## Ultimate bearing capacity of strip footings placed near slopes determined by rigorous slip line field theory

LI Cheng-chao<sup>1, 2</sup>, GUAN Yun-fei<sup>1</sup>, CAI Zheng-yin<sup>1</sup>, JIANG Peng-ming<sup>2</sup>, HAN Xun<sup>1</sup>

(1. Department of Geotechnical Engineering, Nanjing Hydraulic Research Institute, Nanjing 210024, China; 2. Department of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215009, China)

**Abstract:** Calculating the ultimate bearing capacity of strip footings placed near slopes has long been a critical component in geotechnical design. In order to obtain the accurate solution of this issue, the statically and kinematically admissible conditions should be satisfied beforehand. Based on the rigorous slip line field theory, the equations for characteristic line and the three kinds of basic boundary value problems are solved together to establish the slip line field of the footing-on-slope system that satisfies the stress and velocity boundaries simultaneously. Then, five types of unilateral failure modes are proposed to determine the corresponding ultimate bearing capacity. The effects of soil shear strength, slope geometry and setback distance from footing edge to slope on the ultimate bearing capacity and the failure mechanism are evaluated in this study. The results indicate that the proposed solutions show good agreement with the experimental results found in the literature. The parametric analysis presents that the ultimate bearing capacity increases with the shear strength, and decreases with an increase in the slope height and the slope angle. When the slope height reaches the critical value, the ultimate bearing capacity is no longer affected by the slope height. Meanwhile, the ultimate bearing capacity increases with the relative distance from footing edge to slope shoulder, and it finally remains unchanged. When the placement position of the footing reaches the critical value, the ultimate bearing capacity is no longer affected by the slope stability. At this point, the failure mechanism obeys the Prandtl's bearing capacity failure. The failure mechanism gradually transits from the face bearing capacity failure to the face sliding failure or the deep sliding failure and finally follows the Prandtl's bearing capacity failure with an increase in the relative distance. In this process, the critical sliding range gradually increases until the footing-on-slope system obeys the Prandtl's failure mode, which results in the corresponding variation in the ultimate

基金项目: 国家自然科学基金项目(51879167, 51979128); 南京水利  
科学研究院基金项目(Y321008, Y319012)

收稿日期: 2020-08-09

\*通信作者 (Email: yfguan@nhri.cn)

bearing capacity.

**Key words:** strip footing near slope; ultimate bearing capacity; slip line field theory; boundary value problem

## 0 引言

临坡地基极限承载力的确定是岩土工程领域中不可避免的问题。由于地形条件的限制或工程需求,经常将基础设置在临近斜坡顶部、坡面上或者在计划开挖的基坑顶面附近。斜坡的存在会使地基极限承载力大幅度减小<sup>[1-2]</sup>,从而引发工程安全问题。

基于 Terzaghi 地基极限承载力经典理论公式<sup>[3]</sup>, Meyerhof<sup>[4]</sup>首先提出了考虑边坡坡角影响的临坡地基极限承载力计算方法。自此,临坡地基极限承载力问题得到了广泛研究。马庆宏等<sup>[5]</sup>、Turker 等<sup>[6]</sup>以及 Huang<sup>[7]</sup>开展模型试验,对砂土边坡上地基土的土压力分布、变形机制、破坏模式进行研究,并分析了不同基础形状、埋深以及上部倾斜和偏心荷载对临坡地基破坏机理的影响。在理论研究方面,胡卫东等分别采用极限平衡法<sup>[8]</sup>、滑移线法<sup>[9]</sup>以及极限分析上限法<sup>[10]</sup>对临坡地基极限承载力进行求解,并提出了单侧破坏和非对称双侧破坏两种模式,以便更好地模拟实际工况。蒋洋等<sup>[11]</sup>利用滑移线法,给出了无重土临坡地基极限承载力解析解。同时,采用有限差分方法构建有重土临坡地基应力滑移线场,探讨滑移线法计算结果与极限平衡法以及有限元法所得结果之间的差异。Yang 等<sup>[12]</sup>利用极限分析上限法对地震作用下的临坡地基极限承载力以及破坏机理的变化规律进行探讨,并合理评估了地震加速度系数对临坡地基稳定性的影响。而 Leshchinsky<sup>[13]</sup>、郑刚等<sup>[14]</sup>利用不连续布局优化极限分析法分析了  $c-\varphi$  型土边坡上地基极限承载力随土体剪切强度以及边坡几何形状的变化规律。

近年来,随着有限单元法与极限分析法相结合的兴起,不少学者利用有限元极限分析法无需事先假定临界滑动面的优势,对临坡地基极限承载力进行探讨。赵明华等<sup>[15]</sup>利用有限元极限分析上限法提出了临坡地基的三种主要破坏模式。Li 等<sup>[16]</sup>以及 Zhang 等<sup>[17]</sup>利用有限元极限分析法得到了临坡地基极限承载力的上、下限解,并认为在误差许可范围内,可以将上、下限解的均值看作是极限承载力的严密解答。

以上研究都在尽可能地寻找临坡地基极限承载力的精确解,但大多数方法都很难同时满足临坡地基整体结构的应力边界条件和速度边界条件,所求解只是真实解的上限或者下限。当上、下限数值解在很小误差范围内时,可以通过两者的均值来代替真实的极限荷载。这虽然是不错的近似方法,但在理论上没有足够的依据。沈珠江<sup>[18]</sup>从上、下限定理中得到一个推论:对于一个物体,如果能够找到一个静定的应力场  $\sigma_{ij}^0$ ,

根据此应力场按照相关联流动法则求出的应变率场  $\dot{\epsilon}_{ij}^*$  和速度场  $v_i$  如果正好又是一个容许的机动场,则与该静定的应力场和机动的速度场所对应的极限荷载必为该物体真实的破坏荷载。基于上述推论, Li 等<sup>[19]</sup>利用滑移线法构建了边坡内同时满足应力边界条件和速度边界条件的滑移线场,从而给出了边坡稳定性严密解。但是,其只讨论了边坡坡趾破坏下的边界条件,对于临坡地基复杂破坏模式下的边界条件,上述方法不能完全适用。

综上所述,目前对于临坡地基极限承载力的计算方法仍需进一步研究,以寻求其精确解。因此本文提出严格滑移线场理论,利用特征线方程和三类基本边值问题来构建同时满足应力边界条件和速度边界条件的滑移线场。基于临坡地基 5 种单侧破坏模式,求得地基极限承载力的精确解。并将计算结果与已有文献结果进行对比,验证所提理论计算方法的合理性。最后分析土体剪切强度、边坡几何形状以及基础与坡肩相对距离对临坡地基极限承载力和破坏机理的影响。

## 1 严格滑移线场理论

### 1.1 控制方程

临坡地基极限承载力的求解可以简化为平面应变问题,并满足以下假设条件:①土体为理想的刚塑性材料,并服从 Mohr-Coulomb 破坏准则和相关联流动法则;②条形基础为无重量刚体,与土体不发生任何相对位移;③基础与土体接触面完全粗糙,接触面摩擦角  $\delta$  等于土体内摩擦角  $\varphi$ <sup>[20]</sup>。在平面应变条件下,极限平衡问题的基本方程为

(1) 平衡微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} &= \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中,  $\sigma_x$  和  $\sigma_z$  分别为  $x$  和  $z$  方向的正应力,  $\tau_{xz}$  为  $xz$  平面内的剪应力,  $\gamma$  为土体重度。

(2) 如图 1 所示, Mohr-Coulomb 破坏准则为

$$f = \tau_m - \sigma_e \sin \varphi = \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}}{2} - \left( \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + c \cot \varphi \right) \sin \varphi, \quad (2)$$

式中,  $f$  为土体强度破坏准则,  $\tau_m$  为应力莫尔圆上最大剪应力,  $\sigma_e$  为等效应力,  $c$  为土体黏聚力。

(3) 几何方程

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad \dot{\omega}_{xz} = \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \quad (3)$$

式中  $\dot{\varepsilon}_x$  和  $\dot{\varepsilon}_z$  分别为  $x$  和  $z$  方向的线应变率,  $\dot{\omega}_{xz}$  为  $xz$  平面内的剪应变率,  $v_x$  和  $v_z$  分别为  $x$  和  $z$  方向的速度矢量。

(4) 流动法则

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \dot{\omega}_m, \quad \dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} \dot{\omega}_m, \quad \dot{\omega}_{xz} = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \dot{\omega}_m, \quad (4)$$

式中,  $\dot{\omega}_m$  为最大剪应变率,  $\dot{\omega}_m = \sqrt{(\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_z)^2 + \dot{\omega}_{xz}^2}$ 。

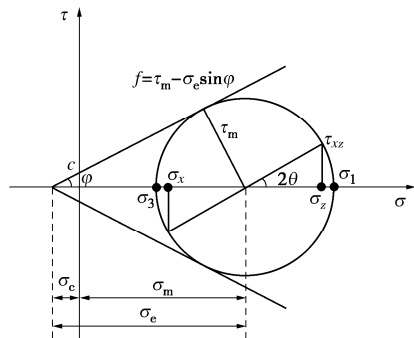


图1 应力莫尔圆

Fig. 1 Stress Mohr circle

## 1.2 应力特征线方程

由式(2)和(4)可以得到土体达到极限平衡状态时的能量耗散条件:

$$\sigma_x \dot{\varepsilon}_x + \sigma_z \dot{\varepsilon}_z + \tau_{xz} \dot{\omega}_{xz} = c \cos \phi \dot{\omega}_m. \quad (5)$$

在式(1)和(2)中存在3个未知应力分量  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  和  $\tau_{xz}$ , 可以采用新的变量  $\sigma_e$  和  $\theta$  来代替:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_e (1 + \sin \phi \cos 2\theta) - \sigma_c, \\ \sigma_z &= \sigma_e (1 - \sin \phi \cos 2\theta) - \sigma_c, \\ \tau_{xz} &= \sigma_e \sin \phi \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中,  $\theta$  为大主应力方向角,  $\sigma_c = c \cot \phi$ 。

把式(6)代入式(1)简化后可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \tan(\theta + \mu) \frac{\partial \xi}{\partial z} &= a, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} + \tan(\theta - \mu) \frac{\partial \eta}{\partial z} &= b. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} \cot \phi \ln \frac{\sigma_e}{c} + \theta, \\ \eta &= \frac{1}{2} \cot \phi \ln \frac{\sigma_e}{c} - \theta, \\ a &= \pm \frac{\gamma \cos(\theta \pm \mu)}{2 \sigma_e \sin \phi \cos(\theta \mp \mu)}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式(7)为双曲线型偏微分方程组, 具有两组相交的特征线, 可用特征线法求解, 因此, 其特征线方程为

$$\left. \begin{aligned} S_1: \frac{dz}{dx} &= \tan(\theta + \mu), \quad \frac{d\xi}{dx} = a, \\ S_2: \frac{dz}{dx} &= \tan(\theta - \mu), \quad \frac{d\eta}{dx} = b. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中,  $\mu$  为特征线作用方向与大主应力方向的夹角,

$\mu = \pi/4 - \phi/2$ 。特征线方向与滑动方向重合, 因此在物理意义上, 特征线即为滑移线。

## 1.3 速度特征线方程

由式(2)求偏导可以得到  $\partial f / \partial \sigma_x$ ,  $\partial f / \partial \sigma_z$  和  $\partial f / \partial \tau_{xz}$ , 并将其代入式(3), (4)中, 可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \frac{\dot{\omega}_m}{2 \sigma_e \sin \phi} \left( -\sigma_e \sin^2 \phi + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \frac{\dot{\omega}_m}{2 \sigma_e \sin \phi} \left( -\sigma_e \sin^2 \phi + \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \right), \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} &= \frac{\dot{\omega}_m}{2 \sigma_e \sin \phi} 2 \tau_{xz}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

在式(10)中消去  $\dot{\omega}_m$ , 并以沿滑移线切线方向的分速度  $v_1$  和  $v_2$  作为新的速度矢量代替  $v_x$  和  $v_z$ , 4个速度矢量间的关系如图2所示。

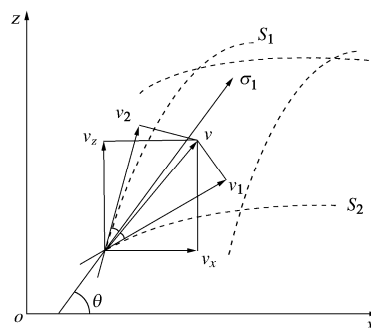


图2 速度矢量关系图

Fig. 2 Relationship among four velocity vectors

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= v_x \cos(\theta - \mu) + v_z \sin(\theta - \mu), \\ v_2 &= v_x \cos(\theta + \mu) + v_z \sin(\theta + \mu). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

因此, 式(10)可以简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \tan(\theta + \mu) \frac{\partial v_2}{\partial z} - v_2 \left[ \frac{\partial \theta}{\partial x} + \tan(\theta + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \tan \phi + \\ v_1 \left[ \frac{\partial \theta}{\partial x} + \tan(\theta + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \sec \phi = 0, \\ \frac{\partial v_1}{\partial x} + \tan(\theta - \mu) \frac{\partial v_1}{\partial z} - v_1 \left[ \frac{\partial \theta}{\partial x} + \tan(\theta - \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \tan \phi + \\ v_2 \left[ \frac{\partial \theta}{\partial x} + \tan(\theta - \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \sec \phi = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

方程式(12a), (12b)也是双曲线型偏微分方程, 因此其特征线方程为

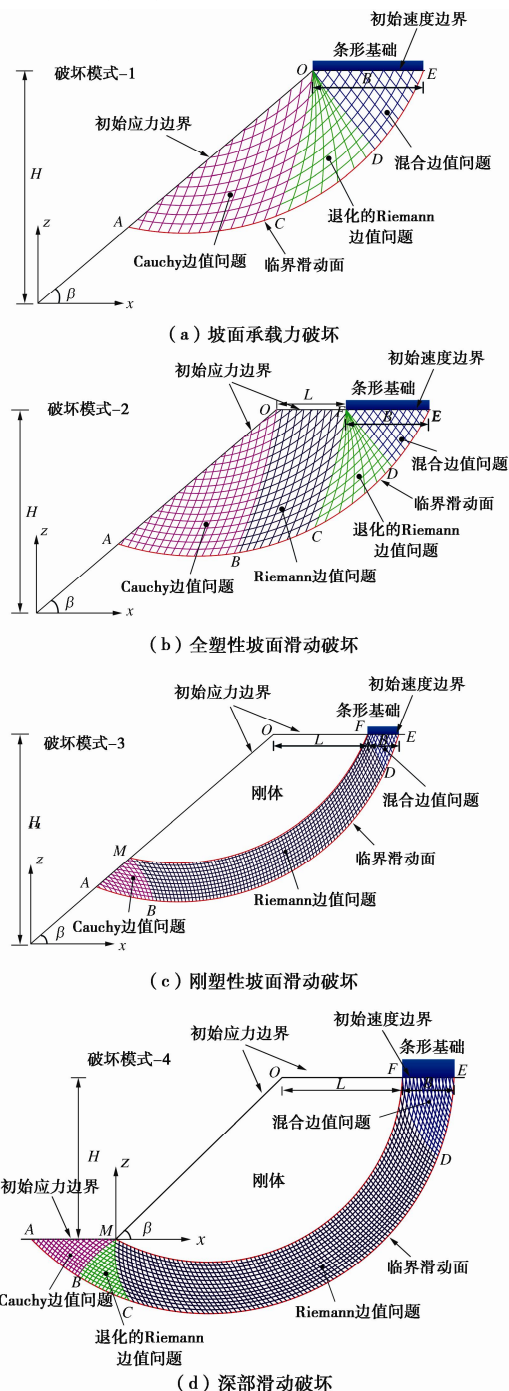
$$\left. \begin{aligned} S_1: \frac{dz}{dx} &= \tan(\theta + \mu), \quad \frac{dv_2}{d\theta} = v_2 \tan \phi - v_1 \sec \phi, \\ S_2: \frac{dz}{dx} &= \tan(\theta - \mu), \quad \frac{dv_1}{d\theta} = -v_1 \tan \phi + v_2 \sec \phi. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

## 2 破坏机理

### 2.1 分析模型

临坡地基的破坏形式是边坡整体滑动破坏和地基承载力破坏相互作用的结果。对于土质边坡而言, 整

体滑动破坏主要包括坡面滑动破坏、坡趾滑动破坏以及深部滑动破坏 3 种形式。而平地地基一般服从 Prandtl 地基承载力破坏模式。如图 3 所示, 本文根据赵明华等<sup>[15]</sup>提出的 3 种破坏模式以及 Meyerhof<sup>[4]</sup>提出的单侧破坏模式, 并结合滑移线场的构造提出临坡地基竖向均布加载下的五种单侧破坏模式。以基础与坡肩相对距离为依据来划分破坏模式, 主要包括: ①坡面承载力破坏; ②全塑性坡面滑动破坏; ③刚塑性坡面滑动破坏; ④深部滑动破坏; ⑤Prandtl 地基承载力破坏。其中, 将坡趾破坏看作是坡面破坏的特例, 即滑动区高度达到边坡高度。分析模型由刚性区和塑性区共同组成, 刚性区内土体保持刚性平衡, 塑性区内土体达到屈服状态并产生塑性流动。



(e) Prandtl地基承载力破坏

图 3 临坡地基 5 种侧破坏模式

Fig. 3 Five unilateral failure modes of strip footings near slopes

欲求得模型中刚塑性区的分布, 需首先对三类基本边值问题 (Cauchy 边值问题、Riemann 边值问题和混合边值问题) 进行求解, 从而得到塑性区分布范围以及刚塑性区分界线。如图 3 所示, 由三类边值问题包裹的区域为塑性区, 其余部位即为刚性区。从初始应力边界出发, 依次求解三类边值问题, 构造应力滑移线场。然后根据应力滑移线场中大主应力方向角以及各网格点坐标, 求解速度特征线方程, 从而确定速度滑移线场, 最终检验所得的滑移线场是否满足所有应力边界条件和速度边界条件。

## 2.2 三类基本边值问题

### (1) Cauchy 边值问题

在求解三类边值问题之前, 先要确定初始应力边界条件。建立如图 3 所示的坐标系, 当临坡地基整体结构无外荷载作用时, 初始应力边界上各点等效应力  $\sigma_c$  为 0, 最大主应力方向角  $\theta$  垂直于边界面。而 Cauchy 边值问题的特征为: 边界线不是特征线, 边界上各点坐标以及应力状态  $\sigma_c$  和  $\theta$  已知。因此对于初始应力边界适合采用 Cauchy 边值问题进行求解。

如图 4 所示,  $OA$  上各点坐标  $(x, z)$  以及  $\sigma_c$ 、 $\theta$  已知。现通过边界上点#10 和#21 来求解内部点#11, 以此来介绍 Cauchy 边值问题的求解过程。首先将应力特征线方程式 (9) 改写成以下差分形式:

$$\left. \begin{aligned} & \text{沿 } S_1 \text{ 滑移线,} \\ & (\sigma_{e11} - \sigma_{e10}) - (\sigma_{e11} + \sigma_{e10} + 2\sigma_c) \tan[\varphi(\theta_{11} - \theta_{10})] \\ & = -\gamma \sin \left[ \frac{\theta_{11} + \theta_{10}}{2} + \mu \right] \frac{(z_{11} - z_{10})}{\cos \varphi} \cos \left[ \frac{\theta_{11} + \theta_{10}}{2} - \mu \right], \\ & (z_{11} - z_{10}) = (x_{11} - x_{10}) \cot[(\theta_{11} + \theta_{10})/2 - \mu]。 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{沿 } S_2 \text{ 滑移线,} \\ & (\sigma_{e11} - \sigma_{e21}) - (\sigma_{e11} + \sigma_{e21} + 2\sigma_c) \tan[\varphi(\theta_{11} - \theta_{21})] \\ & = -\gamma \sin \left[ \frac{\theta_{11} + \theta_{21}}{2} - \mu \right] \frac{(z_{11} - z_{21})}{\cos \varphi} \cos \left[ \frac{\theta_{11} + \theta_{21}}{2} + \mu \right], \\ & (z_{11} - z_{21}) = (x_{11} - x_{21}) \cot[(\theta_{11} + \theta_{21})/2 + \mu]。 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式 (14), (15) 均为非线性方程, 无法直接求得边坡内点#11 的坐标和应力状态, 只能通过迭代法进行求解。在迭代时, 先假设点#11 的初始值分别为

$$x_{11} = (x_{10} + x_{21})/2 \quad z_{11} = (z_{10} + z_{21})/2, \quad (16a)$$

$$\theta_{11} = (\theta_{10} + \theta_{21})/2, \quad \sigma_{e11} = (\sigma_{e10} + \sigma_{e21})/2. \quad (16b)$$

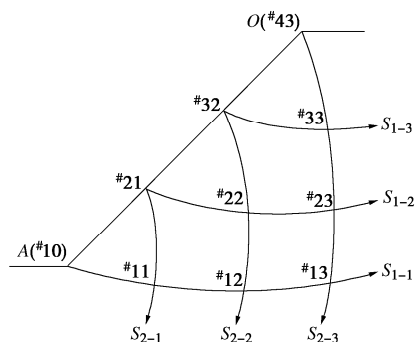


图4 Cauchy 边值问题

Fig. 4 Cauchy boundary value problem

将式(16a)中的初始值  $x_{11}$ ,  $z_{11}$  代入式(14)中, 可以求得  $\theta_{11}$  和  $\sigma_{e11}$  第一次近似值, 将式(16b)中的初始值  $\theta_{11}$  和  $\sigma_{e11}$  代入式(15)中得到  $x_{11}$ ,  $z_{11}$  第一次近似值, 再将  $\theta_{11}$  和  $\sigma_{e11}$  的第一次近似值代入式(15)中, 得到  $x_{11}$ ,  $z_{11}$  第二次近似值。如此反复计算, 直到满足计算精度为止。利用上述计算方法, 便可以求得应力边界处所有计算点的坐标和应力状态。

## (2) Riemann 边值问题

Riemann 边值问题的特征为: 边界线为两条相交的特征线, 每一条特征线上各点坐标和应力状态已知。当求解完 Cauchy 边值问题后, 便可以得到 Riemann 边值问题中两条已知的应力特征线。如图5所示,  $OA$  和  $OB$  为通过 Cauchy 边值问题求得的两条已知滑移线。根据滑移线  $OA$  和  $OB$  上的计算值, 利用与 Cauchy 边值问题同样的求解方法便可以求得 Riemann 边值问题内各点坐标和应力状态。

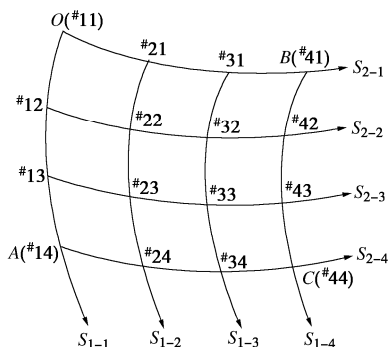


图5 Riemann 边值问题

Fig. 5 Riemann boundary value problem

如图6所示, 对于 Riemann 边值问题, 常常会发生一簇滑移线(如  $S_{2-0}$ )退化成一点的情况, 此类问题称为退化的 Riemann 边值问题。此时  $O$  点为奇点, 其上  $\sigma_e$  值不确定。但  $O$  点的张角  $\zeta = \pi/4 + \varphi/2$  和滑移线  $OA$  上  $x$ ,  $z$ ,  $\theta$ ,  $\sigma_e$  各参数已知, 仍然可以利

用迭代法求解相应边界内的滑移线场, 具体求解过程如下:

首先, 利用点#10 和#11 来求解点#21 上各个未知量。其中点#21 的方向角  $\theta_{21}$  为

$$\theta_{21} = \theta_{11} + \theta_{20} - \theta_{10}, \quad (17)$$

式中,  $\theta_{10}$  和  $\theta_{20}$  分别为滑移线  $S_{1-1}$  和  $S_{1-2}$  在  $O$  点处对应的  $\theta$  角。图6中过  $O$  点的  $S_1$  滑移线簇将其张角分成  $1/(n-1)$  份, 则

$$\theta_{20} - \theta_{10} = \zeta/(n-1). \quad (18)$$

此外, 点#21 的  $x$  坐标可以按式(16a)进行迭代计算。由于点#11 和#21 在同一条  $S_{2-1}$  滑移线上, 且已知点#11 上  $x$ ,  $z$ ,  $\theta$ ,  $\sigma_e$  和点#21 上  $\theta_{21}$ ,  $x_{21}$  的值, 便可以利用式(15)计算点#21 上  $\sigma_{e21}$  和  $z_{21}$  的第一次近似值, 然后反复迭代计算直到满足精度要求为止。以此类推, 利用上述方法可以确定点#31 和#41 的值。然后再利用 Riemann 边值问题的求解方法得到剩余各点的值。

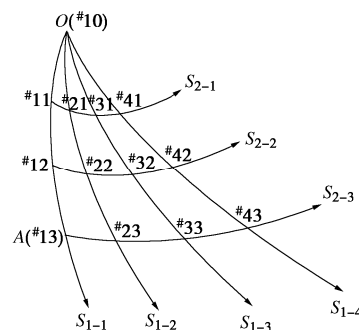


图6 退化的 Riemann 边值问题

Fig. 6 Degenerated Riemann boundary value problem

## (3) 混合边值问题

混合边值问题的特征为: 边界线由一条特征线和一条非特征线组成。特征线上各点坐标和应力状态已知, 而非特征线上各点  $\sigma_e$  和  $\theta$  只知其一, 或者只知两者之间的关系。因此, 欲求得基础底面各点等效应力  $\sigma_e$ , 则需要求解混合边值问题。如图7所示,  $OA$  为通过求解 Riemann 边值问题得到的已知滑移线。同时, 考虑基础与土体接触面完全粗糙的情况 ( $\delta = \varphi$ ), 则  $OB$  上各点大主应力方向角  $\theta$  为

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} = \frac{3}{4} \pi + \frac{\varphi}{2}. \quad (19)$$

在求解混合边值问题中, 首先利用点#10 和#11 计算点#21 上各个未知量。由于点#11 和#21 均在  $S_{2-1}$  滑移线上, 点#21 又在边界  $OB$  上, 则可以利用  $S_2$  滑移线差分方程式(15)和  $OB$  边界的差分方程:

$$\left. \begin{aligned} (z_{11} - z_{21}) &= (x_{11} - x_{21}) \cot[(\theta_{11} + \theta_{21})/2 + \mu], \\ (z_{21} - z_{10})/(z_B - z_{10}) &= (x_{21} - x_{10})/(x_B - x_{10}). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式中, 参数  $z_{10}$ ,  $x_{10}$ ,  $z_B$ ,  $x_B$ ,  $\theta_{11}$  及  $\theta_{21}$  均已知, 故

可以求出点#21 的  $x_{21}$ ,  $z_{21}$  值。基于  $x_{21}$ ,  $z_{21}$  及  $\theta_{21}$ , 利用式 (21) 可以得到  $\sigma_{e21}$  的值

$$\sigma_{e21} = \sigma_{e11} - 2(\sigma_{e11} + \sigma_c) \tan[\varphi(\theta_{21} - \theta_{11})] - \gamma(z_{21} - z_{11}) \frac{\sin(\theta_{11} - \mu)}{\cos \varphi} \cos(\theta_{11} + \mu) \quad (21)$$

欲求得点#32 和#43 的等效力, 需先通过求解 Riemann 边值问题获得点#22 和#33 的坐标和应力状态, 然后再根据上述计算步骤, 求解混合边值问题获得边界  $OB$  上各点的等效力。不同破坏模式下三类边值问题的分布, 主要是根据相应边界条件来确定的。计算起始边界 (地面或坡面) 以及终止边界 (基础底面) 分别对应于 Cauchy 边值问题和混合边值问题, 两者很容易在计算前确定下来。唯一需要假设的是边坡内部 Riemann 边值问题的分布, 其分布特征主要受基础与坡肩相对距离的影响。

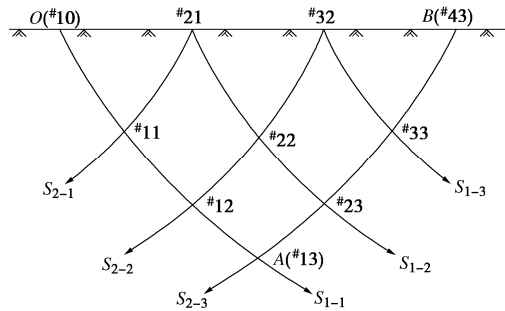


图 7 混合边值问题

Fig. 7 Mixed boundary value problem

### 2.3 应力场和速度场

通过上述三类边值问题的求解, 整个应力滑移线场已经构造完毕, 还需构造满足所有边界条件的速度场。由于采用相关联流动法则, 速度特征线与应力特征线完全重合, 因此速度滑移线场内各点坐标和大主应力方向角与应力场中相同。只需按照式 (13) 的差分形式进行求解, 便可以求得完整的速度场。速度滑移线场的构造顺序与应力滑移线场相反, 其初始速度边界为基础底面。由于基础假设为无重量刚体, 且不与土体发生任何相对位移, 因此基础底面满足刚体移动特性, 整个边界初始移动速度可以假设为  $v_0$  (本文  $v_0 = 1 \text{ m/s}$ )。然后从基础底面边界出发, 依次求解相应区域内的边值问题, 从而获得整个速度滑移线场。具体求解方法与应力场相同, 这里不再赘述。

当完整的滑移线场构造完毕时, 还需检验其是否完全满足以下条件: ①刚性区块体在临界状态时保持静力平衡, 并满足刚体运动特性。②塑性区内各点均达到屈服状态, 刚塑性区分界线满足速度间断线特性。

如果以上条件均满足, 则此时求得的临坡地基极

限承载力即为精确解。如果不满足上述条件, 则需要重新选择初始计算点, 并按照上述步骤重新计算直到满足条件为止。

## 3 对比验证与参数分析

竖向均布加载下的临坡地基极限承载力影响因素众多, 大致可以分为三类: ①边坡几何形状 (坡高  $H$ , 坡角  $\beta$ ); ②土体物理力学参数 (黏聚力  $c$ , 内摩擦角  $\varphi$  以及土体重度  $\gamma$ ); ③基础与坡肩相对距离  $L$ 。在以下计算中, 如无特别说明, 则土体重度  $\gamma$  取  $20 \text{ kN/m}^3$ , 基础作用宽度  $B$  取  $2 \text{ m}$ 。

### 3.1 对比验证

Huang<sup>[7]</sup>开展了临坡地基的模型试验研究, 得到了砂土边坡上地基极限承载力随坡角的变化规律, 并将试验结果与 Meyerhof<sup>[4]</sup>、Vesic<sup>[21]</sup>、Hansen<sup>[22]</sup>所得理论计算结果进行对比。其中, 土体的物理力学参数为:  $\gamma = 17 \text{ kN/m}^3$ ,  $\varphi = 35^\circ$ 。基础直接放置在坡肩上 ( $L/B = 0$ ), 且边坡高度足够大不影响临坡地基临界滑动面和极限承载力的变化。Meyerhof<sup>[4]</sup>、Vesic<sup>[21]</sup>和 Hansen<sup>[22]</sup>采用的理论计算公式如下:

$$q_u = \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma g_\gamma \quad (22)$$

式中,  $N_\gamma$  为考虑土体自重影响的平地地基极限承载力系数,  $g_\gamma$  为考虑边坡坡角影响的极限承载力折减系数。则承载力系数  $N_\gamma g_\gamma = 2q_u / \gamma B$ 。

图 8 给出了本文计算结果与上述模型试验以及理论计算结果的对比分析。不难看出, 本文计算结果与 Huang<sup>[7]</sup>开展的模型试验所得结果以及 Vesic<sup>[21]</sup>和 Hansen<sup>[22]</sup>采用的应力滑移线法所得结果基本吻合, 这证明了本文理论计算方法的可靠性。同时, Meyerhof<sup>[4]</sup>采用的极限平衡法所得结果明显偏大, 这是由于极限平衡法所构造的临界滑动破坏模型即不满足应力边界条件, 也不满足速度边界条件。

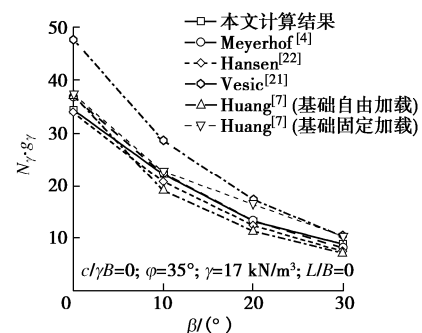


图 8 坡角对临坡地基极限承载力的影响性对比分析

Fig. 8 Comparison of ultimate bearing capacities of strip footings near slopes against slope angles

### 3.2 破坏机理分析

如图9所示,3种边坡高度下的临坡地基临界破坏模式均属于坡面承载力破坏。在 $H/B=3$ ,5工况下,临坡地基的临界滑动范围相同,此时极限承载力不再发生变化。由此可以确定,存在一临界边坡高度,超过此高度时临坡地基极限承载力不再随坡高发生变化。在此案例中,边坡临界高度 $H_{cr}$ 为6m。图10给出了3种坡角下临坡地基临界滑动面的变化规律。随着坡角的减小,临坡地基的整体滑动范围逐渐增大,地基极限承载力也随之增大,但破坏模式并未发生改变,仍然属于坡面承载力破坏。从图9,10的计算结果可以看出,当基础放置在坡肩上时( $L/B=0$ ),坡面承载力破坏起完全主导作用,边坡几何形状的变化仅改变了临界滑动范围以及地基极限承载力,对临坡地基破坏模式不产生影响。

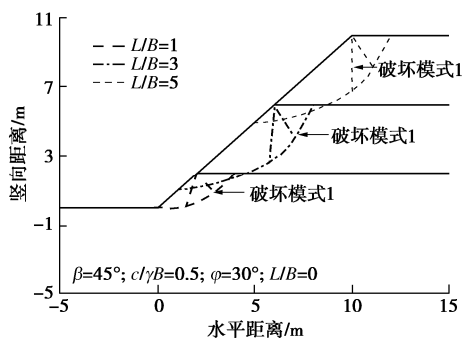


图9 不同坡高下的临坡地基整体破坏模式

Fig. 9 Failure mechanisms of strip footings near slopes with variable slope heights

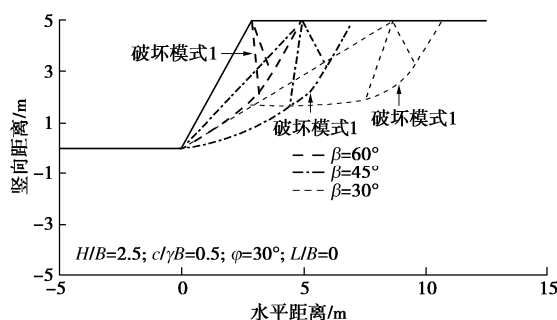


图10 不同坡角下的临坡地基整体破坏模式

Fig. 10 Failure mechanisms of strip footings near slopes with variable slope angles

图11展示了基础与坡肩相对距离对临坡地基破坏模式的影响。与边坡几何形状相比,基础放置位置对破坏模式的影响更为明显。随着基础与坡肩相对距离 $L$ 的增大,临坡地基整体结构从坡面承载力破坏,逐渐过渡到刚塑性坡面滑动破坏,直至边坡稳定性对其不再产生影响,从而达到Prandtl地基承载力破坏。基础与坡肩相对距离的增加,既能增加临界滑动范围从而提高极限承载力,又能改变临坡地基整体结构的破坏形式,因此在工程设计中需要合理估算基础放置

位置。相比于图11中所示的3种破坏模式,全塑性坡面滑动破坏以及深部滑动破坏发生的概率相对较小。全塑性坡面滑动破坏仅在基础距离坡肩较小范围内且边坡坡度较缓时发生,而深部滑动破坏只在边坡高度较低且土体内摩擦角较大时发生。

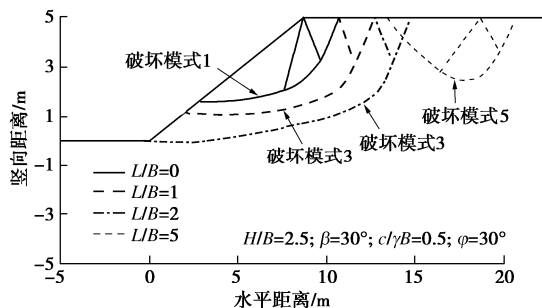


图11 不同基础与坡肩相对距离下的临坡地基整体破坏模式

Fig. 11 Failure mechanisms of strip footings near slopes with variable relative distances from footing edge to slope shoulder

### 3.3 极限承载力分析

由图12可见,临坡地基极限承载力随土体内摩擦角和黏聚力的增大而增大。当土体黏聚力较小时,地基极限承载力随内摩擦角增长曲线较为平缓。这是由于此时边坡稳定性较低,容易发生整体滑动破坏,从而导致极限承载力增长缓慢。当土体黏聚力逐渐增大时,地基极限承载力随内摩擦角增长幅度也迅速提高。同理,当土体内摩擦角逐渐增大时,地基极限承载力随土体黏聚力增长幅度也不断提高。

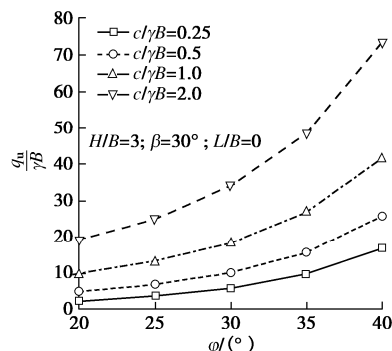


图12 不同土体剪切强度下的极限承载力变化规律

Fig. 12 Variation in ultimate bearing capacity under different cohesions and friction angles

图13给出了不同边坡高度和坡角下的临坡地基极限承载力变化规律。与平地地基相比,临坡地基极限承载力受边坡坡角的影响发生了急剧减小。边坡越陡峭,减小幅度越大。同时,随着边坡高度的增加,临坡地基极限承载力逐渐减小直至稳定,此时边坡高度达到临界值 $H_{cr}$ 。随着坡角的增加, $H_{cr}$ 也逐渐增加。在 $\beta=60^\circ$ 和 $\beta=75^\circ$ 工况下,临坡地基更加容易发生整体滑动破坏,此时 $H_{cr}$ 不明显。当临坡地基极限承载力的计算值为负值时,默认边坡发生整体滑动破坏。如图13所示,在 $H/B=5$ , $\beta=75^\circ$ , $c/\gamma B=0.5$ ,



$\varphi = 30^\circ$  以及  $L/B = 0$  条件下, 边坡发生整体滑动破坏, 无法承载。

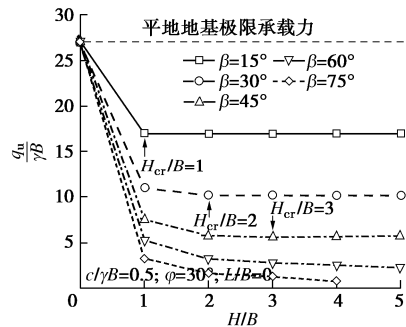


图 13 不同边坡几何尺寸下的极限承载力变化规律

Fig. 13 Variation in ultimate bearing capacity under different slope heights and slope angles

如图 14, 15 所示, 不同边坡高度和坡角下, 极限承载力随基础与坡肩相对距离的变化规律基本相同。基础与坡肩临界相对距离  $L_{cr}$  随坡高和坡角的增加而增加。相比于坡高, 坡角对基础与坡肩临界相对距离的影响更加明显。与土体剪切强度以及边坡几何形状带来的极限承载力变化不同, 极限承载力随基础与坡肩相对距离变化的过程, 实际上是临坡地基临界滑动范围和破坏模式转变的过程。随着临坡地基整体结构由最初的坡面承载力破坏逐渐转变到坡面滑动破坏或者深部滑动破坏, 并最终达到 Prandtl 地基承载力破

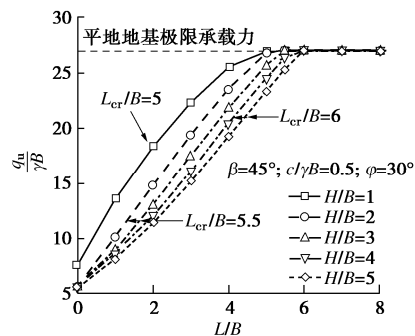


图 14 基础与坡肩相对距离及边坡高度对极限承载力的影响

Fig. 14 Effects of relative distance and slope height on ultimate bearing capacity

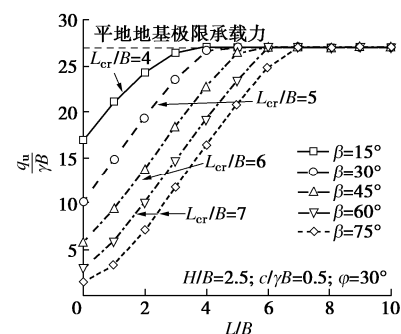


图 15 基础与坡肩相对距离及边坡坡角对极限承载力的影响

Fig. 15 Effects of relative distance and slope angle on ultimate bearing capacity

坏, 边坡稳定性对临坡地基极限承载力的影响逐渐减弱, 直至完全服从平地地基破坏形式, 从而导致地基极限承载力先增大后保持不变。

## 4 结 论

(1) 本文提出的严格滑移线场理论能够高效地寻找上、下解之间的精确解。对于临坡地基问题中存在的复杂边界条件, 所提 5 种单侧破坏模式能够直观地反映竖向均布承载下的实际破坏形式, 并能够通过三类基本边值问题构造同时满足应力边界条件和速度边界条件的滑移线场, 为临坡地基极限承载力的计算提供可靠依据。

(2) 临坡地基极限承载力随土体剪切强度的增加而增加。当土体强度较小时, 边坡稳定性不高, 极限承载力增长缓慢。当土体强度逐渐增大, 极限承载力增长幅度也随之增加。由于边坡高度对极限承载力的影响存在临界值且其容易达到, 因此在边坡几何形状对极限承载力的影响中, 边坡坡角起主导作用。

(3) 基础与坡肩相对距离是影响临坡地基极限承载力和破坏机理的重要因素。相较于土体剪切强度和边坡几何形状, 基础放置位置对破坏模式的影响最为明显。随着基础与坡肩相对距离的增加, 临坡地基整体结构由坡面承载力破坏, 逐渐过渡到坡面滑动破坏或者深部滑动破坏, 并最终达到 Prandtl 地基承载力破坏, 在此过程中临界滑动范围不断增大直至服从平地地基破坏形式, 而边坡稳定性对极限承载力的影响也逐渐减小直至不再产生影响, 由此导致了极限承载力先增大后保持不变的过程。

## 参考文献:

- [1] 尉学勇, 王晓谋, 怀超. 斜坡地基极限承载力上限解计算与分析[J]. 岩土工程学报, 2010, 32(3): 381 - 387. (YU Xue-yong, WANG Xiao-mou, HUAI Chao. Calculation and analysis of upper limit solution of ultimate bearing capacity of sloping ground[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, 32(3): 381 - 387. (in Chinese))
- [2] 尹鑫, 周海祚, 郑刚. 地震作用下临近边坡的条形基础极限承载力研究[J]. 岩土工程学报, 2017, 39(增刊 2): 95 - 98. (YIN Xin, ZHOU Hai-zuo, ZHENG Gang. Seismic bearing capacity of strip footings adjacent to slopes[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2017, 39(S2): 95 - 98. (in Chinese))
- [3] TERZAGHI K. Theoretical Soil Mechanics[M]. New York: Wiley, 1943.
- [4] MEYERHOF G G. Some recent research on the bearing



- capacity of foundations[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1963, **1**(1): 16 - 26.
- [5] 马庆宏, 朱大勇, 雷先顺, 等. 无黏性土斜坡地基承载力模型试验研究[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(7): 1271 - 1280. (MA Qin-hong, ZHU Da-yong, LEI Xian-shun, et al. Model tests on bearing capacity of footing on sand slopes[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(7): 1271 - 1280. (in Chinese))
- [6] TURKER E, SADOGLU E, CURE E, et al. Bearing capacity of eccentrically loaded strip footings close to geotextile-reinforced sand slope[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2014, **51**(8): 884 - 895.
- [7] HUANG C C. Effects of restraining conditions on the bearing capacity of footings near slopes[J]. Soils and Foundations, 2019, **59**(1): 1 - 12.
- [8] 胡卫东, 曹文贵. 基于双侧非对称破坏模式的临坡地基承载力极限平衡分析方法[J]. 土木工程学报, 2015, **48**(1): 120 - 128. (HU Wei-dong, CAO Wen-gui. The limit equilibrium method for ultimate bearing capacity of ground foundation adjacent to slopes based on bilateral asymmetry failure mode[J]. China Civil Engineering Journal, 2015, **48**(1): 120 - 128. (in Chinese))
- [9] 胡卫东, 曹文贵. 基于滑移线场理论的临坡地基承载力简化分析方法[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2017, **44**(7): 162 - 169. (HU Wei-dong, CAO Wen-gui. Simplified analysis method of ultimate bearing capacity for footings near slope based on slip line theory[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2017, **44**(7): 162 - 169. (in Chinese))
- [10] 胡卫东, 曹文贵, 袁青松. 基于非对称双侧破坏模式的临坡地基承载力上限分析[J]. 岩土力学, 2016, **37**(10): 2787 - 2794. (HU Wei-dong, CAO Wen-gui, YUAN Qing-song. An upper-bound limit analysis of ultimate bearing capacity of ground foundation adjacent to slope based on asymmetric and bilateral failure mode[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, **37**(10): 2787 - 2794. (in Chinese))
- [11] 蒋洋, 王晓谋, 郭建坤, 等. 基于滑移线场理论斜坡条基极限承载力解析解[J]. 地下空间与工程学报, 2018, **14**(1): 92 - 100. (JIANG Yang, WANG Xiao-mou, GUO Jian-kun, et al. Analytical solutions of ultimate bearing capacity for strip foundations on slopes based on slip line theories[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2018, **14**(1): 92 - 100. (in Chinese))
- [12] YANG S C, LESHCHINSKY B, CUI K, et al. Influence of failure mechanism on seismic bearing capacity factors for shallow foundations near slopes[J]. Géotechnique, 2021, **71**(7): 594 - 607.
- [13] LESHCHINSKY B. Bearing capacity of footings placed adjacent to  $c$ - $\phi$  slopes[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2015, **141**(6): 04015022.
- [14] 郑刚, 于晓旋, 杜娟, 等. 临近边坡的条形基础地基极限承载力数值分析[J]. 岩土力学, 2018, **39**(10): 3812 - 3820, 3829. (ZHENG Gang, YU Xiao-xuan, DU Juan, et al. Numerical analysis of ultimate bearing capacity of strip footings near slopes[J]. Rock and Soil Mechanics, 2018, **39**(10): 3812 - 3820, 3829. (in Chinese))
- [15] 赵明华, 胡啸, 张锐. 临坡地基承载力极限分析上限有限元数值模拟[J]. 岩土力学, 2016, **37**(4): 1137 - 1143, 1152. (ZHAO Ming-hua, HU Xiao, ZHANG Rui. Numerical simulation of the bearing capacity of a foundation near slope using the upper bound finite element method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, **37**(4): 1137 - 1143, 1152. (in Chinese))
- [16] LI C C, ZHOU A Z, JIANG P M. Eccentric bearing capacity of embedded strip footings placed on slopes[J]. Computers and Geotechnics, 2020, **119**: 103352.
- [17] ZHANG R, XIAO Y, ZHAO M H, et al. Seismic bearing capacity of strip footings placed near  $c$ - $\phi$  soil slopes[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2020, **136**: 106221.
- [18] 沈珠江. 不连续解在极限土压力计算中的应用[M]//沈珠江土力学论文集. 北京: 清华大学出版社, 2005. (SHEN Zhu-jiang. Discontinuous solution in limit earth pressure computation application[M]// Selected Works on Soil Mechanics of Shen Zhujiang. Beijing: Tsinghua University Press, 2005. (in Chinese))
- [19] LI C C, JIANG P M, ZHOU A Z. Rigorous solution of slope stability under seismic action[J]. Computers and Geotechnics, 2019, **109**: 99 - 107.
- [20] KUMAR J, KOUZER K M. Effect of Footing Roughness on Bearing Capacity Factor  $N_\gamma$  [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2007, **133**(5): 502 - 511.
- [21] VESIC A S. Analysis of ultimate loads of shallow foundations[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, 1973, **99**(1): 45 - 73.
- [22] HANSEN J B. A Revised and Extended Formula for Bearing Capacity[M]. Copenhagen: Danish Geotechnical Institute, 1970.