

DOI: 10.11779/CJGE202105008

基于改进最小势能法的水平-竖向立体筋边坡稳定性分析研究

蒋建国, 陈媛, 刘孙光, 赵发嘉

(中南大学土木工程学院, 湖南 长沙 410075)

摘要: 基于改进的最小势能算法提出了一种应用于水平-竖向(horizontal-vertical, 简称 H-V)立体筋边坡稳定性分析的新方法。在建立边坡支护系统的势能函数时考虑水平筋的摩擦势能、线弹性应变能以及竖筋变形势能的影响。通过单元体虚位移方向的静力平衡方程分析加筋边坡剪切势能, 构建了适用于施加水平筋和 H-V 立体筋边坡的势能计算模型。通过计算系统势能最小时的虚位移进而求解边坡安全系数, 简化了加筋边坡的分析过程, 提高了计算效率, 经与已有文献计算结果进行对比分析, 证明计算方法的可行性。分析了不同土体强度参数黏聚力和内摩擦角对加筋边坡稳定性的影响, 为立体加筋技术在工程中应用和推广提供参考。

关键词: 改进最小势能法; 边坡稳定性; 水平-竖向体筋(H-V筋); 安全系数

中图分类号: TU473 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2021)05-0850-08

作者简介: 蒋建国(1973—), 男, 湖南洞口人, 副教授, 主要从事路基路面工程、岩土工程方面的研究工作。E-mail: yuanchencsu@126.com。

Stability analysis of horizontal-vertical ribs-reinforced slopes based on improved minimum potential energy method

JIANG Jian-guo, CHEN Yuan, LIU Sun-guang, ZHAO Fa-jia

(School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: Based on the improved minimum potential energy algorithm, a new method for the stability analysis of horizontal-vertical (H-V) ribs-reinforced slopes is proposed. In this method, the frictional potential energy of horizontal reinforcement, linear elastic strain energy and deformation potential energy of vertical reinforcement are considered when the potential energy function for the slope-supporting system is established. A potential energy model suitable for the studied slope is established through the shear potential energy of the reinforced slope according to the static equilibrium equation for virtual displacement. The analysis process of the reinforced slope is simplified, and the calculation efficiency is improved by solving the safety factor of the slope with the virtual displacement of the minimum potential energy of the studied slope. By comparing and analyzing the calculated results with those of the published papers, the feasibility of the proposed method is proved. The effect of strength parameters of soils such as cohesive force and internal friction angle on the slope stability is also analyzed, which provides reference for the application and promotion of three-dimensional reinforced slope technology in engineering.

Key words: improved minimum potential energy method; slope stability; horizontal-vertical ribs; safety factor

0 引言

自1960年Henri Vidal^[1]首次提出了“加筋土”的概念和设计理论以来, 土工合成材料广泛应用于岩土工程领域^[1]。在边坡中铺设土工合成材料能够优化土体应力分布, 提高边坡的稳定性和承载力^[2-4]。有别于二维土工合成材料如土工格栅、土工布。张孟喜^[5]首先提出H-V立体筋的概念。作为一种新型加筋方式, H-V立体筋在筋-土相互作用上展现出更好的优势,

除了具有水平筋作用外, 竖筋能约束土体的变形并在竖筋间形成“加强土楔体”或“加强土柱”, 增强土体的抗拉强度和抗剪强度^[6], 具有较好的应用前景。

常用的加筋边坡稳定性分析方法主要有极限平衡法、有限元法等。改进最小势能法作为边坡稳定性分析方法之一, 研究成果表明, 相对极限平衡法, 该方法计算方便快捷, 具有不需要条块划分、不需要反复

迭代求解等优点^[7-9]。目前,改进最小势能法主要应用于有加固措施如锚杆、锚索、抗滑桩的边坡稳定性分析中。邹治来^[10]考虑土工格栅与土体接触面之间摩擦势能和土工格栅弹性拉伸势能,建立土工格栅加筋边坡的最小势能稳定性分析方法。但是分析过程中,由于土工格栅与土体之间摩擦阻力计算过程复杂,参数众多,需要进行拉拔试验才能确定参数值,实现有很大难度。采用最小势能法分析了普通土工格栅加筋边坡稳定性,李铀等^[11]、孙加平等^[12]提出了考虑滑床剪切势能影响的近似计算模型,改进最小势能对锚杆(索)加固边坡稳定分析方法。温树杰等^[13]分析桩体变形特征,考虑抗滑桩与滑体相互接触处的弹性压缩势能、挠曲势能提出基于最小势能法加固边坡稳定性分析方法。未检索到最小势能法应用于 H-V 立体筋加筋边坡稳定性分析。

H-V 立体筋边坡稳定性分析主要采用条分法，张孟喜等^[14]采用瑞典条分法对立体加筋边坡的稳定性进行探讨，在计算过程中未考虑条间力的作用，容易导致计算结果偏小。马学宁等^[15]建立水平条间力的假设条件，推导出水平条分瑞典法和简布法分析 H-V 立体加筋边坡的稳定性，该方法需要在水平筋材处于土条的中线上的条件下进行，且水平条分简布法需要进行反复迭代，计算量较大。其它对于 H-V 立体筋边坡稳定性分析文献尚不多见。

因此，本文基于改进最小势能法，对 H-V 立体筋作用的基本原理和受力特性进行分析，构建出水平筋和竖筋的弹性势能方程，并对加筋边坡单元体虚位移方向的剪切势能进行推导，通过计算边坡最危险滑裂面系统势能最小时的虚位移，求解出边坡安全系数，并通过算例对该方法的适用性和可行性进行验证。

本文利用改进最小势能法从能量的角度对 H-V 立体筋边坡的稳定性展开分析，在系统中涉及的能量种类主要有滑体储存的弹性势能，H-V 筋因水平筋线弹性变形产生弹性势能、筋土之间因摩擦储存摩擦势能、竖筋产生侧向变形储存弹性势能和滑面剪切势能，概念清晰，可直接计算加筋边坡稳定性分析结果，相对于计算复杂的有限元法和需反复迭代、需对超静定问题进行多次假定的极限平衡法更有实用价值，为 H-V 立体筋边坡稳定性分析提供新的思路。

1 滑体储存的弹性势能

如图 1 所示的 H-V 立体筋均质边坡，设潜在滑裂面为 AC ，其曲线方程表示为 $y = f(x)$ ，土体黏聚力为

c , 内摩擦角为 φ , 重度为 γ , 土体的重力为 W , 第 i 排筋条与水平方向的夹角为 α_i , 水平方向布置则 $\alpha_i = 0$; 第 i 排筋条与竖直方向的夹角为 β_i , 每排筋条的单位方向向量记为 $\vec{T} = (\cos \alpha_i, \cos \beta_i)$ 。为合理建立力学模型, 做如下说明: ①假设滑动体整体为刚性体, 在滑裂面上存在弹性压缩变形和剪切变形, 储存的弹性压缩势能为 V_e , 剪切势能为 V_τ ; ②在合外力 \vec{R} 的作用下加筋边坡与滑体产生相同的虚位移 $\vec{d} = (d_1, d_2)$; ③微分段的长度为 dl , 弹性压缩变形可用刚度系数为 K_i 的弹簧模拟, 其大小与微段 dl 呈正比, 即 $K_i = m_i dl$, m_i 为地基系数, 可通过试验测定或查阅相关资料获得。

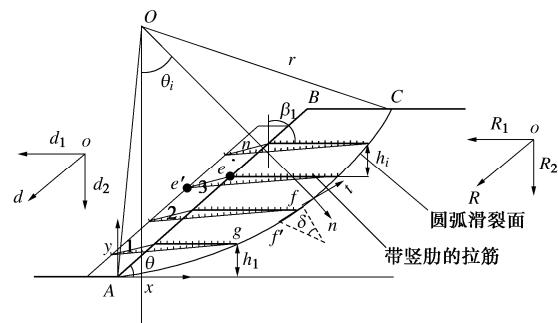


图 1 H-V 加筋均质边坡计算图示

Fig. 1 Calculation of H-V ribs-reinforced homogeneous slope

滑裂面方程为 $y = f(x)$ ，则求得曲线上任意切线上法线的斜率为 $k = -1/f'(x)$ 。滑裂面外法线单位向量和滑面切向单位向量可表示为

$$\vec{n}(x) = [n_1(x), n_2(x)] = \left\{ \frac{f'(x)}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}} \right\}, \quad (1)$$

$$\vec{t}(x) = [t_1(x), t_2(x)] = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}, \frac{f'(x)}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}} \right\}. \quad (2)$$

假设在各种力的作用下，滑体发生虚位移，使系统势能最小，滑体此时的势能即是系统达到极限平衡状态时的最小势能，则任意微段储存的弹性势能为

$$V_{\text{el}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} K_i (\vec{d} \cdot \vec{n})^2 = \frac{1}{2} \int m (\vec{d} \cdot \vec{n})^2 dl \quad . \quad (3)$$

2 H-V 立体筋势能构建

H-V 立体筋结构在传统水平筋的基础上设置竖筋，竖筋宽度可与水平筋相同，其截面形状可根据工程需要采用不同厚度变化的矩形、多边形等，形成一种空间形式的三维组合加筋结构，如图 2 所示。

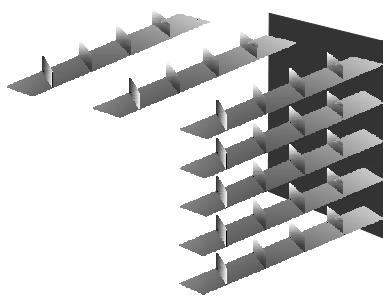


图 2 H-V 立体筋三维结构示意图

Fig. 2 Three-dimensional structural diagram of H-V ribs

H-V 立体筋结构的基本原理：将一定量具有抗拉强度的 H-V 立体筋铺设在土体中，水平筋的拉力作用会逐渐延伸到路堤边坡自由面的筋条中，水平筋土之间摩擦力提供锚固力；竖筋的作用则表现为增加筋材拔出过程中竖筋的抗阻力，使土体结合更紧密，将整个 H-V 筋锚固在了土体中，提高边坡承载力。相对普通均质边坡，H-V 筋的这种拉力状态也会使上部土体传递来的荷载较为集中，相对更均匀地分布到筋材下部的土体，使下部土体受力更合理。

2.1 筋条特征坐标确定

构建 H-V 立体筋势能函数时需要确定水平筋与滑面交点坐标和竖筋有效数目，因此首先需要确定筋条的特征坐标。加筋边坡在发生失稳破坏时，根据坡体的滑动状态可分为滑动区和锚固区，如图 3 所示，设坡面倾角为 θ ，筋材各层的垂直间距为 h_i ，第一层水平筋距离坡脚的竖直距离为 h_1 。则第 i 层水平筋与滑动面的交点纵坐标 y_i 可表示为

$$y_i = y_1 + h_i(i-1) \quad (4)$$

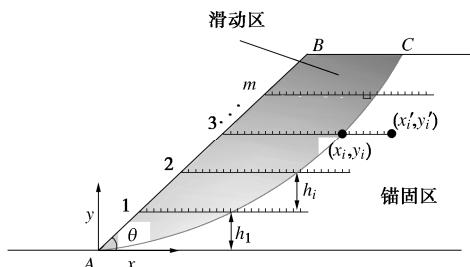


图 3 筋条的特征坐标计算简图

Fig. 3 Simplified calculation of characteristic coordinates of geogrid

将式(4)与滑动面方程 $y = f(x)$ 联立即可确定各排筋条与滑面的交点坐标，若方程组有解，则筋条产生变形储存了势能，确认筋条储存势能且取 $x > 0$ 时，第 i 层水平筋与滑动面的交点横坐标 x_i 可表示为

$$x_i = f'(y_i) \quad (x > 0) \quad (5)$$

土工格栅长度为 l ，则第 i 层水平筋右末端横坐标 x'_i 表示为

$$x'_i = x_i + l + h_i(i-1)/\tan\theta \quad (6)$$

由式(5)，(6)可得第 i 层土工格栅的锚固区长度为

$$l_i = x'_i - x_i \quad (7)$$

设竖筋间距为 D ，则锚固区内第 i 层内竖筋的个数 n_i 可表示为

$$n_i = l_i/D + 1 \quad (8)$$

则可计算出锚固区内竖筋的总个数 $n = \sum_{i=1}^m n_i$ 。

2.2 水平筋弹性势能

在土体滑动的过程中，水平筋与土体之间摩擦力作功会产生摩擦势能，水平筋自身也会由于拉伸变形产生线弹性应变能。

对水平筋进行作用力分析时，由于筋土之间接触复杂，水平筋和填土分开考虑计算筋材的摩擦力参数较多，实现起来有很大的难度。加筋路堤稳定性计算时，土工合成材料应用手册将水平筋与路堤填土分开考虑，所以在计算稳定性系数时水平筋的作用力一般直接取其抗拉强度值。本文将水平筋与其附近土体考虑为一种复合体，所以筋条的抗拉力应该分散到其作用范围以内的土体中^[14]。假设筋条的抗拉力平均分配到每层筋条的土体中，若路堤中每层筋条水平间距为 S_x ，竖向间距为 S_y （图 4）。

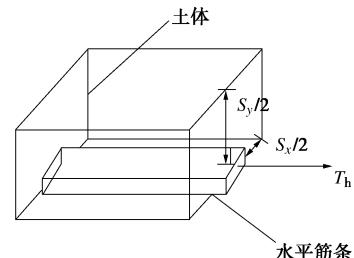


图 4 水平筋复合抗拉力计算示意图

Fig. 4 Schematic diagram of calculation of horizontal ribs

则第 i 个土条中单位厚度复合土体中抗拉力为

$$T_{st} = \frac{T_h}{S_x \cdot S_y} l_i \sin\theta_i \quad (9)$$

式中， T_h 为单根水平筋条抗拉力， S_x 为筋条水平间距， S_y 为筋条竖向间距， l_i 为第 i 条底弧长度， θ_i 为第 i 条底弧仰角。

如图 5 所示，对单位长度为 l_i 的土体单元进行分析，水平筋的摩擦阻力 T_{ki} 与水平筋的作用力 T_{st} 平衡，所以满足 $T_{ki} = T_{st}$ ，由于土工格栅所受摩擦阻力与位移呈钝角关系，所以摩擦所储存的势能为力所做功的负值。

$$V_{e2} = -\sum_{i=1}^n T_{ki} (\vec{d} \cdot \vec{T}) \quad (10)$$

式中， T_{ki} 为第 i 排水平筋摩擦阻力， \vec{d} 为滑体虚位移，

\vec{T} 为水平筋水平轴向单位向量。

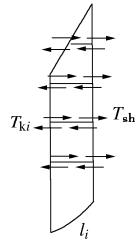


图 5 土体单元水平筋受力分析图

Fig. 5 Analysis diagram of horizontal reinforcement of soil element

根据以往文献资料结果显示, 基于筋-土界面加筋摩擦机理的圆弧滑动分析方法可以计算加筋后的安全系数, 在抗滑项中加入界面摩擦阻力, 但结果可能偏小^[16]。本文将水平筋与其附近土体考虑为一种复合体, 因为筋土间的界面被忽略, 在计算水平筋所受摩擦阻力时缺少界面摩擦阻力, 抗滑力中缺少界面摩擦项, 且土工格栅摩擦阻力是在抗拉强度条件下计算的, 因此可能导致安全系数计算结果偏大, 具体影响还需要进一步研究。

分析水平筋的线应变势能时, 滑体在向最小势能方向移动时会产生虚位移, 因筋材均必须要伸入到较深坡体内部, 因此可假设筋材与右端与滑裂面的交点 g 处是固定的^[11]。设布置了 m 排筋材, 筋条的刚度为 K' , 如图 6 所示, 在合外力作用下滑体发生虚位移 \vec{d} , 水平筋的坡面端头由 e 移至 e' , 伸长量为 $\Delta_{k'}$, 假设 e 坐标为 (x_e, y_e) , g 的坐标为 (x_g, y_g) 。可得

$$\Delta_{k'} = |ge' - ge| \\ = \sqrt{(d_1 + v_{k'x})^2 + (d_2 + v_{k'y})^2} - \sqrt{v_{k'x}^2 + v_{k'y}^2} \quad , \quad (11)$$

式中, $v_{k'x} = x_g - x_e$, $v_{k'y} = y_g - y_e$ 。

水平筋的线应变能为

$$V_{e3} = \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{2} K' \Delta_{k'}^2 \right] \\ = \frac{K'}{2} \sum_{i=1}^m \left[(d_1 + v_{k'x})^2 + (d_2 + v_{k'y})^2 + (v_{k'x}^2 + v_{k'y}^2) \right] - \\ K' \sum_{i=1}^m \left[\sqrt{(d_1 + v_{k'x})^2 + (d_2 + v_{k'y})^2} \cdot \sqrt{v_{k'x}^2 + v_{k'y}^2} \right] . \quad (12)$$

2.3 坚筋弹性势能

当 H-V 立体筋在荷载作用下坚筋首先发挥作用, 在其自身刚度下对土体产生侧阻力, 阻挡土体向两侧运动, 这相当于给土体增加多个侧向约束, 坚筋对土体的势能主要是侧阻力对坚筋作用产生的变形势能。

对坚筋的作用力进行分析, 坚筋的侧向抵抗作用在坚筋间将形成“土体加强区”, 以有效改变加筋土的受力状况^[6]。如图 7 所示, 在坚筋两侧分别作用有主

动土压力 σ_a 和被动土压力 σ_p , 沿坚筋表面作用有剪切应力 τ_v , τ_h , 在坚筋顶部作用有竖向压力 σ_b 。由于坚筋表面积与厚度及其顶部面积相对路堤尺寸可忽略, 因此坚筋的主要作用力为竖向筋条两侧的主动土压力及被动土压力, 在稳定性分析时, 忽略坚筋表面的剪应力作用, 坚筋的侧阻力可由被动土压力与主动土压力之差计算得到^[14]。

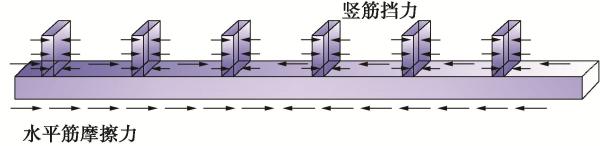


图 6 立体筋材结构受力示意图

Fig. 6 Schematic stress diagram of three-dimensional rib structure

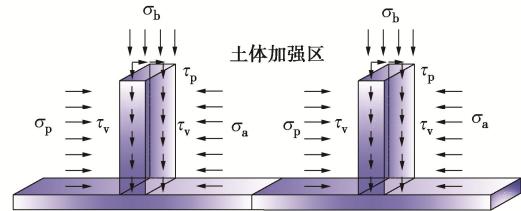


图 7 坚筋单元受力图

Fig. 7 Force diagram of three-dimensional tendons

则主动、被动土压力计算公式为

$$T_a = (\gamma H_i K_a - 2c\sqrt{K_a})A \quad , \quad (13)$$

$$T_p = (\gamma H_i K_p + 2c\sqrt{K_p})A \quad . \quad (14)$$

坚筋作用力为 T_{sh} ,

$$T_{sh} = T_p - T_a = [T_p - T_a] \\ = [\gamma H_i (K_p - K_a) + 2c(\sqrt{K_p} + \sqrt{K_a})]A \quad , \quad (15)$$

式中, c 为土体黏聚力, γ 为土体重度, H_i 为坚筋上覆土高度, φ 为内摩擦角, K_a 为主动土压力系数, K_p 为被动土压力系数, 且 $K_a = \tan^2(45^\circ - \varphi/2)$, $K_p = \tan^2(45^\circ + \varphi/2)$, A 为坚筋侧面积, $A = Bh$, 其中 B 为坚筋宽度, h 为坚筋高度。

由于坚筋的侧向变形对 H-V 筋中坚筋作用发挥起重要作用, 所以尽管坚筋高度相对边坡尺寸较小, 也需要进行势能分析。在进行 H-V 加筋边坡稳定性分析时, 考虑到坚筋的排列会对微分圆弧作用面的受力产生影响, 所以在计算抗滑力时只计算锚固区(即破裂面外部)的有效坚筋阻力, 锚固区内坚筋总个数为 n , 则坚筋在侧阻力作用下产生的变形势能为

$$V_{e4} = \sum_{i=1}^n T_{sh} \Delta_x = \sum_{i=1}^n T_{sh} d_1 \quad , \quad (16)$$

式中, T_{sh} 为坚筋作用力, Δ_x 为坚筋水平方向的变形量, 大小为虚位移 \vec{d} 在水平方向的分量。

通过式(15)可看出坚筋作用力 T_{sh} 的作用点位于

竖筋高度的中部,但由于竖筋高度 h 较小,在计算立体筋合力时,竖筋作用力的方向可近似认为作用在水平筋上。则立体筋的合力为竖筋作用力 T_{sh} 和水平筋作用力 T_{st} 的和,即

$$T_i = T_{st} + nT_{sh} \quad . \quad (17)$$

3 滑面剪切势能的构建

边坡的失稳往往是沿着土体抵抗力最小的方向滑动,即为使坡体系统势能最小的虚位移方向。由文献[8]可知采用弹性势能以及合外力做功的方式表示边坡的剪切势能,可大大简化计算量,同时便于程序的实现。为便于势能公式的表达,令 $\Delta = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$, $\Delta' = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$, 则合外力 \vec{R} 和虚位移 \vec{d} 的方向向量可表示为

$$\left. \begin{aligned} \vec{R}_i &= \frac{1}{\Delta}(R_1, R_2), \\ \vec{d}_d &= \frac{1}{\Delta'}(d_1, d_2). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

从图 1 中任取土条作为研究对象,土条的受力分析如图 8 所示。

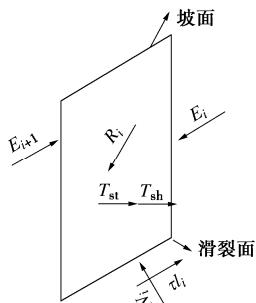


图 8 边坡土条受力图

Fig. 8 Force diagram of slope strips

作用在土条上的力有法向力 N_i , 剪应力 τ_i , 合外力为 R_i , H-V 立体筋合力为 T_i , 土条左右面上的条间力为 E_i , E_{i+1} 。由于边坡失稳沿着岩土体抵抗力最小的方向,即虚位移 \vec{d} ,因此各个土条左右面上的条间力作用方向与虚位移方向一致,在计算过程中,将第 i 个土条条间力合力记为 E_i , E_{i+1} , 将第 $i+1$ 个土条条间力合力记为 E'_{i+1} , E_{i+2} , $\Delta E = E_{i+1} - E_i$, 则各个土条沿虚位移方向满足平衡方程:

$$N_i \cos \alpha + \tau_i l_i \cos \beta + T_i \cos \omega + \Delta E_i = R_i \cos \phi. \quad (19)$$

式中 α 为任意微面上法向力与虚位移方向的夹角,且 $\cos \alpha = \vec{n} \cdot (-\vec{d}_d)$; l_i 为滑裂面微段长度; β 为剪应力与虚位移的夹角,且 $\cos \beta = \vec{\tau} \cdot (-\vec{d}_d)$; ω 为水平筋与虚位移的夹角, $\cos \omega = \vec{T} \cdot (-\vec{d}_d)$; ϕ 为合外力与虚位移的夹角, $\cos \phi = \vec{R}_i \cdot \vec{d}_d$ 。

由式(19)可知滑面上剪应力的解析解为

$$\tau_i = \frac{\frac{R_i}{\Delta} \vec{R}_i \cdot \vec{d}_d + T_i \vec{T} \cdot \vec{d}_d - N_i \vec{n}_i \cdot \vec{d}_d - \Delta E_i}{-\vec{d}_d \cdot \vec{l}_i} \quad . \quad (20)$$

为得到线弹性范围内剪切应变势能产生的函数,需要先构建剪应变和剪应力的力学求解模型,土体由于剪切变形发生的剪应变为 δ_i , 在剪切力 τ_i 的作用下滑体沿着滑裂面切向会产生相对位移,即由滑裂面上的点 f 移动至点 f' ,受剪切变形影响的土体深度为 h_i , 剪切位移记为 d' , 则

$$\delta_i = \frac{d'}{h_i} \quad . \quad (21)$$

滑面上的剪切势能为

$$\begin{aligned} V_\tau &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tau_i \delta_i h_i \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{R_i}{\Delta} \vec{R}_i \cdot \vec{d}_d + T_i \vec{T} \cdot \vec{d}_d - N_i \vec{n}_i \cdot \vec{d}_d - \Delta E_i}{-\vec{d}_d \cdot \vec{l}_i} \frac{\vec{d} \cdot \vec{t}}{h_i} h_i l_i \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\vec{R}_i}{\Delta} \vec{R} \cdot \vec{d} + T_i \vec{T} \cdot \vec{d} - N_i \vec{n}_i \cdot \vec{d} - \Delta E_i \right) \\ &= V_{el} - \frac{1}{2} \vec{R} \cdot \vec{d} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n T_i \vec{T} \cdot \vec{d} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta E_i \quad , \end{aligned} \quad (22)$$

式中, $\sum_{i=1}^n \Delta E_i$ 的物理意义为各个条块条间力的矢量

和,由于各个条块之间的作用力属于作用力与反作用力,因此 $\sum_{i=1}^n \Delta E_i = 0$,则上式可化简为

$$V_\tau = V_{el} - \frac{1}{2} \vec{R} \cdot \vec{d} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n T_i \vec{T} \cdot \vec{d} \quad . \quad (23)$$

综合式(3)、(10)、(12)、(17)、(23)可得 H-V 立体筋边坡系统的总势能为

$$\begin{aligned} V &= V_{el} + V_{e2} + V_{e3} + V_{e4} + V_\tau - \vec{R} \cdot \vec{d} \\ &= 2V_{el} + V_{e2} + V_{e3} + V_{e4} - \frac{3}{2} \vec{R} \cdot \vec{d} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n T_i \vec{T} \cdot \vec{d} \quad . \end{aligned} \quad (24)$$

4 安全系数的计算

安全系数 F_s 为沿着虚位移 \vec{d} 方向投影得到的抗滑力 F_m 与下滑力 F_n 的比值^[8],即

$$F_s = \frac{F_m}{F_n} \quad , \quad (25)$$

式中,抗滑力主要由微分圆弧 dl 的极限抗滑力和 H-V 立体筋复合抗拉力产生的抗滑力提供,下滑力由合外力(包括滑体自重)提供。本文的抗滑力 F_m 及下滑力 F_n 均与虚位移相关,因此需先求解虚位移,再进行安全系数求解。

4.1 虚位移 \vec{d} 的求解

根据最小势能原理可知,H-V 立体筋边坡系统势

能最小时, 总势能函数在虚位移的一阶偏导处需满足

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial d_1} &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial d_2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

将式(24)代入式(26), 即可求出系统最小势能时坡体的虚位移 \vec{d} 。其中令

$$a_1 = \sum_{i=1}^n k_i \eta_x^2 = m \int_{x1}^{x2} \frac{[f'(x)]^2}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}} dx, \quad (27)$$

$$a_2 = a_3 = \sum_{i=1}^n k_i \eta_y^2 = m \int_{x1}^{x2} \frac{-f'(x)}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}} dx, \quad (28)$$

$$a_4 = \sum_{i=1}^n k_i \eta_z^2 = m \int_{x1}^{x2} \frac{1}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}} dx, \quad (29)$$

$$A = K' \left[d_1 + v_{kx} - \frac{2(v_{kx}^2 + v_{ky}^2)(d_1 + v_{kx})}{\sqrt{[(d_1 + v_{kx})^2 + (d_2 + v_{ky})^2] \cdot (v_{kx}^2 + v_{ky}^2)}} \right], \quad (30)$$

$$B = K' \left[d_2 + v_{ky} - \frac{2(v_{kx}^2 + v_{ky}^2)(d_2 + v_{ky})}{\sqrt{[(d_1 + v_{kx})^2 + (d_2 + v_{ky})^2] \cdot (v_{kx}^2 + v_{ky}^2)}} \right], \quad (31)$$

$$C = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n T_i + \sum_{i=1}^n T_{ki} - \sum_{i=1}^n T_{sh} \right) \cos \alpha_i + \frac{3}{2} R_x, \quad (32)$$

$$D = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n T_i + \sum_{i=1}^n T_{ki} \right) \cos \beta_i + \frac{3}{2} R_y. \quad (33)$$

则式(26)可表示为

$$\left. \begin{aligned} 2(a_1 d_1 + a_2 d_2) + A &= C, \\ 2(a_4 d_2 + a_3 d_1) + B &= D. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

根据方程组计算得出 d_1 , d_2 。

4.2 抗滑力 F_m 的求解

抗滑力 F_m 由滑裂面上各微段的法向力 N_i 、极限剪切力 $\tau_i l_i$ 以及水平加筋等效应力或H-V立体加筋应力沿着虚位移方向提供的抗滑力投影之和组成。本文研究的土工格栅对抗滑力的贡献主要体现在增加了滑体的剪切力。整个滑裂面上任意微段的法向力 N_i 提供的下滑力为

$$\begin{aligned} F_{m1} &= \sum_{i=1}^n N_i \cos \alpha = \sum_{i=1}^n m(\vec{d} \cdot \vec{n}) l_i \cos \alpha \\ &= -\sum_{i=1}^n m \left[\frac{d_1 f'(x) - d_2}{\nabla} \right] \vec{d}_d \cdot \vec{n} l_i, \end{aligned} \quad (35)$$

式中, α 为任意微面上法向力与虚位移方向的夹角, 且 $\cos \alpha = \vec{n} \cdot (-\vec{d}_d)$ 。

由莫尔-库仑破坏准则, 微分圆弧 dl 滑动面上极限抗剪力在虚位移方向上所能提供的抗滑力 F_{m2} 为

$$\begin{aligned} F_{m2} &= \int_{x1}^{x2} dF_{m2} \\ &= \int_{x1}^{x2} [c + m(\vec{d} \cdot \vec{n}) \tan \varphi] dl \cos \beta, \end{aligned} \quad (36)$$

式中, β 为剪应力与虚位移的夹角, $\cos \beta = \vec{t} \cdot (-\vec{d}_d)$ 。

任意微段上的H-V立体筋复合抗拉力提供的抗滑力 F_{m3} 为

$$F_{m3} = \sum_{i=1}^n T_i \cdot \cos \omega = \sum_{i=1}^n (T_{st} + T_{sh}) \cdot \cos \omega, \quad (37)$$

式中, ω 为水平筋与虚位移的夹角, $\cos \omega = \vec{T} \cdot (-\vec{d}_d)$ 。

在虚位移方向上总的抗滑力 F_m 为

$$F_m = F_{m1} + F_{m2} + F_{m3}. \quad (38)$$

4.3 下滑力 F_n 的求解

作用在滑体上的所有力中, 只有合外力 \vec{R} 沿着虚位移 \vec{d} 方向上提供下滑力 F_n , 则总下滑力为

$$F_n = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \cos \phi = |\vec{R}| \frac{R_1 d_1 + R_2 d_2}{\Delta \Delta'} . \quad (39)$$

5 算例

如图9所示的H-V立体筋均质边坡^[15], 边坡坡度为1:1, 边坡高度6 m, 土体黏聚力 $c=10$ kPa, 重度 $\gamma=18$ kN/m³, 内摩擦角 $\varphi=20^\circ$ 。该边坡采用的H-V立体筋材料为单向拉伸高密度聚乙烯拉筋, 筋材的抗拉刚度为10000 kN/m, 土体的地基系数为100 kN/m³, 共铺设5层, 每层筋材长为6 m, 第一层距坡顶0.6 m, 最后一层距坡底0.6 m, 坚筋间距 $D=20$ cm, 筋材之间的间距为1.2 m, 坚筋高度 $H=10$ mm。

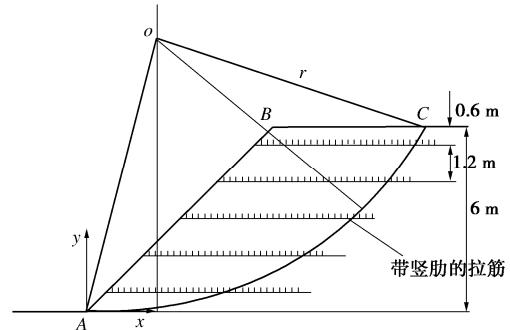


图9 H-V立体筋边坡示意图

Fig. 9 Schematic diagram of reinforced slope

建立如图9所示直角坐标系, 通过4.5H法搜索滑动面圆心线, 通过改变边坡坡度, 得到不同的滑动面的方程, 利用MATLAB编程试算求解出安全系数的数值最小的滑裂面即为最危险滑动面。则试算得出的边坡最危险滑动面圆心 o 的坐标为(-1.02, 10.72), 半径 $R=10.77$ m, 滑动面方程 AC 为

$$(x+1.02)^2 + (y-10.72)^2 = 10.77^2.$$

5.1 算例计算结果分析

本文采用改进最小势能法计算未加筋、加水平筋

及加 H-V 立体筋边坡的安全系数，并与文献[14, 15]的水平条分瑞典法的计算结果进行比较，计算结果如表 1 所示。

表 1 与文献计算结果对比

Table 1 Comparison between calculated results and those in published papers

项目	改进最小势能法	文献[14]的方法	文献[15]的水平条分瑞典法
未加筋	1.178	1.204	1.215
加水平筋	1.563	1.576	1.749
加立体筋	1.728	1.719	2.121

由表 1 可见，对未加筋边坡，本文采用的改进最小势能法计算的安全系数与文献[14, 15]的计算结果相差最大值为 0.037，相差最小值 0.026，相对误差小于 3.05%，证明本文的计算方法是合理可行的。对于加水平筋，加立体筋边坡稳定性提高了 14%，说明立体筋加筋效果更明显。对比文献[15]的水平条分瑞典法计算结果，本文的计算结果明显偏小，原因在于对加筋边坡稳定性分析时考虑了单个条块水平条间合力为 0 和整体力矩平衡的条件，考虑了竖向条间力作用，使计算结果偏大。

5.2 不同土体参数算例计算结果对比

目前，文献[15]采用的水平条分法还是一种相对新的计算方法，为了更好地验证本文计算方法的可靠性，针对算例在表 2 中设置不同的参数与极限平衡法（Bishop 法和 Janbu 法）在无筋（不加筋）、加筋（加水平筋和 H-V 立体筋）状态下的计算结果进行对比。

表 2 算例参数

Table 2 Parameters of examples

编 号	黏聚力 c /kPa	重度 γ /(kN·m ⁻³)	内摩擦角 φ /(°)	地基系数 m /(kN·m ⁻³)
1	10	18	20	100
2	10	18	22	100
3	10	18	24	100
4	10	18	26	100
5	5	20	30	200
6	10	20	30	200
7	15	20	30	200
8	20	20	30	200

根据以往文献资料表明，当边坡为单一地层且不考虑加固措施时，通过最小势能法计算边坡稳定性系数过程中可将地基系数 m 约去^[8]，即单一均质边坡稳定性不受地基系数的影响。因为极限平衡法分析边坡稳定性参数中没有地基系数 m ，为避免地基系数测试结果取值误差产生干扰，以及为后文验证 H-V 立体筋对提高边坡稳定性的作用，设置表 3 进行改进最小势能法和极限平衡法无筋边坡计算结果对比。

从表 3 计算结果可知，其他参数保持不变，设置两组对比方式，A 组内摩擦角 φ 逐渐增大，B 组黏聚力 c 逐渐增大，从计算结果可以看出无筋边坡利用改

进最小势能法与极限平衡法计算结果相对误差保持在 10% 范围以内，证明本文分析计算边坡稳定性的方法是合理可行的，且改进最小势能法计算结果偏大于 Janbu 法，偏小于 Bishop 法。

表 3 无筋边坡算例计算结果对比

Table 3 Comparison of calculated results of examples of unreinforced slopes

对比 分组	表 2 编号	改进最小 势能法	极限平衡法		备注
			Bishop	Janbu	
A	1	1.178	1.117	1.098	φ 渐增
	2	1.180	1.144	1.137	
	3	1.182	1.179	1.160	
	4	1.184	1.207	1.192	
B	5	1.117	1.242	1.231	c 渐增
	6	1.238	1.337	1.329	
	7	1.344	1.415	1.411	
	8	1.594	1.588	1.584	

表 4 加筋边坡算例计算结果对比

Table 4 Comparison of calculated results of examples of reinforced slope

对 比 分 组	表 2 编 号	改进最小 势能法		极限平衡法		备注	
		水 平 筋	H-V 筋	水 平 筋	H-V 筋		
				Bishop	Janbu		
C	1	1.563	1.749	1.585	1.735	1.723	
	2	1.565	1.761	1.613	1.762	1.758	
	3	1.567	1.784	1.645	1.791	1.782	
	4	1.570	1.792	1.678	1.830	1.804	
D	5	1.630	1.919	1.646	1.927	1.627	
	6	1.824	2.078	1.844	2.105	1.815	
	7	1.879	2.125	1.902	2.173	1.880	
	8	1.979	2.221	2.020	2.250	1.972	

由表 4 可看出：①改进最小势能法计算结果跟极限平衡法对比，施加水平筋相对误差小于 4.7%，施加立体筋相对误差小于 2.2%，证明改进最小势能法与极限平衡方法的计算结果具有很好的一致性。②加筋边坡的安全系数均随土体强度指标的增加呈现递增的趋势，其他参数保持不变，对照组 C 内摩擦角 φ 逐渐增大，对照组 D 黏聚力 c 逐渐增大，分析数值变化规律可知时 D 组加筋边坡安全系数值变化更大，可知黏聚力 c 对边坡稳定性影响较大。③综合表 3, 4 计算结果还可分析得出，对比无筋边坡，施加水平筋边坡的安全系数提高 33.4%，对比施加水平筋，施加立体筋边坡的安全系数提高 16.5%，说明施加立体筋在提高边坡稳定性方面的效果更显著。在不同的条件下，采用改进最小势能法的计算结果对比极限平衡法（Bishop 法和 Janbu 法）还存在微小差异，主要因为本文的计算方法与极限平衡法采用的计算模型不一样，且对安全系数的定义和计算仍存在差异性。

6 结 论

本文在改进最小势能边坡稳定性分析基础上，提

出 H-V 立体筋边坡稳定性分析新方法, 并通过算例验证该方法的有效性和合理性, 得出以下两点结论。

(1) 本文基于改进的最小势能算法, 考虑水平筋的摩擦势能、线弹性应变能以及竖筋变形势能的影响, 进一步分析了加筋边坡的剪切势能, 并将其表示为弹性势能的函数, 简化了计算过程。通过计算边坡最危险滑裂面沿虚位移方向静力平衡方程, 得到适用于施加水平筋和 H-V 立体筋的边坡稳定性分析方法。

(2) 利用改进最小势能法求解文献算例, 将其计算结果与极限平衡法 (Bishop 法和 Janbu 法) 的计算的结果相比较, 相对误差在 10% 以内, 表明本文分析方法是可行且合理的。相比施加水平筋, 施加立体筋时边坡安全系数提高了 14%, 说明 H-V 立体筋在提高边坡稳定性方面效果显著。

参考文献:

- [1] VIDAL H. The principles of reinforced earth[J]. Highway Research Record. 1969, **28**(2): 1 - 16.
- [2] SONG Fei, CHEN Ru-yi, MA Li-qiu, et al. A new method for the stability analysis of geosynthetic-reinforced slopes[J]. Journal of Mountain Science, 2016, **13**(11): 2069 - 2078.
- [3] DIPANKANA Bhattacherjee, VISWANADHAM B V S. Effect of geocomposite layers on slope stability under rainfall condition[J]. Indian Geotechnical Journal, 2018, **48**(2): 316 - 326.
- [4] EVİRGİN Burak, TUNCAN Mustafa, TUNCAN Ahmet. Modelling study on the geotextile, geogrid and steel strip reinforced slopes[J]. Çukurova Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi, 2017: 227 - 240.
- [5] 张孟喜. 立体加筋土: ZL200520043841.7[P]. 2009-09. (ZHANG Meng-xi. Three-dimensional reinforced soil: ZL200520043841.7[P]. 2009-09. (in Chinese))
- [6] 张孟喜, 张石磊. H-V 加筋土性状的颗粒流细观模拟[J]. 岩土工程学报, 2008, **30**(5): 626 - 631. (ZHANG Meng-xi, ZHANG Shi-lei. Meso-simulation of particle flow characteristics of H-V reinforced soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, **30**(5): 626 - 631. (in Chinese))
- [7] SONG Fei, CHEN Ru-yi, MA Li-qiu, et al. A new method for the stability analysis of geosynthetic-reinforced slopes[J]. Journal of Mountain Science, 2016, **13**(11): 2069 - 2078.
- [8] 孙加平. 改进最小势能边坡稳定性分析方法及程序开发[D]. 南昌: 江西理工大学, 2016. (SUN Jia-ping. Analysis Method and Procedure Developing of Slope Stability Based on Improved Minimum Potential Energy[D]. Nanchang: Jiangxi University of Technology, 2016. (in Chinese))
- [9] SONG Fei, CHEN Ru-yi. Stability analysis of reinforced slope based on limit equilibrium method[J]. Tehnicki Vjesnick-Technical Gazette, 2018, **25**(1): 224 - 229.
- [10] 邹治来. 土工格栅加筋边坡的最小势能稳定性分析方法程序开发[D]. 南昌: 江西理工大学, 2019. (ZOU Ye-lai. Analysis Method and Program Development of Minimum Potential Energy Stability of Geogrid-Reinforced Slope[D]. Nanchang: Jiangxi University of Science and Technology, 2019. (in Chinese))
- [11] 李 铖, 陆 洋. 锚杆(索)加固边坡的最小势能稳定分析方法研究[J]. 岩土力学, 2008, **29**(9): 2330 - 2334. (LI You, LU Yang. Research on stability analysis method of minimum potential energy of slope reinforced by anchor (cable)[J]. Rock and Soil Mechanics: 2008, **29**(9): 2330 - 2334. (in Chinese))
- [12] 孙加平, 顾厚煜. 锚杆作用下边坡稳定性分析中改进最小势能法研究[J]. 岩土力学, 2017, **38**(1): 292 - 298. (SUN Jia-ping, GU Hou-yu. An improved minimum potential energy method for slope stability analysis under the action of bolt[J]. Rock and Soil Mechanics, 2017, **38**(1): 292 - 298. (in Chinese))
- [13] 温树杰, 宋亮亮, 梁 超, 等. 考虑桩体变形的最小势能边坡稳定性分析方法[J]. 工业建筑, 2017, **47**(6): 90 - 94. (WEN Shu-jie, SONG Liang-liang, LIANG Chao, et al. Analysis method of slope stability with minimum potential energy considering pile deformation[J]. Industrial Construction, 2017, **47**(6): 90 - 94. (in Chinese))
- [14] 张孟喜, 张石磊. H-V 加筋路堤稳定性分析及机理研究[D]. 上海: 上海大学, 2010. (ZHANG Meng-xi, ZHANG Shi-lei. The Investigation on Stability and Mechanism of Embankment Reinforced with H-V inclusions[D]. Shanghai: Shanghai University: 2010. (in Chinese))
- [15] 马学宁, 吴培元, 王 旭, 等. 加筋土边坡稳定性分析水平条分简化计算方法[J]. 铁道学报, 2017, **39**(9): 156 - 160. (MA Xue-ning, WU Pei-yuan, WANG Xu, et al. Simplified calculation methods of the horizontal slice for the stability analysis of reinforced soil slope[J]. Journal of the China Railway Society, 2017, **39**(9): 156 - 160. (in Chinese))
- [16] 刘 动, 陈晓平, 常学宁. 基于筋-土界面摩擦特性的加筋边坡分析[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(增刊 2): 217 - 223. (LIU Dong, CHEN Xiao-ping, CHANG Xue-ning. Analysis of reinforced slope based on interface properties of geosynthetics and soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(S2): 217 - 223. (in Chinese))