

DOI: 10.11779/CJGE202103016

# 隧道支护结构体系协同优化设计方法及其应用

孙振宇, 张顶立\*, 房倩, 侯艳娟

(北京交通大学城市地下工程教育部重点实验室, 北京 100044)

**摘要:** 隧道支护结构体系的设计方法是隧道围岩稳定性控制的基本需求, 如何确定合理的支护参数是保证隧道施工安全的关键问题。为此, 首先将协同学原理引入隧道支护设计, 构建了隧道围岩协同支护系统, 阐明了其系统组成、研究层次及表征参数; 隧道围岩协同支护的核心为充分发挥支护—围岩系统、构件和要素的工作性能, 从而产生协同增强效应, 其特点为时机衔接、刚度匹配和变形协调, 而其目的则是以最小的支护代价实现围岩稳定, 本质上为多目标优化问题; 进一步以围岩变形、支护受力和支护成本为设计目标, 建立了基于分组加权的目标函数隶属度表征方法, 据此提出了隧道支护体系多目标协同优化设计方法。将该方法在新建京张高铁八达岭长城站大跨过渡段进行应用, 较之优化前支护性能利用率更高, 设计更为合理, 为隧道支护结构体系的优化设计提供了一种思路。

**关键词:** 隧道工程; 支护设计; 协同作用; 多目标优化; 分组加权; 隶属度表征

中图分类号: U451

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2021)03-0530-10

**作者简介:** 孙振宇(1993—), 男, 博士, 讲师, 主要从事隧道及地下工程方向的研究工作。E-mail: 15115278@bjtu.edu.cn。

## Synergistic optimization design method for tunnel support structure system and its application

SUN Zhen-yu, ZHANG Ding-li, FANG Qian, HOU Yan-juan

(Key Laboratory for Urban Underground Engineering of Ministry of Education, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract:** The design method for tunnel support structure system is the basic requirement of stability control of surrounding rock of tunnels. How to determine the reasonable support parameters is the key to ensure the safety of tunnel construction. Therefore, the synergetic principle is introduced to the design of tunnel support, and the synergetic support system of surrounding rock of tunnels is established, and the system composition, research level and characterization parameters are expounded. The core of the synergetic support is to give full play of the performance of the support system, structures and elements, thus resulting in a synergistic enhancement effect. Its characteristics of timely linking, stiffness matching and deformation coordination are revealed. The purpose of synergetic design of the support system is to achieve the stability of surrounding rock with the minimum support cost, which is essentially a multi-objective optimization problem. Furthermore, taking the deformation of surrounding rock, supporting force and support cost as the design objectives, a method for membership representation of objective function based on grouping weighting is established, thus a multi-objective synergetic optimization design method for tunnel support system is proposed. The method is applied in the large-span transition section of the new Badaling Great Wall station of Beijing-Zhangjiakou high-speed railway. After optimization, the supporting performance is more efficient, and the design is more reasonable than the original design scheme, which provides an idea for the optimal design of the support structure system.

**Key words:** tunnel engineering; support design; synergistic effect; multi-objective optimization; grouping weighting; membership representation

## 0 引言

中国幅员辽阔, 地质条件复杂多样, 在复杂地层条件下, 隧道支护体系的可靠设计是保证隧道安全施工的重要前提。目前对于支护结构的设计多依赖于工程经验, 缺乏必要的理论支撑, 而工程案例数量的有限性、工程条件的局限性以及工程经验的可靠性都将

使得经验设计方法受到极大限制<sup>[1]</sup>。因此, 对支护设计理论的研究极为必要, 不仅能为隧道安全施工提供

**基金项目:** 中央高校基本科研业务费专项资金项目(2021RC202); 国家自然科学基金项目(51738002); 国家重点研发计划项目(2017YFC0805401)

收稿日期: 2020-06-09

指导,也为隧道运营期间支护结构的有效运作提供科学依据。

目前工程中常用的隧道支护设计方法包括经验设计法、理论分析法以及现场监测法等3种<sup>[2]</sup>。经验设计法即根据以往工程经验,提供一套系统的设计建议和干预方案,该方法往往基于对岩土体的地质力学特性进行分级,因此围岩分级方法得以广泛使用<sup>[3-5]</sup>。理论分析法是指通过解析或数值方法,获取围岩和支护结构的应力应变状态,进而对隧道安全性进行评价,并设计必要的支护结构来维持隧道稳定<sup>[6-8]</sup>。现场监测法即通过在项目规划、设计和施工中的监测数据及时反馈修正设计方案<sup>[9]</sup>。以上3种设计方法均能为隧道设计提供有利信息,并在一定程度上支撑了隧道支护设计理论的发展。但当前研究表明<sup>[10]</sup>,隧道支护结构体系各子构件之间存在相互作用关系,当其协同工作时可使得支护效率最高,而目前的隧道设计方法均未考虑支护体系之间的协同效应。

在隧道设计中,工程安全性和经济性往往相互矛盾,而支护体系的协同设计目标在于以最小的支护代价实现最佳的围岩稳定性控制效果,本质上为多目标优化问题。但目前对于隧道支护体系的协同效应尚无系统完整的认识,对于支护结构体系的多目标优化方法亦处于探索阶段,因此也给支护设计的量化带来困难。

本文首先构建隧道围岩协同支护系统,阐明隧道支护体系协同作用构成、研究层次及其表征参数,建立基于加权表征的多目标问题隶属度转化方法,由此提出隧道支护体系协同设计原则与方法,并将该方法应用于新建京张高铁八达岭长城站大跨过渡段,可为隧道支护结构体系的协同优化提供一种思路。

## 1 隧道围岩协同支护系统

### 1.1 协同支护系统的构成与层次

所谓协同,指的是多个不同的资源或个体,协调一致地完成某一目标的过程或能力<sup>[11]</sup>。就隧道围岩安全性而言,协同支护的目标在于以最小的支护代价实现最佳的围岩稳定性控制效果。因此,隧道围岩协同支护是以围岩工程响应和支护作用机理为基础,以协同学的基本原理和方法为指导,研究隧道围岩稳定性控制过程中支护—围岩系统的协同作用及其演化机制。在此过程中以围岩变形控制为核心,通过支护系统的合理设计和优化实现隧道支护—围岩系统的协同作用,充分发挥支护和围岩的力学性能,使系统功能在宏观整体上大于各子系统之和,即产生“1+1>2”的协同支护效应,从而降低隧道围岩失稳和结构失效

概率,保证隧道全寿命周期的正常使用功能。这是协同支护与组合支护或联合支护的本质区别所在<sup>[12]</sup>。

隧道支护体系的协同作用包括支护结构与围岩的协同、不同支护形式之间的协同以及支护结构各要素的协同等3个层面,如图1所示。

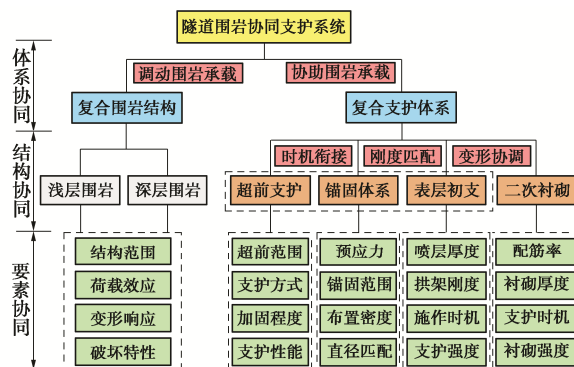


图1 隧道围岩协同支护系统的基本组成

Fig. 1 Basic composition of synergistic support system in surrounding rock of tunnels

隧道围岩协同支护系统由支护系统与围岩系统两大子系统组成,二者之间的体系协同即隧道支护—围岩动态作用关系,由此可确定隧道围岩变形控制标准,是隧道支护设计的基本前提。超前支护和初期支护为支护系统的下一级子系统,其中初期支护按其承载机制又划分为锚固体系和表层初支<sup>[10]</sup>,通过各自目标的实现促使围岩尽快达到稳定,而二次衬砌则保障围岩长期安全。不同支护之间的结构协同使得子系统的功能发挥至最佳,是支护设计的重要依据。各支护构件的承载性能由多个要素决定,不同要素之间存在着必然的内在联系,而要素协同则能最大程度地发挥构件性能,是隧道支护体系协同优化的核心内容。

### 1.2 协同支护研究内容与表征参数

根据隧道施工过程原理,不同支护构件先后施作并与围岩相互作用,最终形成隧道支护体系。当协同支护得以实现时,整个支护系统内部形成一种分工明确、协调配合、联动互补的动态平衡状态。因此,结合隧道支护的本质作用特性,协同支护系统特征表现为支护时机衔接、刚度匹配以及变形协调,其中前两者为协同支护的工作方式,后者为工作状态。即以支护时机的衔接和支护刚度的匹配为基础,以现场施工质量为保障,从而达到支护—围岩系统的变形协调,实现协同支护效应。

在协同支护系统中,围岩条件客观存在,支护体系为工作方法,可供选择的范围较大,是协同支护的控制性因素,也是本文研究的重点内容。从隧道支护—围岩作用机制出发,协同支护主要研究3个方面的内容:一是以围岩为主体研究对象,研究围岩系统在

支护作用下的力学响应;二是以支护体系为研究对象,研究各支护构件之间的相互作用对于支护体系工作性能的影响机制;三是以支护—围岩系统为研究对象,研究系统的协同作用机理、状态及其影响因素。

隧道支护—围岩作用过程中,围岩稳定性的表征参数为“围岩变形”<sup>[1]</sup>,而促使围岩由开挖后的不稳定结构迅速变成整体稳定结构的内驱力则是“支护阻力”。可见,“围岩变形”和“支护阻力”贯穿于隧道工程活动的始终,是研究协同支护的标志性参数。

## 2 协同优化基本原理

隧道支护体系协同优化的本质上是非线性多目标优化问题。在最优化问题中,对于具有  $m$  个目标、 $n$  个设计变量的多目标优化问题可表示为如下数学模型:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= [f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)] \\ \text{s.t. } g_j(x) &\leq 0, j=1, 2, \dots, f \\ h_k(x) &= 0, k=1, 2, \dots, g \end{aligned} \quad (1)$$

式中,  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ ,  $x$  为设计变量,  $R^n$  为设计变量  $x$  所张成的决策空间,  $f_i(x): R^n \rightarrow R$  表示第  $k$  个目标函数,  $f(x)$  为目标函数所张成的准则空间;  $g_j(x)$  和  $h_k(x)$  分别表示第  $j$  个不等式约束条件和第  $k$  个等式约束条件,  $f$  和  $g$  为两种约束条件个数,这两种约束条件即构成了可行域。

定义  $\Omega = \{x \in R^n | g(x) \leq 0, h(x) = 0\}$  为变量可行域,  $I = \{z \in R^m | z = f(x), x \in \Omega\}$  为目标可行域,则根据目标函数的概念,  $I$  为  $\Omega$  通过空间变换  $H: R^n \rightarrow R^m$  所成的像,如图2所示。

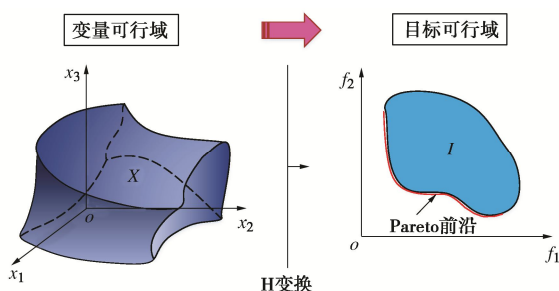


图2 多目标优化基本原理

Fig.2 Basic principle of multi-objective optimization

在多目标优化设计中,对其中某一目标进行优化时必将牺牲其他目标为代价,对于总体目标存在多个最优折中解,又称为 Pareto 最优解。判断向量  $x^* \in \Omega$  为 Pareto 最优解的依据为不存在  $x \in \Omega$  使得  $f(x) < f(x^*)$ 。

由于准则空间  $I$  是部分有序的,若想从所有可行解中找出最满意的解答,则需补充额外的判定条件。一般采用  $l_p$  度量方法(又称明氏距离)来衡量不同空

间点及其与参考点  $f^{id}$  之间的距离,其表达式为<sup>[13]</sup>

$$d_p(z, y) = \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^m |z_i - y_i|^p \right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \max_{i=1, 2, \dots, m} |z_i - y_i| & (p = \infty) \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $z$  和  $y$  为准则空间内两个不同的点,  $z_i$  和  $y_i$  分别为不同设计变量取值。

参考点  $f^{id}$  此处取为绝对最优解,即

$$z^{id} = \left\{ \min_{x \in \Omega} f_1(x) \quad \min_{x \in \Omega} f_2(x) \quad \dots \quad \min_{x \in \Omega} f_m(x) \right\} \quad (3)$$

显然,  $f^{id}$  可通过对  $m$  个单目标问题进行求解得到,如此则可将最优化问题转化为寻找准则空间内与参考点距离最小的可行解,即

$$\min_{z \in I} d_p(f, f^{id}) \quad (4)$$

## 3 基于分组加权的目標函数隶属度转化方法

### 3.1 目标函数的分组加权法

在传统的多目标优化过程中,往往会事先对各目标进行重要性评估,进而对各目标赋予相应权重,采用线性加权法简化计算,则多目标优化问题可写为<sup>[14]</sup>

$$\min_{x \in I} \rho_p(f, \omega, v) = \begin{cases} \min_{f \in I} \left[ \sum_{i=1}^m (\omega_i |f_i - f_i^{id}|)^p \right]^{1/p} & (1 \leq p < \infty), \\ \min_{f \in I} \max_{i=1, 2, \dots, m} \omega_i |f_i - v_i| & (p = \infty), \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $v$  为设计者自主决定的限值,  $\omega$  为权重向量,

$\omega = \{\omega_1 \quad \omega_2 \quad \dots \quad \omega_m\}$  且  $\sum_{i=1}^m \omega_i = 1$ 。

对于高维度多目标优化方法,传统 Pareto 支配关系对最优解的选择压力衰减严重,计算结果的收敛性和多样性亦难以同时保证,从而给决策方案的制定带来困难<sup>[15-16]</sup>。在工程中一般需要采取目标降维方法再行计算。为此,本文将传统线性加权方法进一步拓展,提出分组加权法的思路,即将原始目标按照主要矛盾进行分组,从而使得组内目标重要性程度基本相当,而组间目标矛盾突出,进一步将各组重要性进行排序并依次求解。据此可将  $m$  维多目标问题降为  $k$  维,即

$$\min_{x \in \Omega} f_k(x) = \min_{x \in \Omega} \left\{ \sum_{i=r_0+1}^{r_1} \lambda_i f_i(x) \quad \sum_{i=r_1+1}^{r_2} \lambda_i f_i(x) \quad \dots \quad \sum_{i=r_{k-1}+1}^{r_k} \lambda_i f_i(x) \right\}, \quad (6)$$

式中,显然有  $r_0 = 0$  且  $r_k = m$ 。对于多目标系统决策,要求目标权向量满足  $\sum_{i=r_{\alpha-1}+1}^{r_\alpha} \lambda_i = 1, \alpha = 1, 2, \dots, k$ 。

现说明降维前后多目标问题解的关系,以  $P_m$  和  $P_k(\lambda^k)$  分别表示降维前后多目标问题  $P_m$  和  $P_k$  的解,  $\lambda^k = \{\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_{r_1} : \lambda_{r_1+1} \quad \dots \quad \lambda_{r_2} : \lambda_{r_2+1} \quad \dots \quad \lambda_{r_k}\}$ , 令  $x^* \in P_k(\lambda^k)$ , 则有



$$\sum_{i=\alpha-1+1}^{r_\alpha} \lambda_i f_i(\mathbf{x}^*) \leq \sum_{i=\alpha-1+1}^{r_\alpha} \lambda_i f_i(\mathbf{x}) \quad (\alpha=1,2,\dots,k) \quad (7)$$

若存在  $\mathbf{x} \in \Omega$  使得

$$f_i(\mathbf{x}) \leq f_i(\mathbf{x}^*) \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (8)$$

则式(8)中不等式必然取等号, 否则将与式(7)矛盾, 这便意味着  $\mathbf{x}^* \in P_m$ , 如此则有  $P_k(\lambda_k) \subset P_m$ , 即问题  $P_k$  的解必然是  $P_m$  的解。但由于降维后的问题得到了仅是原始问题的子集, 为了得到满足决策者需求的最优解, 权重向量  $\lambda^k$  的确定就显得尤为重要。事实上, 对于多目标凸规划问题, 存在  $\bigcup_k P_k(\lambda^k) = P_m$ , 这与传统线性加权法的结论是一致的。以三目标规划问题为例, 图解说明本文分组加权法的优势, 如图3所示。假定可行解集形状规则, 图中  $M$  表示该问题的 Pareto 前沿, 其角点对应于各目标达到最小值。

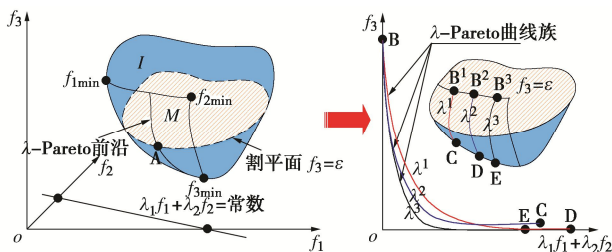


图3 三目标分组加权法的几何解释

Fig. 3 Geometric interpretation of three-objective grouping weighting method

将前两个目标进行线性组合, 并定义半空间  $S_H = \{\mathbf{f} \in R^3 | f_3 \leq \varepsilon\}$ , 则可将该问题简化为

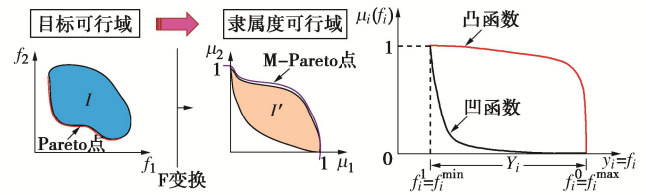
$$\min_{\mathbf{f} \in I \cap S_H} \{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2\} = \min_{\mathbf{f} \in I \cap S_H} \{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2\} \quad (9)$$

式(9)为线性函数, 其最小值即为该问题解答。若以约束值  $\varepsilon$  为变量可得到完整的  $\lambda$ -Pareto 前沿曲线, 而对于确定的权重向量则可得到最优解, 即图3中点  $A$ 。相应地, 改变权重向量即可得到  $\lambda$ -Pareto 曲线族, 从而覆盖整个  $M$  区域。可见, 经过降维处理后计算过程得到极大简化, 且计算结果更为简洁, 决策者可通过直观图解法来寻求最优解, 决策过程更为清晰。

### 3.2 目标可行域的隶属度转化

考虑到决策者其对于各目标函数往往存在一定期望值, 为此, 本节提出基于目标函数分组加权的隶属度转化方法。令  $\mu_i(f_i)$  为第  $i$  个降维后目标函数的隶属度值, 其取值区间为  $[0, 1]$  且越趋近于 1 表明该目标对应解满意程度越高。当降维后的  $k$  个隶属度关系确定时, 目标可行域可通过空间变换  $F: I \subset R^k \rightarrow R^k$  映射至隶属度可行域, 如图4所示, 则  $I$  通过  $F$  形成的像为  $I' = \{[\mu_1(f_1), \mu_2(f_2), \dots, \mu_k(f_k)] | \mathbf{f} \in I\}$ 。隶属度关系的确定原则为, 若对某一目标函数严格要求, 则

相应的隶属关系为凸函数, 而对于相对宽松的目标则对应凹形隶属度函数, 见图4(b)。



(a) 目标可行域的隶属度转换 (b) 隶属度函数的凹凸性

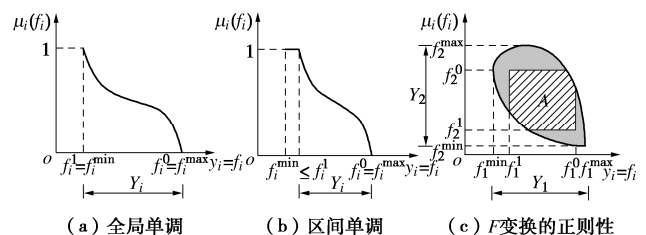
图4 多目标优化问题的隶属度表征方式

Fig. 4 Membership representation of multi-objective optimization problem

显然, 根据决策者的偏好要求, 隶属度关系的选取也势必导致最终决策方案的差异。当某一目标函数的最小值  $f_i^{\min}$  和最大值  $f_i^{\max}$  确定时, 通过隶属度关系即可得到相应的隶属度值, 进而通过明氏距离可对最优解的优劣性进行判断, 即

$$d_p(\mu, \bar{\mu}) = \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^m |\mu_i - \bar{\mu}_i|^p \right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \max_{i=1,2,\dots,m} |\mu_i - \bar{\mu}_i| & (p = \infty) \end{cases} \quad (10)$$

将通过隶属度转换后的最优解称为 M-Pareto 解, 为了明确 M-Pareto 解与 Pareto 解的关系, 以双目标优化问题为例, 考虑如下两种情况: ①各隶属度函数在区间  $Y_i = [f_i^{\min}, f_i^{\max}]$  严格单调递减; ②至少有一个隶属度函数仅在子区间  $[f_i^1, f_i^0]$  内单调递减, 而在其他区间内为常数, 如图5所示。



(a) 全局单调 (b) 区间单调 (c) F变换的正则性

图5 隶属度函数的单调性及其影响

Fig. 5 Monotonicity of membership function and its influence

对于第一类问题, 各隶属度函数在整个区间内均可逆, 变换  $F$  的雅克比行列式处处不为零, 因而  $F$  及其逆  $F^{-1}$  均为正则变换, 此时位于可行域  $I$  前沿上的点通过  $F$  变换形成的像也位于  $I'$  前沿上, 即各 Pareto 点必然是 M-Pareto 点。同理, 由隶属度函数的单调性可知, 若某点  $P = [f_1(\mathbf{x}_1), f_2(\mathbf{x}_1)]$  位于  $I$  的边界上但非 Pareto 解, 则  $\mathbf{x}_1$  也不是 M-Pareto 解。由于  $F$  与  $F^{-1}$  均为正则变换, 因此  $I$  与  $I'$  为同构空间, 可见目标函数的隶属度变换将不会影响最优解的搜索范围。而对于第二类问题, 各隶属度函数仅在子区间  $[f_i^1, f_i^0] \subset Y_i$  内可逆, 因此  $F$  仅在子集  $A \subset I$  内为正则变换, 而  $F$  的以上属性也仅在子空间  $A$  内成立, 见图5(c)。

### 3.3 决策唯一性及其影响因素

由于隶属度函数的引入,优化过程无疑将增加一个环节,决策结果的唯一性也将受到度量方式、参考点、目标函数以及隶属度函数等四个因素的综合影响<sup>[17]</sup>,以下将分别进行分析。

#### (1) 度量方法的影响

假定各目标均为单叶函数,则采用 $l_\infty$ 度量方式时总能找到唯一的最优解,如图6(a)所示。事实上,无论参考点 $\bar{\mu}$ 取何值,过参考点且倾角为 $45^\circ$ 的直线 $r$ 与M-Pareto前沿总存在唯一交点 $S$ 即为最优解。而采取其他度量方式时解的唯一性将无法保证,见图6(b),当 $p=1$ 时点 $A$ 和点 $B$ 距参考点距离相同,但均非折中解答,而当 $p=2$ 时各M-Pareto点均有可能为最优解。由此可见,度量方法的选取应与目标函数相适应,否则将无法得到满意的最优解。

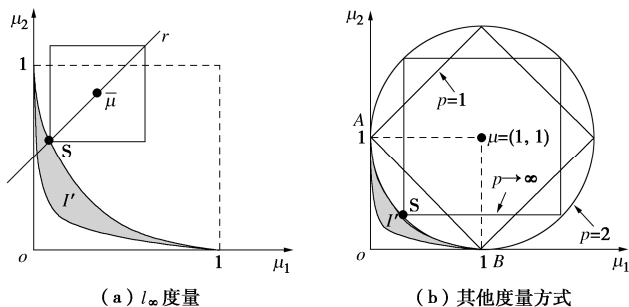


图6 采用不同度量方式时 M-Pareto 解的唯一性特点

Fig. 6 Uniqueness of M-Pareto solution with different measures

#### (2) 参考点的影响

当目标函数存在局部极小值时,若 $\bar{\mu}$ 取值较为随意,则可能出现局部 M-Pareto 最优解被其他可行解占优的情况,如图7(a)所示。

当参考点为 $\bar{\mu}_1$ 时,点 $S$ 为局部 M-Pareto 点,但无论从哪个目标函数看,点 $R$ 和点 $T$ 都占优于点 $S$ 。而当参考点中仅有一个分量不为1时,至多仅有两个点 $C$ 和 $D$ 同时满足要求,且 $C$ 为 M-Pareto 点,而一般而言仅能找到一个距其最近的点且必然为 M-Pareto 解,如图7(b)所示。因此,当至少有一个目标函数出现局部极小值时,为了保证 M-Pareto 解的满意度,参考点 $\bar{\mu}$ 应至多仅有一个分量 $\bar{\mu}_i$ 不为1。

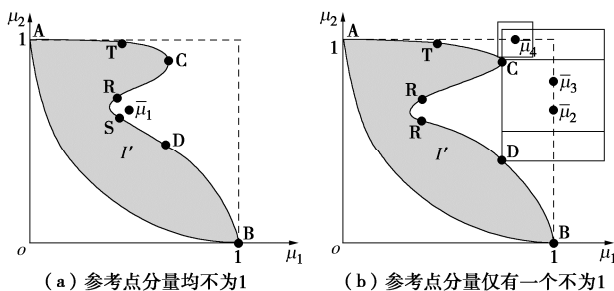


图7 参考点的选取对最优解唯一性的影响

Fig. 7 Influences of selection of reference points on uniqueness of optimal solution

#### (3) 目标函数的影响

当目标函数在某个区间内 $[x_1, x_2)$ 为常数时,由于 $F$ 的正则性,该区间在隶属度空间内的像也为常数,则该段不存在 M-Pareto 点,当 M-Pareto 前沿曲线关于某一目标函数为常数且参考点在该方向分量为1时,其他方向将存在无穷种可能使得 $l_\infty$ 度量与该段重合,而相应的解答也可取为 $[x_1, x_2)$ 区间内的任一点。

#### (4) 隶属度函数的影响

假定目标函数单叶,令 $f_2^0 < f_2^{\max}$ ,则隶属度函数 $\mu_2$ 非严格单调函数。集合 $C$ 的各竖条微元映射至隶属度空间内的像为单一点,如图8所示, $P_1P_2$ 段通过 $F$ 变换在隶属度空间内形成的像为点 $P'$ , $(A',C']$ 段为 $I$ 中各垂直段包含 Pareto 前沿的映射。

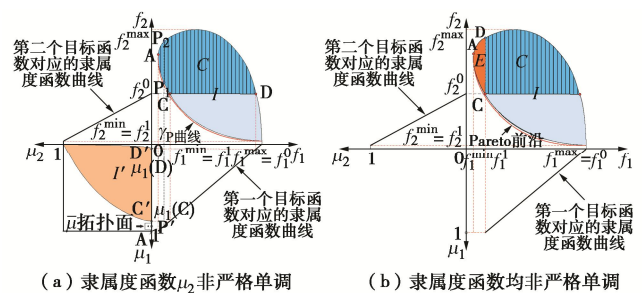


图8 隶属度函数的选择对最优解唯一性的影响

Fig. 8 Influences of choice of membership function on uniqueness of optimal solution

当参考点 $\bar{\mu}$ 确定时, $\bar{\mu}$ 拓扑面与 $(A',C']$ 段将存在无数交点,则无法确定最优解。如 $f_2^0 < f_2^{\max}$ 时解 $x$ 的相关结果完全不满足决策需求,此时决策者倾向于得到其他目标函数的高满意度解答,如此则将以牺牲 $f_2$ 为代价。鉴于目标函数 $f_2$ 的上述判断结果,导致大量解答关于 $f_2$ 的满意度极低,且无法判定其优劣性。而当 $f_1^1 > f_1^{\min}$ 时,二维子集 $E$ 在隶属度空间内的像为同一点,如此则在存在无穷解,如图8(b)所示。

## 4 隧道支护体系协同设计流程及原则

隧道支护体系基本功能为控制围岩稳定,故以围岩变形、支护受力以及支护成本为目标,建立支护体系优化设计方法,而支护受力又包括不同支护构件所承担荷载,因此为高维多目标优化问题。考虑到不同支护结构的受力具有目标一致性,可将其按一定规律组合后构建新的目标函数,由此实现目标降维。根据前文提出的基于分组加权的目標函数隶属度转化方法,确定隧道支护设计的最优化设计流程如图9所示。

(1) 多目标优化模型的建立。首先明确隧道设计多目标优化要素,构建多目标优化模型。在此阶段,应尽量保证所建立目标函数的先进性,这也是保证隧道最终设计方案科学性和合理性的关键。事实上,目

前的工程实践往往落后于理论发展水平, 如二次衬砌作为安全储备的设计理念已提出 30 余年, 而具体如何正确实现则在近年才得到诠释<sup>[10, 18]</sup>; 无独有偶, 岩爆防控理论也比其在矿山与隧道工程中的应用早 10 余年<sup>[19]</sup>。因此, 科学的设计方案应基于先进的设计理论, 创建现有先进技术与工程实践的桥梁。

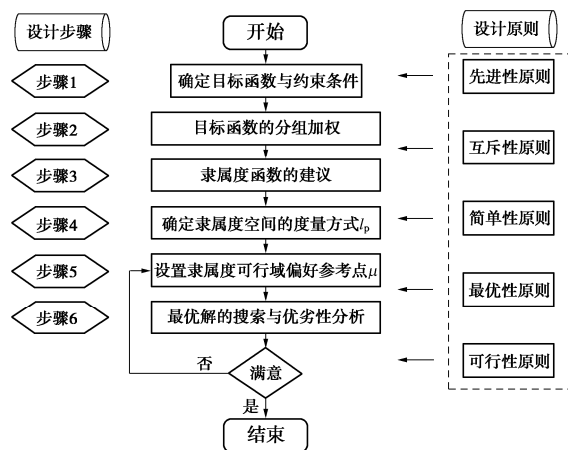


图 9 多目标协同优化设计流程

Fig. 9 Multi-objective synergistic optimization design process

(2) 目标函数的分组加权。基于主要矛盾对目标函数进行分组, 根据组内各目标的重要程度及属性差异赋予相应权重, 从而构建新的多目标问题  $P_k$ , 并将目标函数组按决策偏好进行排序。此外, 在分组时可以单一准则(如工程成本)作为独立组别, 而当  $k=1$  时则对应传统的线性加权法。此步骤为多目标优化问题降维处理的核心, 需满足互斥性原则, 而其关键则在于各目标权重的准确确定。

(3) 隶属度函数的建立。以降维后的多目标问题  $P_k$  为基础, 根据设计者的需求选择相应的隶属度函数, 构建隶属度空间, 从而将目标函数转换为无量纲的隶属度值, 便于决策者进行比较和判断。为保证计算过程的收敛性, 隶属度函数的选取应遵循简单性原则, 同时应结合前文中决策唯一性影响规律进行确定。

(4) 确定度量方式  $l_p$ 。为了比较各可行解的优劣性, 需采用相应的度量方式。工程中常用曼哈顿距离( $p=1$ )、欧氏距离( $p=2$ )或切比雪夫距离( $p=\infty$ )来进行衡量, 合理的度量方式应根据隶属度空间的属性进行选取, 不仅应保证 M-Pareto 解的多样性, 也应便于决策者选择符合其偏好的满意解。

(5) 设置参考点。参考点为决策者的确定偏好策略, 表征  $k$  维目标的最理想状态, 可使得算法所得解集有效收敛到偏好区域。一般地, 各目标分量可取为 1, 而当各目标之间矛盾较为突出时应适当牺牲次要目标, 如对于围岩条件极差的隧道工程, 隧道安全性为首要目标, 此时可适当降低经济性要求, 即经济性指标分量取小于 1 值。

(6) 最优解的搜索与优劣性分析。对式 (10) 进行求解, 从而得到该多目标问题的最优解, 若所得最优解满足决策者需求且切实可行, 则将其作为最终决策方案, 否则返回步骤 (5) 重新计算。需要指出, 此处的最优性原则不仅指所得解的理论最优性, 还应进一步考虑施工难度, 基于目前施工水平选择最优方案。

5 工程应用

5.1 工程概况

京张高铁是中国《中长期铁路网规划》中“八纵八横”高速铁路网“京兰通道”和“京昆通道”的重要组成部分, 是世界上第一条智能化高速铁路。线路总体呈南东—北西走向, 全长 174 km, 共设 10 个车站。其中八达岭长城站作为全线唯一的地下车站, 最大埋深达 102 m, 是目前中国埋深最大的高速铁路地下车站。长城站两端通过 163 m 的大跨过渡段与正线隧道连通, 其中张家口侧起讫里程为 DK68+285—DK68+448, 最大开挖跨度为 32.7 m, 开挖面积达 494.4 m<sup>2</sup>, 是目前世界上开挖跨度最大的高速铁路隧道, 工程建设风险高, 成为该项目的控制性工程。

本文选取 DK68+285—DK68+305 进行研究, 隧道典型横断面如图 10 所示。隧道主要穿越 3 种典型地层, 其中地表为角砾土; 上部为强风化花岗岩, 岩芯呈短柱状或块状, 一般节长 8~54 mm; 其下部为弱风花岗岩, 岩芯呈长柱状, 一般节长 11~27 cm。隧道穿越一条断层破碎带, 其产状为 236°∠80°, 为一压扭性断裂, 上盘为花岗岩, 下盘为斑状二长花岗岩, 断层带内为压碎岩。将地勘资料转化为 Hoek-Brown 准则参数, 如表 1 所示。表中,  $m_b$ ,  $s$  和  $a$  为岩体材料参数。

表 1 地层物理力学参数

Table 1 Physical and mechanical parameters of ground

地层名称	重度 $\gamma/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-3})$	泊松比 $\mu$	弹性模量 $E/\text{GPa}$	单轴抗压强度 $\sigma_{ci}/\text{MPa}$	$m_b$	$s/10^{-5}$	$a$
角砾土	20	0.30	0.447	20	0.175	1.20	0.561
强风化花岗岩	22	0.30	0.570	23	0.504	1.79	0.550
弱风化花岗岩	25	0.25	0.958	29	0.843	4.54	0.531
断层岩	20	0.30	0.447	20	0.437	1.20	0.561



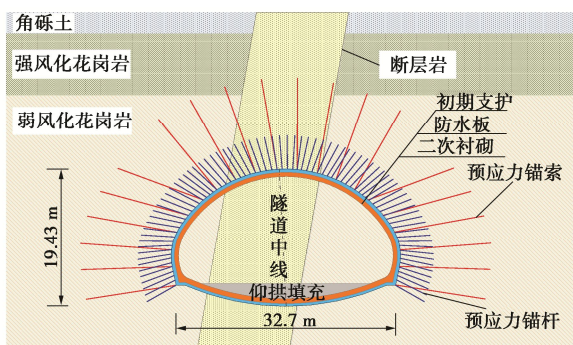


图 10 新八达岭隧道 V 级围岩段典型断面与地层分布

Fig. 10 Typical section and stratigraphic distribution of section of grade V surrounding rock of new Badaling tunnel

隧道拱顶埋深 100 m，围岩级别为 V 级，围岩稳定性差，采用复合式衬砌结构进行设计。超前支护为掌子面玻璃纤维锚杆，由于其最终将被清除，故此处仅对初期支护和二次衬砌进行优化。根据现场施工资料，初期支护封闭成环时距掌子面距离约为 10 m，而二次衬砌支护时机约为 60 m，支护参数如表 2 所示。

表 2 新八达岭隧道支护体系设计参数

Table 2 Design parameters for support of new Badaling tunnel

支护形式	支护参数
锚杆	直径 $d_b=32$ mm，长 $L_b=11$ m，间距 $S_{cb}=1.2$ m，排距 $S_{bb}=0.8$ m，预应力 $F_{sb}=100$ kN
锚索	7 $\Phi$ 15.2 mm 钢绞线，长 $L_c=25$ m，间距 $S_{cc}=\text{排距}$ $S_{lc}=2.4$ m，预应力 $F_{sc}=1000$ kN
喷射混凝土	C30 喷射混凝土，厚度 $t_1=35$ cm，弹性模量 $E_1=25$ GPa
钢架	4 $\Phi$ 22 钢格栅，间距为 $S_s=0.8$ m/幅，等效弹性模量 $E_s=2.66$ GPa
二次衬砌	C35 现场模筑混凝土，厚度 $t_2=60$ cm，弹性模量 $E_2=30$ GPa

5.2 多目标优化要素

考虑到在对支护参数进行优化时隧道往往已开始施工，为使得本文计算结果更具有可操作性，对支护形式中的易变更参数进行优化，具体如表 3 所示。

表 3 待优化支护参数

Table 3 Parameters for support to be optimized

支护形式	锚杆	锚索	喷射混凝土	钢架	二次衬砌
协同优化参数	间距 $S_{cb}$ ， 排距 $S_{bb}$	间距 $S_{cc}$ ， 排距 $S_{lc}$	厚度 $t_1$	间距 $S_s$	厚度 $t_2$

假定锚固构件矩形布置且  $S_c=S_l$ ，研究表明，当锚固构件间距小于 0.5 m 时将会破坏岩体完整性，且工程施工难度较大。此外，Hoek 和 Brown 指出锚杆间距最大值与锚杆长度、节理间距  $J_s$  等因素有关<sup>[20]</sup>。因此，锚杆间距的约束条件为

$$\left. \begin{aligned} 0.5 \text{ m} &\leq S_c \leq S_m, \\ S_c &= 0.5 + 0.1n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ S_m &= \min \{ L/2, (1.5J_s, J_s \geq 0.5 \text{ m}), 2 \text{ m} \}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

对于锚索间距约束条件仍采取上式，而区别在于式 (11) 第 3 式中无 2 m 的限制。根据规范<sup>[21]</sup>，喷射

混凝土厚度的约束条件为

$$5 \text{ cm} \leq t_1 \leq 35 \text{ cm} \quad (12)$$

钢架间距的约束条件为

$$\left. \begin{aligned} 0.5 \text{ m} &\leq S_c \leq 1.5 \text{ m}, \\ S_c &= 0.5 + 0.25n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

二次衬砌通常为现场模筑混凝土，此处考虑为素混凝土，为了施工方便，其约束条件应满足：

$$\left. \begin{aligned} 25 \text{ cm} &\leq t_2 \leq 100 \text{ cm}, \\ t_2 &= 25 + 5n, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

各支护构件成本可表示为

$$\left. \begin{aligned} \text{锚固构件} &\rightarrow c_{b,c} = 2\pi r_0 P_{b,c} L_{b,c} / (S_{cb,c} S_{lb,c}), \\ \text{喷射混凝土} &\rightarrow c_1 = 2\pi r_0 P_1 t_1, \\ \text{钢架} &\rightarrow c_s = 2\pi r_0 \rho P_s A, \\ \text{二次衬砌} &\rightarrow c_2 = 2\pi r_0 P_2 t_2. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中  $P_{b,c}$  为锚固构件每延米的钻孔和支护成本，下标 b 和 c 分别代表锚杆和锚索； $P_1$  为喷射混凝土每方支护成本； $P_s$  为钢架每延米支护成本， $\rho$  为钢筋密度， $A$  为钢架横截面积； $P_2$  为每方混凝土结构的造价， $t_2$  为二次衬砌厚度。

因此，隧道支护成本目标函数可表示为

$$c = c_b + c_c + c_1 + c_s + c_2 \quad (16)$$

5.3 基于分组加权的函数隶属度转化

隧道支护体系多目标优化问题为

$$\min_{x \in \Omega} f(x) = \min_{x \in \Omega} \{u_r, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, c\} \quad (17)$$

式中， $p_i$  ( $i=1, 2, \dots, 5$ ) 分别为锚杆、锚索、喷射混凝土、钢架和二次衬砌受力，可根据文献<sup>[22~24]</sup>确定。

显然，式 (17) 为七维多目标优化问题，为使得计算结果收敛需对其进行降维。由于各支护构件的受力本质矛盾不突出，可划分为同一目标，基于前文提出的分组加权思想可将式 (17) 写为

$$\min_{x \in \Omega} f(x) = \min_{x \in \Omega} \left\{ u_r, \sum_{i=1}^5 \lambda_i p_i, c \right\} \quad (18)$$

式中， $u_r$  为围岩最终变形， $\lambda_i$  为各支护构件权重。

隧道支护体系权重可根据 1~9 标度确定<sup>[25]</sup>，结合既有研究成果<sup>[10, 26-27]</sup>，构造支护体系重要性评价因素 5 阶判断矩阵 ( $n=5$ ):

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/4 & 1/3 & 1/2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1/2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

经计算， $\bar{B}$  的最大特征值为  $\omega_{\max} = 5.536$ ，进而可得隧道支护体系中锚杆、锚索、喷射混凝土、钢架和二次衬砌权重向量分别为

$\lambda = [0.145, 0.110, 0.359, 0.260, 0.126]$ 。(20)

为使得最终优化结果与一般可行解差异性更显著, 定义隶属度表达形式如下:

$$\mu_i = \frac{1 - e^{\frac{a_i(f_i^0 - f_i)}{f_i^0 - f_i^1}}}{1 - e^{a_i}} \quad (i=1,2,3), \quad (21)$$

式中,  $a_i$  为隶属度函数形状控制参数, 根据文献[17], 取  $a_i = 0.1$ 。

5.4 优化结果分析

根据图 9 的思路建立数值计算模型对支护—围岩关系进行计算, 采用 Hoek-Brown 准则, 各支护结构的支护特性曲线计算方法参考文献[28], 并基于前文思路对支护参数进行优化, 采用 Matlab 数学软件进行编程, 将计算结果绘制于隶属度空间内, 如图 11 所示。图中, 支护荷载为经分组加权后的隶属度函数。

可见, 满足要求的可行解共 1004 个, 而 M-Pareto 点仅有 10 个, 这表明在所有的设计方案中最优解仅占 1%, 若不对支护体系进行优化设计, 则支护方案很大概率上是不合理的。此外, 当参考点  $R_1$  取为常规值  $\bar{\mu}_1 = (1, 1, 1)$  时, 则距离最近的空间点坐标为  $\mu_1 = (0.77, 0.73, 0.96)$ , 围岩变形和支护受力的满意度较低。考虑到研究断面围岩条件较差, 参考点应向隧道安全性方向偏好, 因此将参考点  $R_2$  取  $\bar{\mu}_2 = (1, 0.9, 0.8)$ , 此时最优解在该隶属度空间内坐标为  $\mu_2 = (0.85, 0.76, 0.79)$ 。显然调整后, 隧道安全得以保证, 更符合工程需求, 此时支护优化方案如表 4 所示。

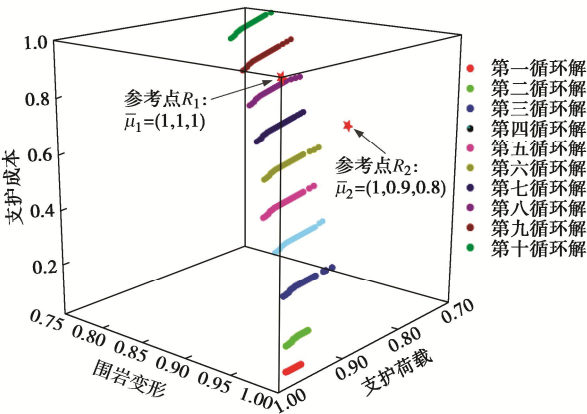


图 11 支护体系多目标优化结果

Fig.11 Multi-objective optimization results of support system

表 4 支护参数优化结果

Table 4 Optimization results of support parameters

支护参数	$S_{cb}(S_{lb})/m$	$S_{cc}(S_{lc})/m$	$t_1/cm$	$S_s/m$	$t_2/cm$
优化结果	1.2	2.8	30	1	45

5.5 现场监测结果

隧道施工中对围岩变形和支护力进行了监控量测, 其中围岩变形采用全站仪测量。由于隧道基于初

期支护承受全部荷载的理念进行设计, 因此本文重点对锚杆和钢架受力进行分析, 测点布置如图 12 所示。

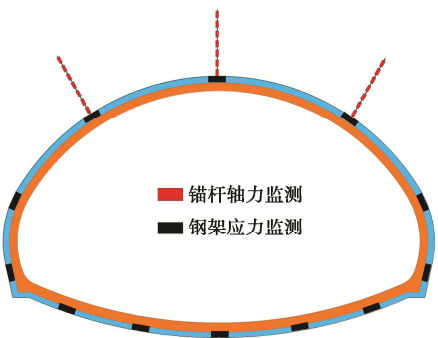


图 12 支护受力测点布置示意图

Fig. 12 Schematic diagram of arrangement of measuring points for supporting force

锚杆沿全长轴力采用钢筋计进行测量, 在锚杆自由段均匀布置 7 个钢筋计作为套筒安装于锚杆上, 两端间距为 1.4 m, 中部间距为 1.3 m, 而对于格栅钢架受力采用钢筋计焊接在四肢支架上, 现场仪器布置情况如图 13 所示。

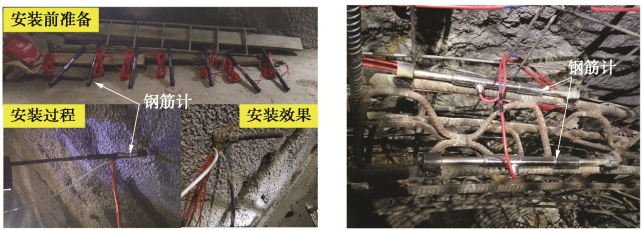


图 13 现场仪器布置情况

Fig. 13 Arrangement of field instruments

根据规范规定, 当隧道围岩变形稳定后, 所选监测断面支护结构受力结果如图 14 所示。

可见, 由于测力计的布置影响了安装区域内锚杆与围岩的黏结程度, 因此锚杆轴力沿全长波动性较小, 但基本上呈现出由浅部到深部递减的趋势, 而钢架受力最大值出现在拱顶。此外, 在当前支护方案下锚杆轴力最大值为 110.2 kN, 而钢架应力最大值为 110 MPa, 远低于其结构设计强度; 隧道拱顶围岩变形量仅为 18 mm, 这进一步表明当前基于经验的设计方法是偏于保守的。

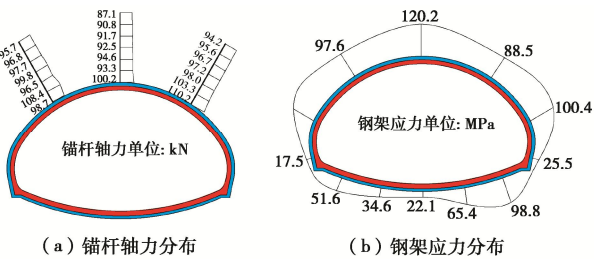


图 14 支护结构受力分布图

Fig. 14 Stress distribution of support structure



## 6 结 论

本文构建了隧道围岩协同支护系统, 阐明了隧道支护体系的协同作用原理, 建立了支护体系设计的多目标优化模型, 提出了协同优化设计原则与方法, 并在新建京张高铁八达岭隧道中进行应用, 获得如下主要结论:

(1) 隧道协同支护以支护—围岩作用机制为基础, 以协同学的基本原理为指导, 研究隧道支护—围岩系统的协同增强效应。协同作用特点表现为时机衔接、刚度匹配与变形协调, 前两者为协同工作方式, 而后者则为协同工作状态。

(2) 协同支护系统是由围岩系统与支护系统按一定工作方式组合在一起的复杂系统, 包括支护与围岩的体系协同、不同支护之间的结构协同以及同一支护的要素协同等 3 个层次。系统稳定性的表征参数为围岩变形, 而内驱力则是支护阻力, 二者贯穿于隧道工程活动始终, 是研究协同支护的标志性参数。

(3) 隧道支护体系协同设计的本质为多目标优化问题, 为此提出以围岩变形、支护受力和支护成本为目标, 并考虑到不同支护结构受力的目标一致性, 建立了基于目标函数分组加权表征的隶属度转化方法, 提出了隧道支护体系协同优化设计原则和方法, 实现了隧道支护设计理论的新突破。

(4) 工程应用与分析表明, 在所有可行解中最优解仅占 1%, 其他解答难以在经济性和安全性之间寻求平衡, 这便意味着若不采用协同优化设计, 则支护方案或因过度注重安全而增大工程造价, 亦或因强调经济性而偏于危险, 而目前工程中的经验设计方法往往是偏于保守的。

### 参考文献:

- [1] 张顶立. 隧道及地下工程的基本问题及其研究进展[J]. 力学学报, 2017, **49**(1): 3 - 21. (ZHANG Ding-li. Essential issues and their research progress in tunnel and underground engineering[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2017, **49**(1): 3 - 21. (in Chinese))
- [2] ORESTE P P. The convergence-confinement method: roles and limits in modern geomechanical tunnel design[J]. American Journal of Applied Sciences, 2009, **6**(4): 757 - 771.
- [3] BARTON N, LIEN R, LUNDE J. Engineering classification of rock masses for the design of tunnel support[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 1974, **6**(4): 189 - 236.
- [4] HOEK E, CARANZA-TORRES C, CORCUM B. Hoek-Brown failure criterion[C]// Proceedings of the North American Rock Mechanics Society, 2002, Toronto: 267 - 273.
- [5] PALMSTROM A, BROCH E. Use and misuse of rock mass classification systems with particular reference to the Q-system[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2006, **21**(6): 575 - 593.
- [6] 魏云杰, 陶连金. 煤矿巷道围岩稳定性快速评价方法研究[J]. 地下空间与工程学报, 2009, **5**(4): 691 - 697. (WEI Yun-jie, TAO Lian-jin. Study on the rapid evaluation method of the wall-rock stability about the colliery tunnel[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2009, **5**(4): 691 - 697. (in Chinese))
- [7] SHARAN S K. Analytical solutions for stresses and displacements around a circular opening in a generalized Hoek-Brown rock[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2008, **45**(1): 78 - 85.
- [8] 左建平, 史月, 刘德军, 等. 深部软岩巷道开槽卸压等效椭圆模型及模拟分析[J]. 中国矿业大学学报, 2019, **48**(1): 1 - 11. (ZUO Jian-ping, SHI Yue, LIU De-jun, et al. The equivalent ellipse model and simulation analysis of destressing by cutting groove in deep soft rock roadway[J]. Journal of China University of Mining & Technology, 2019, **48**(1): 1 - 11. (in Chinese))
- [9] 张顶立, 孙振宇. 高速铁路隧道关键科学问题及发展趋势[J]. 铁道建筑, 2018, **58**(11): 1 - 4. (ZHANG Ding-li, SUN Zhen-yu. Key scientific problems and development tendency of high-speed railway tunnel[J]. Railway Engineering, 2008, **58**(11): 1 - 4. (in Chinese))
- [10] 张顶立, 孙振宇, 侯艳娟. 隧道支护结构体系及其协同作用[J]. 力学学报, 2019, **51**(2): 577 - 593. (ZHANG Ding-li, SUN Zhen-yu, HOU Yan-juan. Tunnel support structure system and its synergistic effect[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2019, **51**(2): 577 - 593. (in Chinese))
- [11] 哈肯 H. 高等协同学[M]. 北京: 科学出版社, 1989. (HAKEN H. Higher Synergies[M]. Beijing: Science Press, 1989. (in Chinese))
- [12] 左建平, 孙运江, 王金涛, 等. 大断面破碎巷道全空间桁架锚索协同支护研究[J]. 煤炭科学技术, 2016, **44**(3): 1 - 6. (ZUO Jian-ping, SUN Yun-jiang, WANG Jin-tao, et al. Study on full space truss and anchor coordinative support of mine large cross-section broken roadway[J]. Coal Science and Technology, 2016, **44**(3): 1 - 6. (in Chinese))
- [13] WIERZBICKI A P. The use of reference objectives in

- multi-objective optimization[C]// Multiple Criteria Decision Making Theory and Applications, 1980, Berlin: 468 - 486.
- [14] WIERZBICKI A P. Basic properties of scalarizing functionals for multiobjective optimization[J]. Mathematische Operations forschung and Statistik, 1977, **8**(1): 55 - 60.
- [15] DEB K, SAXENA K. Searching for pareto-optimal solutions through dimensionality reduction for certain large-dimensional multi-objective optimization problems[C]// Proc of 2006 IEEE Congress on Evolutionary Computation, 2006, Vancouver: 3353 - 3360.
- [16] KOSKI J, SILVENNOINEN R. Norm methods and partial weighting in multicriterion optimization of structures[J]. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 1987(24): 1101 - 1121.
- [17] TONON F, MAMMINO A, BERNARDINI A. Multiobjective optimization under uncertainty in tunneling: Application to the design of tunnel support/reinforcement with case histories[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2002, **17**(1): 33 - 54.
- [18] 陈豪雄. 对隧道复合式衬砌的见解[J]. 教学与科技, 1986(1): 31 - 37. (CHEN Hao-xiong. Insights on the composite lining of tunnels[J]. Teaching and Technology, 1986(1): 31 - 37. (in Chinese))
- [19] BROWN E T. From theory to practice in rock engineering[J]. Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy, Section A: Mining Technology, 1985(94): 67 - 83.
- [20] HOEK E, BROWN E T. Underground Excavations in Rock[M]. London: Institution of Mining and Metallurgy, 1980.
- [21] 铁路隧道设计规范: TB10003—2016[S]. 2016. (Code for Design on Tunnel of Railway: TB 10003—2016[S]. 2016. (in Chinese))
- [22] ORESTE P P. Analysis of structural interaction in tunnels using the convergence-confinement approach[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2003, **13**(2): 347 - 363.
- [23] 孙振宇, 张顶立, 房倩, 等. 隧道初期支护与围岩相互作用的时空演化特性[J]. 岩石力学与工程学报, 2017, **36**(增刊 2): 3943 - 3956. (SUN Zhen-yu, ZHANG Ding-li, FANG Qian, et al. Spatial and temporal evolution characteristics of interaction between primary support and tunnel surrounding rock[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2017, **36**(S2): 3943 - 3956. (in Chinese))
- [24] 孙振宇, 张顶立, 房倩. 隧道锚固系统的协同作用及设计方法[J]. 工程力学, 2019, **36**(5): 53 - 66, 75. (SUN Zhen-yu, ZHANG Ding-li, FANG Qian. The synergistic effect and design method of tunnel anchorage system[J]. Engineering Mechanics, 2019, **36**(5): 53 - 66, 75. (in Chinese))
- [25] 许树柏. 实用决策方法—层次分析法原理[M]. 天津: 天津大学出版社, 1988. (XU Shu-bai. Use of Decision Method—Analytic Hierarchy Process[M]. Tianjin: Tianjin University Press, 1988. (in Chinese))
- [26] 赵勇, 刘建友, 田四明. 深埋隧道软弱围岩支护体系受力特征的试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2011, **30**(8): 1663 - 1670. (ZHAO Yong, LIU Jian-you, TIAN Si-ming. Experimental study of mechanical characteristics of support system for weak surrounding rock of deep tunnels[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2011, **30**(8): 1663 - 1670. (in Chinese))
- [27] 张顶立. 隧道围岩稳定性及其支护作用分析[J]. 北京交通大学学报, 2016, **40**(4): 9 - 18. (ZHANG Ding-li. Analysis of surrounding rock stability and support action in tunnels[J]. Journal of Beijing Jiaotong University, 2016, **40**(4): 9 - 18. (in Chinese))
- [28] 关宝树. 隧道工程设计要点集[M]. 北京: 人民交通出版社, 2003: 42 - 57. (GUAN Bao-shu. Key Points of Tunnel Engineering Design[M]. Beijing: China Communications Press, 2003: 42 - 57. (in Chinese))