

DOI: 10.11779/CJGE202101008

# 行波效应下曲线隧道动力响应解析解

禹海涛<sup>1</sup>, 李心熙<sup>2</sup>, 李攀<sup>\*2,3</sup>

(1. 同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092; 2. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092; 3. 苏州大学轨道交通学院, 江苏 苏州 215131)

**摘要:** 隧道曲率变化段是制约隧道结构抗震安全性的关键控制区段, 但目前隧道抗震设计仅以横断面剪切变形为主, 未考虑隧道沿纵向的曲率半径变化, 缺乏针对曲线隧道的纵向抗震简化分析方法。将曲线隧道沿纵向简化为作用在黏弹性地基上的变曲率有限长均质 Euler-Bernoulli 梁, 基于 Hamilton 原理及黏弹性地基梁理论建立了结构的微分动力控制方程及边界条件, 并通过模态叠加法进行求解, 推导出任意动载作用下曲线隧道的位移、速度、加速度、弯矩、剪力等动力响应的解析表达式, 以行波荷载为例, 给出行波效应下曲线隧道动力响应的退化解答。通过与有限元基准模型在相同条件下的对比分析, 验证了所推导解析解的正确性。最后应用该解析公式进行参数敏感性分析, 揭示了隧道曲率半径、行波波速、行波频率及地层-结构相对刚度比等关键因素对曲线隧道结构动力响应的影响规律。

**关键词:** 曲线隧道; 动力响应; 行波效应; 解析解; 影响因素分析

中图分类号: TU435 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2021)01-0069-08

作者简介: 禹海涛(1983—), 男, 博士, 教授, 主要从事地下结构防灾减灾方面的研究工作。E-mail: yuhaitao@tongji.edu.cn。

## Analytical solution for dynamic response of curved tunnels under travelling wave effect

YU Hai-tao<sup>1</sup>, LI Xin-xi<sup>2</sup>, LI Pan<sup>2,3</sup>

(1. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 3. School of Rail Transportation, Soochow University, Suzhou 215131, China)

**Abstract:** The tunnel section with curvature variation that restricts the seismic safety of a tunnel is one of the critical sections for structural design. However, the current seismic design of tunnel structures only focuses on the shear deformation of the tunnel cross-section and the longitudinal curvature is not considered. The most important issue is that there are no available simplified methods in the current literatures for longitudinal seismic analysis of curved tunnels. It is therefore necessary to solve the forward problem with the purpose of obtaining an analytical solution for the dynamic response of curved tunnels under travelling loads. Firstly, a curved tunnel is assumed as a finite homogeneous beam with variable curvature resting on a viscoelastic foundation, and the governing differential equation and boundary conditions of the dynamic problem are established based on the Hamilton principle and the viscoelastic foundational beam theory. Then, the modal superposition method is employed to solve the dynamic problem, and thus the analytical solutions of dynamic responses for curved tunnels subjected to arbitrary dynamic loads are derived. Finally, the degraded solution for travelling loads is obtained with the proposed solution. The solutions of tunnel responses investigated are deflection, velocity, acceleration, bending moment, and shear force. The validation of the analytical solution is verified by providing comparisons between its results and those from the finite element method. The parametric analyses are performed to investigate the influences of the radius of curvature, the velocity and frequency of travelling loads and soil-structure relative stiffness ratio on the dynamic responses of the curved tunnel.

**Key words:** curved tunnel; dynamic response; travelling wave effect; analytical solution; parametric analysis

## 0 引言

近年地震频发, 隧道作为震后救援的生命线通道, 其抗震安全性至关重要。由于隧道建设受到地形、选

基金项目: 国家重点研发计划项目(2018YFC1504305, 2017YFC0805501, 2017YFC1500703); 国家自然科学基金项目(41922059, 51978431, 51678438); 上海市科委重点课题(18DZ1205103 & 18DZ1205106, 17DZ1203804); 中央高校基本科研业务费专项项目

收稿日期: 2020-04-15

\*通信作者 (E-mail: yongpanli@163.com)

线等因素制约, 实际工程中将不可避免地出现曲线型隧道。相比直线型隧道, 隧道曲率变化段将成为制约隧道结构抗震安全性的关键控制区段<sup>[1]</sup>。此外, 隧道通常都延伸数公里长的距离, 地震波在隧道纵向各点引起的振动将存在显著的差异性<sup>[2-4]</sup>, 如行波效应, 即由于位置的不同造成地震波到达时的差异。因此, 研究曲线隧道在地震作用尤其是行波效应下的抗震安全性至关重要。

目前隧道抗震分析主要以横断面剪切变形为主<sup>[5-6]</sup>, 而对隧道纵向抗震研究相对较少<sup>[7]</sup>, 尤其罕见对行波效应下曲线隧道地震响应的研究。周彦良<sup>[8]</sup>采用三维数值模型开展曲线隧道抗震性能分析, 研究发现地震作用下曲线隧道与直线隧道的交界处出现明显的应力集中, 且隧道曲线段沿纵向内力与变形响应均有较大变化。穆嘉豪等<sup>[9]</sup>通过对某实际工程三维建模分析, 研究了隧道曲线段的加速度及变形响应规律。Fabozzi 等<sup>[10]</sup>建立了实际地层-曲线隧道三维有限元模型以及简化梁-弹簧模型, 通过两种模型对比分析说明了该简化模型在非一致地震输入下的可行性。综上可见, 上述研究主要以有限元等数值方法为主, 相比而言, 解析方法具有计算简便、直观等优点, 更适于指导曲线隧道抗震设计。然而, 目前解析法仅针对直线型隧道动力响应<sup>[11-13]</sup>, 缺乏曲线隧道动力响应的解析解。

本文将曲线隧道简化为作用在黏弹性地基上的变曲率有限长均质梁, 基于 Hamilton 原理及黏弹性地基梁理论, 建立了变曲率隧道在任意动力荷载作用下的微分控制方程, 采用模态叠加法将动力控制方程解耦, 求得各模态下结构的幅值函数, 并根据边界条件确定其固有频率及振型, 从而推导出变曲率隧道在任意动载作用下的动力响应解析表达式, 并退化出行波效应下曲线隧道动力响应的解析解。通过与有限元数值解对比, 验证了所推导解析解的正确性。最后通过参数敏感性分析揭示了隧道曲率半径、行波波速与频率、地层-结构相对刚度比等关键因素变化对曲线隧道动力响应的影响规律。

## 1 动力控制方程

曲线隧道动力问题的分析模型如图 1 所示, 其基本假定如下: 将曲线隧道简化为有限长均质 Euler-Bernoulli 梁, 忽略梁的内部阻尼和轴力的影响, 将隧道周围土体假定为黏弹性地基, 隧道与土体之间的相互作用通过地基反力系数  $K$  和阻尼系数  $C$  表征, 外部荷载表示为任意动力荷载函数  $F(x, t)$ 。曲线段长度为  $l_2$ , 两相邻直线段长度分别为  $l_1$ ,  $l_3$ , 曲线段曲率半径为  $R$ , 所对应的圆心角为  $2\theta$ 。梁的单位长度质量为  $\rho A$ , 抗弯刚度为  $EI$ , 梁的位移为  $y(x, t)$ 。设置多

个参考坐标系, 控制方程推导采用流动坐标系: 梁的轴线设为  $x$  轴,  $y$  轴与  $x$  轴垂直, 曲线段中点设为原点; 整体坐标系设置为:  $X$  轴沿水平方向设置,  $Y$  轴与其垂直, 梁最左端的点设为原点; 局部坐标系设置: 每段梁轴线设为该梁  $x_i$  轴,  $y_i$  轴与  $x_i$  轴垂直, 每段梁最左端的点设为其原点。

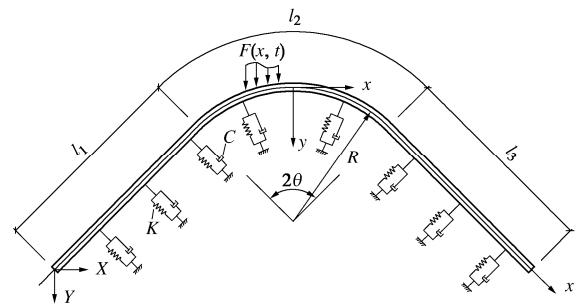


图 1 任意动载作用下黏弹性地基上曲线隧道简化模型

Fig. 1 Curved tunnel on viscoelastic foundation subjected to arbitrary dynamic loads

根据 Hamilton 原理及 Euler-Bernoulli 梁理论<sup>[14]</sup>, 直线段控制方程可以表示为

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + C \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + Ky(x, t) = F(x, t) \quad (1)$$

曲线段控制方程为<sup>[15]</sup>

$$EI \left[ \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{R^4} y(x, t) \right] + \rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + C \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + Ky(x, t) = F(x, t) \quad (2)$$

展开后可写为

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + 2EIR_1(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + EIR_2(x)y(x, t) + \rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + C \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + Ky(x, t) = F(x, t), \quad (3)$$

$$\text{式中, } R_1(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{l_2}{2} \\ \frac{1}{R^2} & |x| \leq \frac{l_2}{2} \end{cases}, \quad R_2(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{l_2}{2} \\ \frac{1}{R^4} & |x| \leq \frac{l_2}{2} \end{cases}.$$

假设梁的初值条件为

$$\begin{cases} y(x, t) \Big|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

两端任意边界条件可表示为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=-l_1-\frac{l_2}{2}} = B_1, \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=\frac{l_2}{2}+l_3} = B_2, \\ \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=-l_1-\frac{l_2}{2}} = B_3, \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=\frac{l_2}{2}+l_3} = B_4. \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $B_1, B_2, B_3, B_4$  是与不同边界条件相关的常数。

方程 (3) ~ (5) 构成了问题的完整数学描述, 通过求解这些方程, 可以获得任意动载下梁的响应。

## 2 解析解及验证

### 2.1 解析解推导

利用自由振动的模态振型可以将变曲率有限长梁的动力控制方程进行解耦, 使其转换为广义的单自由度体系。将这些振型的幅值定义为广义坐标, 可以获得任意形式的梁的响应。理论上该体系包含无数个振型, 但梁的动力响应可以用有限数量振型叠加来近似表达<sup>[14]</sup>。

假设梁位移  $y(x, t)$  解的形式为

$$y(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(x) Y_m(t) \quad , \quad (6)$$

式中,  $\Phi_m(x)$  与  $Y_m(t)$  分别是第  $m$  阶振型与幅值。

将方程 (6) 代入方程 (3), 乘以  $n$  阶振型  $\Phi_n(x)$ , 并对全长进行积分可得

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(t) \int_{-l_1 - \frac{l_2}{2}}^{\frac{l_2 + l_3}{2}} \Phi_n(x) [EI\Phi_m^{(4)}(x) + 2EIR_1(x)\Phi_m'(x) + \\ & EIR_2(x)\Phi_m(x) + K\Phi_m(x)] dx + \sum_{m=1}^{\infty} [\rho A \ddot{Y}_m(t) + C \dot{Y}_m(t)] \cdot \\ & \int_{-l_1 - \frac{l_2}{2}}^{\frac{l_2 + l_3}{2}} \Phi_n(x) \Phi_m(x) dx = \int_{-l_1 - \frac{l_2}{2}}^{\frac{l_2 + l_3}{2}} \Phi_n(x) F(x, t) dx \quad , \quad (7) \end{aligned}$$

式中,  $\Phi_m'(x)$  和  $\Phi_m^{(4)}(x)$  分别是  $\Phi_m(x)$  对  $x$  的二阶和四阶导数,  $\ddot{Y}_m(t)$  和  $\dot{Y}_m(t)$  分别是  $Y_m(t)$  对时间  $t$  的一阶和二阶导数。

考虑到振型的正交性, 方程 (7) 可转化为

$$M_n \ddot{Y}_n(t) + C_n \dot{Y}_n(t) + K_n Y_n(t) = F_n(t) \quad , \quad (8)$$

式中,  $M_n, C_n, K_n, F_n$  分别为广义质量、广义阻尼、广义刚度、广义荷载, 即

$$M_n = \int_{-l_1 - \frac{l_2}{2}}^{\frac{l_2 + l_3}{2}} \rho A \Phi_n^2(x) dx \quad , \quad (9)$$

$$C_n = \int_{-l_1 - \frac{l_2}{2}}^{\frac{l_2 + l_3}{2}} C \Phi_n^2(x) dx \quad , \quad (10)$$

$$\begin{aligned} K_n = & \int_{-l_1 - \frac{l_2}{2}}^{\frac{l_2 + l_3}{2}} \left\{ EI[\Phi_n'(x)]^2 + 2EIR_1(x)[\Phi_n'(x)]^2 + \right. \\ & \left. [EIR_2(x) + K]\Phi_n^2(x) \right\} dx \quad , \quad (11) \end{aligned}$$

$$F_n(t) = \int_{-l_1 - \frac{l_2}{2}}^{\frac{l_2 + l_3}{2}} \Phi_n(x) F(x, t) dx \quad . \quad (12)$$

利用 Duhamel 积分求解方程 (8), 可得

$$Y_n(t) = \frac{1}{M_n \omega_{Dn}} \int_0^t F_n(s) e^{-\xi_n \omega_n(t-s)} \sin[\omega_{Dn}(t-s)] ds \quad . \quad (13)$$

式中,  $\omega_n$  为自由振动的  $n$  阶频率,  $\omega_n^2 = \frac{K_n}{M_n}$ ,  $\xi_n$  为  $n$  阶模态的阻尼比,  $\xi_n = \frac{C_n}{2M_n \omega_n}$ ,  $\omega_{Dn} = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2}$ 。

将方程 (13) 代入方程 (6), 可得

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(x)}{M_n \omega_{Dn}} \int_0^t F_n(s) e^{-\xi_n \omega_n(t-s)} \sin[\omega_{Dn}(t-s)] ds \quad . \quad (14)$$

方程 (14) 即为黏弹性地基上变曲率有限长梁的平面内动力响应解析解。速度和加速度响应可以通过位移响应对时间  $t$  的一阶和二阶导数获得

$$\begin{aligned} v(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(x)}{M_n \omega_{Dn}} \int_0^t F_n(s) e^{-\xi_n \omega_n(t-s)} \cdot \{\omega_{Dn} \cos[\omega_{Dn}(t-s)] - \\ & \xi_n \omega_n \sin[\omega_{Dn}(t-s)]\} ds \quad , \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(x)}{M_n \omega_{Dn}} \int_0^t F_n(s) e^{-\xi_n \omega_n(t-s)} \cdot \{(\xi_n^2 \omega_n^2 - \omega_{Dn}^2) \sin[\omega_{Dn}(t-s)] - \\ & 2\xi_n \omega_n \omega_{Dn} \cos[\omega_{Dn}(t-s)]\} ds \quad . \quad (16) \end{aligned}$$

弯矩响应和剪力响应可以通过位移响应对空间  $x$  的二阶和三阶导数并乘以系数  $(-EI)$  得到

$$M(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-EI\Phi_n''(x)}{M_n \omega_{Dn}} \int_0^t F_n(s) e^{-\xi_n \omega_n(t-s)} \sin[\omega_{Dn}(t-s)] ds, \quad (17)$$

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-EI\Phi_n'''(x)}{M_n \omega_{Dn}} \int_0^t F_n(s) e^{-\xi_n \omega_n(t-s)} \sin[\omega_{Dn}(t-s)] ds. \quad (18)$$

### 2.2 模态分析

不考虑阻尼, 方程 (1) 可转化成自由振动方程:

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + Ky(x, t) + \rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad . \quad (19)$$

基于变量分离, 可得常微分方程:

$$\Phi_s^{(4)}(x) - b_s^4 \Phi_s(x) = 0 \quad , \quad (20)$$

式中,  $\Phi_s(x)$  为直线梁振型,  $b_s^4 = a_s^4 - \frac{K}{EI}$ ,  $a_s^4 = \frac{\omega_s^2 \rho A}{EI}$ ,  $\omega_s$  为直线梁自由振动的频率。

方程 (20) 的解可表示为

$$\begin{aligned} \Phi_s(x) = & D_{s1} \cos(b_s x) + D_{s2} \sin(b_s x) + \\ & D_{s3} \cosh(b_s x) + D_{s4} \sinh(b_s x) \quad , \quad (21) \end{aligned}$$

式中,  $D_{s1}, D_{s2}, D_{s3}$  和  $D_{s4}$  为与直线梁的边界条件相关的实常数。

曲线梁自由振动分析过程与直线梁类似, 其振型可表示为

$$\Phi_c(x) = D_{c1} \cos(dx) + D_{c2} \sin(dx) + D_{c3} \cosh(dx) + D_{c4} \sinh(dx) \quad (22)$$

$$\text{式中, } \Phi_c(x) \text{ 为曲线梁振型, } d = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{R^4} + b_c^4} - \frac{1}{R^2}},$$

$b_c^4 = a_c^4 - \frac{1}{R^4} - \frac{K}{EI}$ ,  $a_c^4 = \frac{\omega_c^2 \rho A}{EI}$ ,  $\omega_c$  为曲线梁自由振动的频率,  $D_{c1}$ ,  $D_{c2}$ ,  $D_{c3}$  和  $D_{c4}$  为与曲线梁的边界条件相关的实常数。

对于变曲率弹性地基梁, 考虑曲线段与直线段交界处的连续条件及边界条件, 即可获得其固有频率及振型。本文采用 Samuel 等<sup>[16]</sup>建议的矩阵方法来进一步简化问题的表达, 并采用局部坐标系进行推导。

不考虑阻尼, 振型可以写成以下矩阵形式:

$$\Phi_i(x_i) = D_{i1} \cos(d_i x_i) + D_{i2} \sin(d_i x_i) + D_{i3} \cosh(d_i x_i) + D_{i4} \sinh(d_i x_i) = \mathbf{A}_i(x_i) \mathbf{D}_i, \quad (23)$$

式中,  $\mathbf{A}_i(x_i)$  为向量形式的振型项,  $\mathbf{D}_i$  为对应的系数向量, 即

$$\mathbf{A}_i(x_i) = [\cos(d_i x_i) \ \sin(d_i x_i) \ \cosh(d_i x_i) \ \sinh(d_i x_i)], \quad (24)$$

$$\mathbf{D}_i = [D_{i1} \ D_{i2} \ D_{i3} \ D_{i4}], \quad (25)$$

$$d_i = \begin{cases} \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho A}{EI} - \frac{K}{EI}} & (i=1,3) \\ \sqrt{\sqrt{\frac{\omega^2 \rho A}{EI} - \frac{K}{EI}} - \frac{1}{R^2}} & (i=2) \end{cases} \quad (26)$$

式中,  $x_i$  为每段梁在局部坐标系下的坐标,  $i=1,2,3$ 。

定义矩阵变量  $\mathbf{C}_i(x_i)$  为

$$\mathbf{C}_i(x_i) = [\mathbf{A}_i(x_i) \ \mathbf{A}'_i(x_i) \ -EI\mathbf{A}''_i(x_i) \ -EI\mathbf{A}'''_i(x_i)]^T. \quad (27)$$

则可以得到如下关系式:

$$[\Phi_i(x_i) \ \Phi'_i(x_i) \ -EI\Phi''_i(x_i) \ -EI\Phi'''_i(x_i)]^T = \mathbf{C}_i(x_i) \mathbf{D}_i \quad (28)$$

考虑到直线段与曲线段之间变形和内力连续, 可得如下关系式:

$$\mathbf{C}_1(l_1) \mathbf{D}_1 = \mathbf{C}_2(0) \mathbf{D}_2, \quad (29)$$

$$\mathbf{C}_2(l_2) \mathbf{D}_2 = \mathbf{C}_3(0) \mathbf{D}_3. \quad (30)$$

由此可得

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{C}_2^{-1}(0) \mathbf{C}_1(l_1) \mathbf{D}_1, \quad (31)$$

$$\mathbf{D}_3 = \mathbf{C}_3^{-1}(0) \mathbf{C}_2(l_2) \mathbf{D}_2 = \mathbf{C}_3^{-1}(0) \mathbf{C}_2(l_2) \mathbf{C}_2^{-1}(0) \mathbf{C}_1(l_1) \mathbf{D}_1. \quad (32)$$

以上为直线段与曲线段之间系数向量的关系, 根据边界条件即可求得梁的固有频率及振型, 下面以两端固定边界为例给出梁固有频率及振型的求解过程。

设两端边界条件均为固定, 即  $\Phi_1(0) = \Phi'_1(0) = 0$ , 则可得  $D_{13} = -D_{11}$ ,  $D_{14} = -D_{12}$ , 令

$$\mathbf{C}_1(l_1) \mathbf{D}_1 = \mathbf{E}_1(l_1) \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{12} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

式中,  $\mathbf{E}_1(l_1)$  为  $4 \times 2$  矩阵, 则方程 (31) 与方程 (32) 可重新写为

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{C}_2^{-1}(0) \mathbf{E}_1(l_1) \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{12} \end{bmatrix}, \quad (34)$$

$$\mathbf{D}_3 = \mathbf{C}_3^{-1}(0) \mathbf{C}_2(l_2) \mathbf{C}_2^{-1}(0) \mathbf{E}_1(l_1) \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{12} \end{bmatrix}. \quad (35)$$

考虑到方程 (34) 中的  $\mathbf{C}_2^{-1}(0) \mathbf{E}_1(l_1)$  为  $4 \times 2$  矩阵, 可以将其分解为两个  $4 \times 1$  向量, 即

$$\mathbf{C}_2^{-1}(0) \mathbf{E}_1(l_1) = [\mathbf{T}_1 \ \mathbf{V}_1], \quad (36)$$

式中,  $\mathbf{T}_1$  和  $\mathbf{V}_1$  均为  $4 \times 1$  向量变量。

同理, 方程 (35) 中的  $\mathbf{C}_3^{-1}(0) \mathbf{C}_2(l_2) \mathbf{C}_2^{-1}(0) \mathbf{E}_1(l_1)$  也可分解为

$$\mathbf{C}_3^{-1}(0) \mathbf{C}_2(l_2) \mathbf{C}_2^{-1}(0) \mathbf{E}_1(l_1) = [\mathbf{T}_2 \ \mathbf{V}_2], \quad (37)$$

式中,  $\mathbf{T}_2$  和  $\mathbf{V}_2$  也为  $4 \times 1$  向量变量。

因此, 曲线段与直线段的振型方程可表示为

$$\Phi_2(x_2) = D_{11} \mathbf{A}_2(x_2) \mathbf{T}_1 + D_{12} \mathbf{A}_2(x_2) \mathbf{V}_1, \quad (38)$$

$$\Phi_3(x_3) = D_{11} \mathbf{A}_3(x_3) \mathbf{T}_2 + D_{12} \mathbf{A}_3(x_3) \mathbf{V}_2. \quad (39)$$

考虑到梁另一端的边界条件为  $\Phi_3(l_3) = \Phi'_3(0) = 0$ , 并将方程 (39) 代入该边界条件, 可得:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_3(l_3) \mathbf{T}_2 & \mathbf{A}_3(l_3) \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{A}'_3(l_3) \mathbf{T}_2 & \mathbf{A}'_3(l_3) \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{12} \end{bmatrix} = 0. \quad (40)$$

将方程 (40) 第一项的行列式的值设为 0, 则可以得到梁的频率方程, 通常可以采用计算机软件 (如 Matlab 等) 对其进行求解。

由方程 (40) 可得

$$D_{12} = -\frac{\mathbf{A}_3(l_3) \mathbf{T}_2}{\mathbf{A}_3(l_3) \mathbf{V}_2} D_{11}. \quad (41)$$

则直线段与曲线段的振型可分别表示为

$$\Phi_1(x_1) = D_{11} \left\{ [\cos(d_1 x_1) - \cosh(d_1 x_1)] - \frac{\mathbf{A}_3(l_3) \mathbf{T}_2}{\mathbf{A}_3(l_3) \mathbf{V}_2} [\sin(d_1 x_1) - \sinh(d_1 x_1)] \right\}, \quad (42)$$

$$\Phi_2(x_2) = D_{11} \left[ \mathbf{A}_2(x_2) \mathbf{T}_1 - \frac{\mathbf{A}_3(l_3) \mathbf{T}_2}{\mathbf{A}_3(l_3) \mathbf{V}_2} \mathbf{A}_2(x_2) \mathbf{V}_1 \right], \quad (43)$$

$$\Phi_3(x_3) = D_{11} \left[ \mathbf{A}_3(x_3) \mathbf{T}_2 - \frac{\mathbf{A}_3(l_3) \mathbf{T}_2}{\mathbf{A}_3(l_3) \mathbf{V}_2} \mathbf{A}_3(x_3) \mathbf{V}_2 \right]. \quad (44)$$

系数  $D_{11}$  可以由下式确定:

$$D_{11}^2 \left[ \int_{-l_1 - \frac{l_2}{2}}^{-\frac{l_2}{2}} \rho A \Phi_1^2 \left( x + l_1 + \frac{l_2}{2} \right) + \int_{-\frac{l_2}{2}}^{\frac{l_2}{2}} \rho A \Phi_2^2 \left( x + \frac{l_2}{2} \right) + \int_{\frac{l_2}{2}}^{\frac{l_2}{2} + l_3} \rho A \Phi_3^2 \left( x - \frac{l_2}{2} \right) \right] = 1. \quad (45)$$

则梁的振型函数为

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi_1\left(x + l_1 + \frac{l_2}{2}\right) & \left(-l_1 - \frac{l_2}{2} \leq x \leq -\frac{l_2}{2}\right) \\ \Phi_2\left(x + \frac{l_2}{2}\right) & \left(-\frac{l_2}{2} < x \leq \frac{l_2}{2}\right) \\ \Phi_3\left(x - \frac{l_2}{2}\right) & \left(\frac{l_2}{2} < x \leq \frac{l_2}{2} + l_3\right) \end{cases} \quad (46)$$

将方程(46)及相应的固有频率代入方程(14)~(18), 即可得两端自由的变曲率弹性地基梁动力响应解析解。需要说明的是, 本文推导出的曲线隧道动力响应解析解适用于任意动载条件, 以下讨论仅针对行波效应这一特定荷载形式。

### 2.3 算例分析

行波效应是指荷载抵达隧道不同位置的时间不同步, 导致结构响应显著变化的现象, 可以将具有行波效应的地震动简化为整体坐标系下如下形式<sup>[13]</sup>:

$$F(X, t) = \begin{cases} 0 & (X > vt) \\ P \sin\left[2\pi f\left(t - \frac{X}{v}\right)\right] & (X \leq vt) \end{cases} \quad (47)$$

式中,  $P$  为行波幅值,  $f$  为行波圆频率,  $v$  为行波波速。

以上海某大直径盾构隧道为例, 外径为 14.5 m, 内径为 13.3 m, 直线段长度为 1000 m, 曲线段长度为 500 m, 曲率半径为 400 m, 密度为 2500 kg/m<sup>3</sup>, 弹性模量为  $3.45 \times 10^{10}$  Pa。盾构隧道是由单块管片在环向和纵向用螺栓装配起来的不连续结构体, 因此在进行盾构隧道的纵向分析时, 要考虑衬砌构造的接缝特征, 本文采用文献[17]提出的纵向等效刚度来考虑接缝的影响。计算模型中隧道环缝接头布置 42 个 M36 螺栓, 单个螺栓抗拉刚度  $k_l = 2.64 \times 10^8$  N/m, 衬砌环宽  $l_s = 2$  m。经计算得纵向弯曲刚度的折减系数为 0.06。考虑土体弹性模量  $E_m = 117$  MPa, 泊松比  $\nu_m = 0.3$ , 阻尼系数取  $C=0$ , 根据 St John 等<sup>[5]</sup>的建议公式确定弹簧刚度。并以上海地区设计地震加速度  $PGA = 0.1g$  为例, 取振幅 66 kN, 主频 2 Hz, 波速 200 m/s。考虑到盾构隧道端部与工作井相连, 而工作井的结构刚度远大于盾构隧道的结构刚度<sup>[18]</sup>, 因此隧道两端边界条件近似为固定端。

为了验证本文所推导解析解的正确性, 采用有限元软件 ABAQUS 建立了与解析解模型相同参数的梁-弹簧模型, 并将解析解计算结果与有限元计算结果进行对比。图 2 给出了  $x=0$  处结构的加速度和弯矩响应解析解和数值解对比。由图可知, 解析解与数值解结果基本一致, 由此验证了所推导解析解的正确性。并对比分析了相同模型参数下本文的梁-弹簧模型及三维地层-结构模型的计算结果, 两者规律一致, 除个别点误差较大外, 本文方法精度较好<sup>[19]</sup>, 进一步验证本

文所推导解析解的合理性。

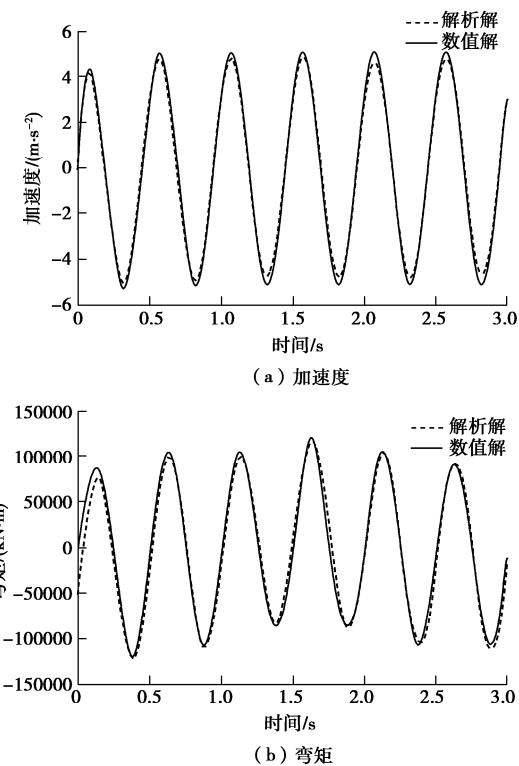


图 2  $x=0$  处隧道动力响应对比

Fig. 2 Dynamic responses at position of  $x = 0$  of tunnel under travelling loads

### 3 参数敏感性分析

本节保留 2.3 节算例的隧道参数、地基参数及荷载参数, 通过分别改变隧道曲率半径、行波波速、行波频率以及土-结构相对刚度比进行参数敏感性分析。

#### 3.1 曲率半径影响分析

考虑到实际情况下, 隧道曲率半径与其所对应的圆心角是同时变化的, 因此本节考虑固定曲线段的长度, 即  $l_2$  保持不变, 通过改变曲率半径来探究隧道动力响应的变化。同时考虑到设计时隧道曲线段曲率半径不宜小于 250 m<sup>[20]</sup>, 本节分析中曲率半径分别取 200, 400, 600, 800, 1000 m,  $\infty$  (直线隧道), 隧道对应曲率则为曲率半径的倒数, 如直线隧道的曲率为 0。

从隧道曲线段中点 ( $x=0$  处) 开始, 每隔 125 m 设置一个观测点, 如图 3 所示, 输出其最大加速度随曲率变化图, 如图 4 所示, 其余动力响应规律 (如速度、弯矩、剪力) 与其类似。由图可知, 在曲线段中部, 隧道动力响应随着曲率的增大而迅速增大; 随着观测点从曲线段向直线段移动 (图 3 中从 A 点到 E 点), 隧道动力响应随曲率变化逐渐减小; 在直线段, 隧道动力响应随曲率变化不大, 即基本不受曲线段影响。

因此在曲线隧道抗震设计中, 不应选用过小的曲率半径, 且应重点关注隧道转弯处的动力响应。

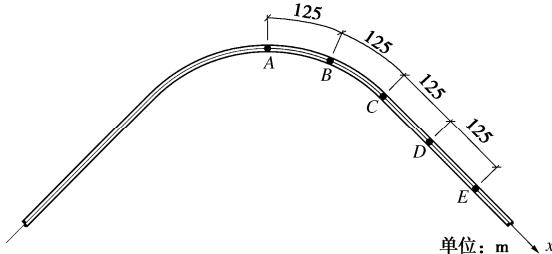


图 3 观测点示意图

Fig. 3 Layout of observation points

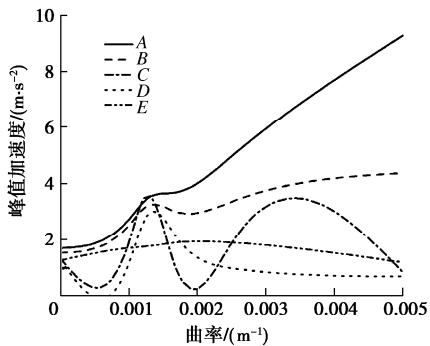


图 4 不同曲率下隧道最大加速度响应

Fig. 4 Peak accelerations of tunnel under travelling loads with different curvatures

### 3.2 行波波速影响分析

为研究行波波速对隧道动力响应的影响, 分别取 200, 400, 600, 800 m/s<sup>[21]</sup>。图 5 给出了隧道最大加速度响应随行波波速变化曲线, 其余动力响应规律与其类似。由图可知, 行波波速对隧道动力响应有显著影响, 但影响规律并不是简单的正相关或负相关关系, 而是存在一个最大响应峰值对应的临界波速, 且该临界速度与位置有关, 即随着观测点位置从曲线段过渡到直线段, 该临界速度逐渐增大, 同时, 隧道曲线段中部动力响应明显大于直线段动力响应。

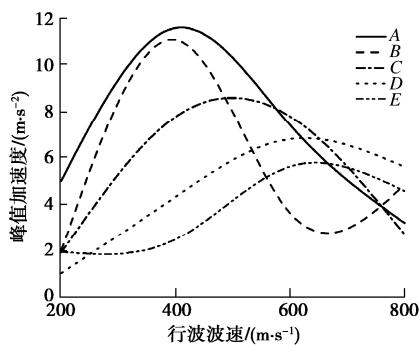


图 5 不同行波波速下隧道加速度峰值

Fig. 5 Peak accelerations of tunnel under travelling loads with different velocities

### 3.3 行波频率影响分析

为研究行波荷载频率对隧道动力响应的影响, 并考虑到地震动频率基本在 10 Hz 以下, 行波频率分别取 2, 4, 6, 8, 10 Hz。采用傅里叶变换, 将隧道曲线段中点加速度 - 时间曲线转换为幅值 - 频率曲线, 如图 6 所示, 并给出隧道最大弯矩随行波频率变化图, 如图 7 所示。由图 6, 7 可知, 行波频率对隧道加速度响应影响显著, 隧道加速度响应峰值对应的主频与行波频率基本保持一致; 隧道动力响应在行波频率为 2 Hz 时明显大于其余行波频率下的响应。因此, 在抗震设计时应尤其关注地震波低频部分对隧道造成的损坏。

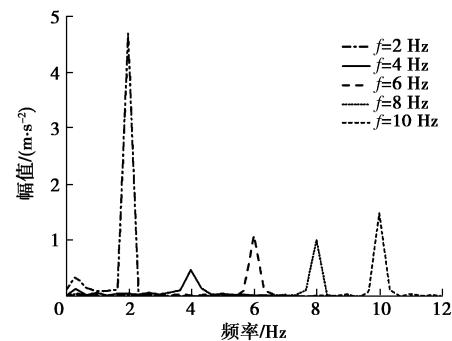


图 6 不同行波频率下隧道加速度响应幅值 - 频率曲线

Fig. 6 Frequency spectra at position of  $x=0$  of tunnel under travelling loads with different frequencies

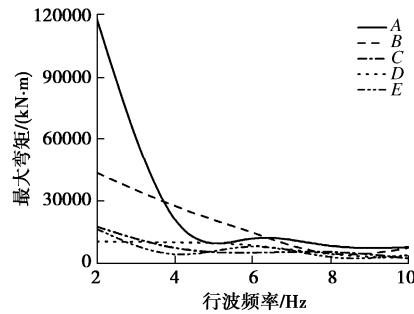


图 7 不同行波频率下隧道最大弯矩响应

Fig. 7 Peak bending moments of tunnel under travelling loads with different frequencies

### 3.4 土 - 结构相对刚度比影响分析

土 - 结构相对刚度比为<sup>[12]</sup>

$$F = \frac{Kl^4}{EI} \quad , \quad (48)$$

式中,  $K$  为地基弹簧刚度,  $l$  为隧道单位长度,  $E$  为隧道衬砌弹性模量,  $I$  为隧道截面惯性矩。考虑 I ~ IV 类场地土范围, 土体弹性模量  $E_m$  分别取为 117~5200 MPa, 泊松比统一取为 0.3, 依据式 (48) 计算对应的土 - 结构相对刚度比。

隧道最大弯矩随土 - 结构相对刚度比变化曲线如

图8所示。由图可知, 随着土-结构相对刚度比的减小, 隧道动力响应明显增大, 由此可见软土地层隧道在地震作用下的动力响应要远大于中硬地层的隧道。当土-结构相对刚度比较小时, 随着土-结构相对刚度比的增大, 隧道最大动力响应降幅较快; 随着土-结构相对刚度比进一步增大, 隧道最大动力响应降幅有所减缓。因此, 设计中可以考虑通过调整土-结构相对刚度比来减小隧道的响应。

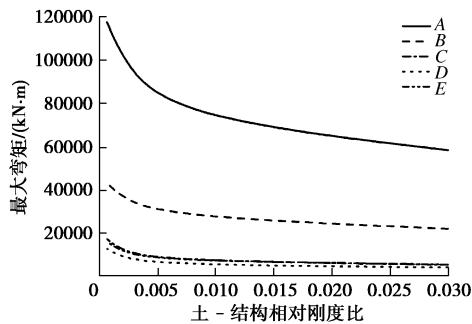


图8 不同土-结构相对刚度比下隧道最大弯矩响应

Fig. 8 Peak bending moments of tunnel under travelling loads with different soil-structure relative stiffness ratios

## 4 结 论

本文为曲线隧道动力响应分析提供了一种新的快速实用简化算法, 即将曲线隧道简化为黏弹性地基上的变曲率有限长均质 Euler-Bernoulli 梁, 通过模态叠加法推导出任意动载作用下曲线隧道的动力响应解析表达式。通过将所得解析解与数值模拟的数值解对比, 验证了所推导解析解的正确性。以行波荷载为例进行参数敏感性分析, 探究了曲率半径、行波波速、行波频率及土-结构相对刚度比对隧道响应的影响规律, 结果表明:

- (1) 随着曲率半径的增大, 隧道动力响应减小, 且曲率的存在会使隧道转弯处动力响应明显增大。
- (2) 行波波速对隧道动力响应的影响并非呈正相关或负相关关系, 而是存在一个临界波速, 且该临界速度与隧道观测点位置有关。
- (3) 行波频率为低频时隧道结构的动力响应显著放大, 因此在抗震设计中应重点关注地震波低频部分对隧道的损坏。
- (4) 土-结构相对刚度比对曲线隧道的动力响应影响显著, 且随着土-结构相对刚度比的减小, 隧道动力响应明显加剧, 说明软土地层的隧道抗震更为突出。

本文所推导出的解析解适用于线性问题分析, 可以简便、快速地对曲线隧道结构的抗震安全性进行评估, 还可以直观地给出各关键参数之间相互关联的解

析关系, 为隧道结构抗震设计与分析提供了理论依据。

## 参考文献:

- [1] 张玉娥, 白宝鸿, 张耀辉, 等. 地铁区间隧道震害特点、震害分析方法及减震措施的探讨[J]. 振动与冲击, 2003(1): 72 - 73, 65, 76, 111. (ZHANG Yu-e, BAI Bao-hong, ZHANG Yao-hui, et al. Study on subway tunnel's behavior due to seismic damage, methods of analyzing seismic response and earthquake-proof means[J]. Journal of Vibration and Shock, 2003(1): 72 - 73, 65, 76, 111. (in Chinese))
- [2] 袁 勇, 包 蕴, 禹海涛, 等. 考虑行波效应的盾构隧道多点振动台试验[J]. 中国公路学报, 2017, 30(8): 174 - 182. (YUAN Yong, BAO Zhen, YU Hai-tao, et al. Multi-point shaking table test on shield tunnels in consideration of wave-passage effect[J]. China Journal of Highway and Transport, 2017, 30(8): 174 - 182. (in Chinese))
- [3] 袁 勇, 禹海涛, 燕 晓, 等. 超长沉管隧道多点振动台试验模拟与分析[J]. 中国公路学报, 2016, 29(12): 157 - 165. (YUAN Yong, YU Hai-tao, YAN Xiao, et al. Multi-point shaking table test simulation and analysis of a super-long immersed tunnel[J]. China Journal of Highway and Transport, 2016, 29(12): 157 - 165. (in Chinese))
- [4] 禹海涛, 袁 勇, 顾玉亮, 等. 非一致激励下长距离输水隧道地震响应分析[J]. 水利学报, 2013, 44(6): 718 - 725. (YU Hai-tao, YUAN Yong, GU Yu-liang, et al. Effect of non-uniform excitation on seismic response of long-distance water-conveyance tunnel[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2013, 44(6): 718 - 725. (in Chinese))
- [5] ST JOHN C M S, ZAHRAH T F. Aseismic design of underground structures[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 1987, 2(2): 165 - 197.
- [6] HASHASH Y M A, HOOK J J, SCHMIDT B, et al. Seismic design and analysis of underground structures[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2001, 16(4): 247 - 293.
- [7] 禹海涛, 吴胤翔, 涂新斌, 等. 盾构隧道纵向地震响应的多尺度分析方法[J]. 中国公路学报, 2019, 33(1): 139 - 144, 152. (YU Hai-tao, WU Yin-xiang, TU Xin-bin, et al. Multi-scale method for longitudinal seismic response analysis of shield tunnels[J]. China Journal of Highway and Transport, 2019, 33(1): 139 - 144, 152. (in Chinese))
- [8] 周彦良. 曲线隧道的地震响应特性及抗震减震方法研究[D]. 西安: 西安科技大学, 2013. (ZHOU Yan-liang. Study on Seismic Response Properties and Anti-Seismic and Seismic-Relieving Measures of Curved Tunnel[D]. Xi'an:

- Xi'an University of Science and Technology, 2013. (in Chinese))
- [9] 穆嘉豪, 王国波. 小半径平面曲线隧道地震响应分析[J]. 岩土工程学报, 2019, 41(增刊 2): 197 - 200. (MU Jia-hao, WANG Guo-bo. Seismic response of small-radius planar curved tunnels[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2019, 41(S2): 197 - 200. (in Chinese))
- [10] FABOZZI S, BILOTTA E, YU H, et al. Effects of the asynchronism of ground motion on the longitudinal behavior of a circular tunnel[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2018, 82: 529 - 541.
- [11] 禹海涛, 张正伟, 李攀, 等. 土岩变化地层长隧道纵向地震响应解析解 [J]. 岩土工程学报, 2019, 41(7): 1244 - 1250. (YU Hai-tao, ZHANG Zheng-wei, LI Pan, et al. Analytical solution for longitudinal seismic responses of long tunnels crossing soil-rock stratum[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2019, 41(7): 1244 - 1250. (in Chinese))
- [12] 禹海涛, 袁勇. 长大隧道地震响应分析与试验方法新进展[J]. 中国公路学报, 2018, 31(10): 19 - 35. (YU Hai-tao, YUAN Yong. Review on seismic response analysis and test methods for long and large tunnels[J]. China Journal of Highway and Transport, 2018, 31(10): 19 - 35. (in Chinese))
- [13] 禹海涛, 蔡创, 张正伟. 任意动载作用下长隧道纵向响应解析解[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2018, 46(1): 1 - 6. (YU Hai-tao, CAI Chuang, ZHANG Zheng-wei. Analytical solutions for long tunnels under arbitrary dynamic loadings[J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2018, 46(1): 1 - 6. (in Chinese))
- [14] CLOUGH R W, PENZIEN J. Dynamics of Structures[M]. the United States of America Computers and Structures, Inc, 2003.
- [15] 姚玲森. 曲线梁[M]. 北京: 人民交通出版社, 1989. (YAO Ling-sen. Curved Beam[M]. Beijing: China Communications Press, 1989. (in Chinese))
- [16] STANTON S C, MANN B P. On the dynamic response of beams with multiple geometric or material discontinuities[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2010, 24(5): 1409 - 1419.
- [17] 志波由紀夫, 川島一彦, 大日方尚巳, et al. 応答変位法によるシールドトンネルの地震時断面力の算定法[C]// 土木学会論文集, 1989: 385 - 394. (YUKIS S, KAZUHIKO K, NAOMI O, et al. Calculation of internal force of structure during earthquake using response displacement method[C]// Proceedings of the Civil Academy, 1989: 385 - 394. (in Japanese))
- [18] ZHANG J, YUAN Y, YU H. Shaking table tests on discrepant responses of shaft-tunnel junction in soft soil under transverse excitations[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2019, 120: 345 - 359.
- [19] 李心熙. 曲线隧道纵向动力响应解析解及其影响因素分析[D]. 上海: 同济大学, 2019. (LI Xin-xi. Analytical Solution for Longitudinal Dynamic Responses of Curved Tunnels and Parametric Analyses[D]. Shanghai: Tongji University, 2019. (in Chinese))
- [20] 公路隧道设计规范 第一册 土建工程: JTG 3370.1—2018 [S]. 北京: 人民交通出版社, 2018. (Specifications for Design of Highway Tunnels Section 1 Civil Engineering: JTG 3370.1—2018[S]. Beijing: China Communications Press, 2018. (in Chinese))
- [21] 范立础, 王君杰, 陈玮. 非一致地震激励下大跨度斜拉桥的响应特征[J]. 计算力学学报, 2001, 18(3): 358 - 363. (FAN Li-chu, WANG Jun-jie, CHEN Wei. Response characteristics of long-span cable-stayed bridges under non-uniform seismic action[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2001, 18(3): 358 - 363. (in Chinese))