

DOI: 10.11779/CJGE2020S1014

水平受荷桩桩身响应的线性方程解及应用分析

李 焰, 吴曙光*, 张四平, 高倩德, 黄 磊

(重庆大学土木工程学院, 重庆 400045)

摘要: 根据 Winkler 地基梁理论, 将地基系数沿着深度方向的任意函数以积分中值定理为原则进行微段常数化, 引入四阶微分方程的张氏解析解, 通过结点内力与位移连续的条件对全桩全结点构建线性方程组, 避免矩阵多次传递即可一次性解得所有结点的内力与位移, 相比幂级数法与有限元法更加简单, 将此过程用 matlab 编制程序进行实现, 通过两个算例验证了线性方程解法在单层地基与多层地基情况下水平受荷桩桩身响应计算的正确性。最后分别在算例基础上更改多组参数, 表明在桩顶水平荷载的作用下, 桩身弯矩最大值、弯矩零点值与位移零点值出现的位置分别受桩顶附近土层抗力、桩中部土层的抗力与整个桩周土层抗力大小控制, 且对于同一种情况下的桩身水平响应而言, 其弯矩零点所出现的位置将比位移零点所出现的位置滞后 (2~3) d。

关键词: 水平受荷桩; Winkler 地基梁; m 法; 矩阵传递法; 线性方程

中图分类号: TU473.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2020)S1-0070-05

作者简介: 李 焰(1993—), 男, 硕士, 主要从事岩土工程方面的研究工作。E-mail: 906075057@qq.com。

Linear equation solution of horizontally loaded piles and its application

LI Yang, WU Shu-guang, ZHANG Si-ping, GAO Qian-de, HUANG Lei

(College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China)

Abstract: According to the Winkler foundation beam theory, the foundation function is constantized by the integral median theorem, and a linear equation system is constructed for the entire pile and all nodes through the condition that the internal forces and displacements of the nodes are continuous. This process is implemented by matlab programming, and two examples are used to verify the correctness of the calculation of the response of the horizontally loaded pile body in the case of single-layer foundation and multi-layer foundation. In the calculation example, multiple sets of parameters are changed, which shows that the location of the maximum value of the bending moment of the pile body, the zero point value of the bending moment and the zero point value of displacement are affected by the resistance of the soil layer near the pile top and the soil layer in the middle of the pile under the horizontal load of the pile top. The resistance is controlled by the resistance of the entire soil layer around the pile, and for the horizontal response of the pile body under the same situation, the position where the bending moment zero appears will lag behind the position where the displacement zero appears by about (2~3)d.

Key words: pile foundation; Winkler foundation beam; m method; matrix transfer method; linear equation

0 引言

在建筑工程领域中, 对于水平荷载作用下桩基的受力分析, 常见有极限地基反力法、弹性地基反力法、复合地基反力法、弹性理论法和 $p-y$ 曲线法等^[1-2]。弹性地基反力法又包括地基系数常数法、 k 法、 c 法、 m 法以及吴恒立^[3]的双参数法。张有龄给出了地基系数为常数时的桩身响应解析解, N.B.ypdh 与众多学者给出了桩身内力与变形的幂级数解, 更有采用^[4]纽玛克法、有限差分法与有限元法来求解桩身内力与变形。

上述常用方法中对于多层地基情况的处理略显粗糙, 如目前建筑桩基^[6]与公路桥涵桩基领域^[7]最常采用各层地基按其地基系数以权重进行折算, 得到一个

地基系数的等效值。近年来, Pise^[5]对双层地基水平受荷桩进行了数值求解, 赵明华等^[8-10]对成层地基中桩的受力与试验做了大量工作, 并尝试用无网格法分析计算, 戴自航等^[11]采用有限元与有限差分进行数值计算, 竺明星等^[12]利用矩阵传递法依次求解多层地基中的桩身各点内力, 詹红志等^[13]也采用类似矩阵传递方法对抗滑桩嵌固段多层岩层进行了计算。

本文不同于先前学者从桩身形函数利用幂级数角度出发, 引入张氏法的解析解函数形式, 利用节点内力变形连续条件, 建立全桩全节点统一矩阵线性方程,

收稿日期: 2020-06-04

*通信作者 (E-mail: wushuguang@cqu.edu.cn)

引入边界条件后一次性求解所有节点的变位与内力, 并将该计算方法应用于多层地基桩基的水平响应计算。

1 线性方程解力学模型

1.1 力学模型建立

不同于竺明星等^[12, 14]建立三参数地基系数模型并利用 Laplace 变换求解桩身响应的方法, 本文在理论推导过程中不特别假定地基系数的分布模式, 但考虑到设计人员使用上的便利性, 以单层地基 m 值与多层地基 m 值分别演示计算过程。

根据 Winkler 理论, 假定地基是服从胡克定律的弹性体, 且每层地基厚度为 h_j , 如图 1 所示。

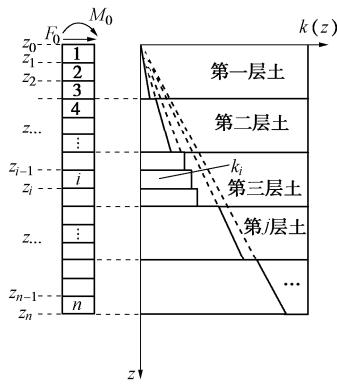


图 1 线性方程力学模型

Fig. 1 Linear equation mechanics model

将桩身沿深度方向分成 n 段, 桩单元依次编号为 $1, 2, \dots, n$, 桩结点编号为 $0, 1, 2, \dots, n$, 结点对应各自坐标值。记桩身水平位移为 $y(z)$, 桩身转角为 $\varphi(z)$, 桩身弯矩为 $M(z)$, 桩身剪力为 $F(z)$, M_0, F_0 表示桩顶作用的弯矩与水平力, M_{i,z_j}, F_{i,z_j} 表示第 i 桩单元的 z_j 节点处的弯矩与剪力, 对于第 i 桩单元, 第 i 段内地基系数 k_i 以该段内的积分中值定理为原则, 即

$$k_i = \frac{\int_{z_{i-1}}^{z_i} k(z) dz}{z_i - z_{i-1}} \quad (1)$$

约定弯矩以桩左侧受拉为正, 剪力以使桩顺时针转动方向为正, 水平位移以坐标正向为正, 而截面转角以逆时针转动为正。

1.2 微分方程及解答

对于第 i 段, 满足如下微分方程:

$$EI \frac{d^4 y_i}{dz^4} + k_i b y_i = 0 \quad (2)$$

令 $A_i = \sqrt{\frac{k_i b}{4EI}}$, 则可得到第 i 段 $z \in [z_i, z_{i-1}]$ 的挠曲线方程 $y_i(z)$ 解析解与挠曲线各阶导数:

$$y_i(z) = C_{i1} e^{-A_i z} \sin(A_i z) + C_{i2} e^{-A_i z} \cos(A_i z) +$$

$$C_{i3} e^{A_i z} \sin(A_i z) + C_{i4} e^{A_i z} \cos(A_i z) \quad (3)$$

将以上各函数表达式整理成矩阵形式, 如式(4):

$$\left. \begin{aligned} y_i &= [f_{i1}(z) \ f_{i2}(z) \ f_{i3}(z) \ f_{i4}(z)] \cdot \\ &\quad [C_{i1} \ C_{i2} \ C_{i3} \ C_{i4}]^T, \\ y^{(1)}_i &= [g_{i1}(z) \ g_{i2}(z) \ g_{i3}(z) \ g_{i4}(z)] \cdot \\ &\quad [C_{i1} \ C_{i2} \ C_{i3} \ C_{i4}]^T, \\ y^{(2)}_i &= [p_{i1}(z) \ p_{i2}(z) \ p_{i3}(z) \ p_{i4}(z)] \cdot \\ &\quad [C_{i1} \ C_{i2} \ C_{i3} \ C_{i4}]^T, \\ y^{(3)}_i &= [q_{i1}(z) \ q_{i2}(z) \ q_{i3}(z) \ q_{i4}(z)] \cdot \\ &\quad [C_{i1} \ C_{i2} \ C_{i3} \ C_{i4}]^T. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

令各系数矩阵表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} [P^*_{i, z_{i-1}}] &= [EI p_{i1, z_{i-1}} \ EI p_{i2, z_{i-1}} \ EI p_{i3, z_{i-1}} \ EI p_{i4, z_{i-1}}], \\ [Q^*_{i, z_{i-1}}] &= [EI q_{i1, z_{i-1}} \ EI q_{i2, z_{i-1}} \ EI q_{i3, z_{i-1}} \ EI q_{i4, z_{i-1}}], \\ [f^*_{i, z_{i-1}}] &= [f_{i1, z_{i-1}} \ f_{i2, z_{i-1}} \ f_{i3, z_{i-1}} \ f_{i4, z_{i-1}}], \\ [g^*_{i, z_{i-1}}] &= [g_{i1, z_{i-1}} \ g_{i2, z_{i-1}} \ g_{i3, z_{i-1}} \ g_{i4, z_{i-1}}]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

则桩身 n 段各个节点处的弯矩、剪力、挠度与转角记成: $[B] = [V^*] \cdot [C^*]$, 其中

$$[B] = \begin{bmatrix} M_{1,0} & \dots & M_{n,n-1} \\ M_{1,1} & \dots & M_{n,n} \\ F_{1,0} & \dots & F_{n,n-1} \\ F_{1,1} & \dots & F_{n,n} \\ y_{1,0} & \dots & y_{n,n-1} \\ y_{1,1} & \dots & y_{n,n} \\ \varphi_{1,0} & \dots & \varphi_{n,n-1} \\ \varphi_{1,1} & \dots & \varphi_{n,n} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$[V^*] = \begin{bmatrix} [P^*_{1, z_0}] & \dots & [P^*_{n, z_{n-1}}] \\ [P^*_{1, z_1}] & \dots & [P^*_{n, z_n}] \\ [Q^*_{1, z_0}] & \dots & [Q^*_{n, z_{n-1}}] \\ [Q^*_{1, z_1}] & \dots & [Q^*_{n, z_n}] \\ [f^*_{1, z_0}] & \dots & [f^*_{n, z_{n-1}}] \\ [f^*_{1, z_1}] & \dots & [f^*_{n, z_n}] \\ [g^*_{1, z_0}] & \dots & [g^*_{n, z_{n-1}}] \\ [g^*_{1, z_1}] & \dots & [g^*_{n, z_n}] \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$[C^*] = \begin{bmatrix} [C_{1,j}] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [C_{2,j}] & \dots & [0] \\ [0] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [0] & \dots & [C_{n,j}] \end{bmatrix}_{j=1,2,3,4}. \quad (8)$$

1.3 全桩线性方程组的构建与解答

保证桩身每一结点处内力与位移是连续的, 以此思路建立桩身全结点的线性方程组如下:

$$\left. \begin{array}{l} M_{i, z_i} = M_{i+1, z_i}, \\ F_{i, z_i} = F_{i+1, z_i}, \\ y_{i, z_i} = y_{i+1, z_i}, \\ \varphi_{i, z_i} = \varphi_{i+1, z_i} \end{array} \right\} \quad (9)$$

最终记成如下矩阵形式: $[\xi^*] \cdot [C] = [H]$, 其中

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_{1,j}] \\ [C_{2,j}] \\ [C_{3,j}] \\ \dots \\ [C_{n-1,j}] \\ [C_{n,j}] \end{bmatrix}_{j=1,2,3,4}, \quad [H] = \begin{bmatrix} M_0 \\ F_0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ H_{n-1,z_n} \\ H_{n,z_n} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$[\xi^*] = \begin{bmatrix} [P^*_{1, z_0}] & [0] & [0] \\ [Q^*_{1, z_0}] & [0] & [0] \\ [P^*_{1, z_1}] & -[P^*_{2, z_1}] & [0] \\ [Q^*_{1, z_1}] & -[Q^*_{2, z_1}] & [0] \\ [f^*_{1, z_1}] & -[f^*_{2, z_1}] & [0] \\ [g^*_{1, z_1}] & -[g^*_{2, z_1}] & [0] \\ [0] & \dots & \dots \\ [0] & [0] & [\xi^*_{4n-1,n}] \\ [0] & [0] & [\xi^*_{4n,n}] \end{bmatrix}. \quad (11)$$

上式矩阵运算表示了全桩全结点内力与位移值需要满足该线性方程组, 引入桩顶与桩端的边界条件后, 等式右侧矩阵也为常数阵, 这样可通过 Gauss 消元等多种方法求解线性方程组, 解得桩身每一段的四组参数 C_{11} , C_{12} , C_{13} , C_{14} , 再将系数 C 矩阵回代式(8)即可。

2 基于 m 法的设计计算与结果验证

2.1 单层地基算例验证

某建筑物^[2]采用桩基基础, 直径 $d=1.5$ m, 埋入并支持在非岩石类土中, 入土深度 $h=15$ m, 桩头在地面处自由, 作用有水平荷载 $H_0=60$ kN 和 $M_0=700$ kN·m, C25 级混凝土的弹性模量 $E_c=2.8 \times 10^4$ MPa= 2.8×10^7 kN/m², 地基的反力系数的比例系数 $m=9400$ kN/m⁴, 土的内摩擦角 $\varphi=22^\circ$, 黏聚力 $c=15$ kN/m², 重度 $\gamma=20$ kN/m³。

$$b = K_\varphi K_0 d = 0.9(1.5+1) = 2.25 \text{ m},$$

$$EI = \frac{0.85 \times 2.8 \times 10^7 \times \pi \times 1.5^4}{64} = 59.3 \times 10^5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2.$$

分别将 n 取 5, 10, 15, 20 进行了桩身内力与位移计算, 本文法计算结果与传统 m 法计算的桩身弯矩绘制成曲线图, 如图 2 所示。按规范法计算桩身最大弯矩为 766.9 kN·m, 将桩等分 20 段后桩身弯矩最大值为 762.8 kN·m, 相比规范法误差 0.53%。从上图 2 看出, 桩身弯矩随深度增加总体呈现先上升后下降的过程, 弯矩极值出现在距离桩顶(1~3) d 范围之间 (d 为桩身直径), 弯矩零点位于距离桩顶 6 d 位置左右。

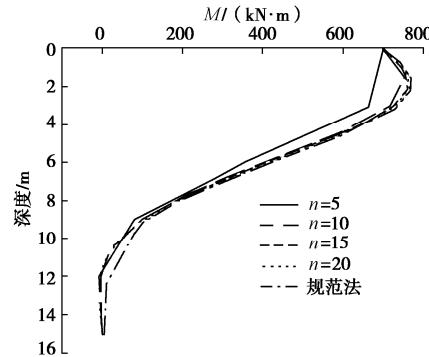


图 2 不同分段数桩身弯矩

Fig. 2 Moments of pile body with different numbers of sections

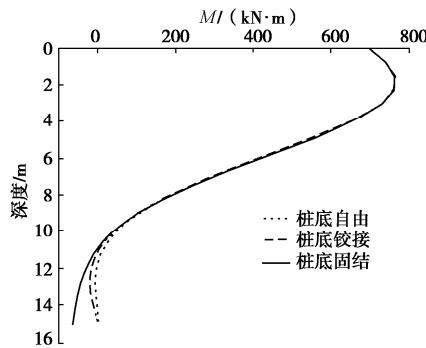


图 3 不同桩端约束的桩身弯矩

Fig. 3 Moments of pile body restrained by different pile ends

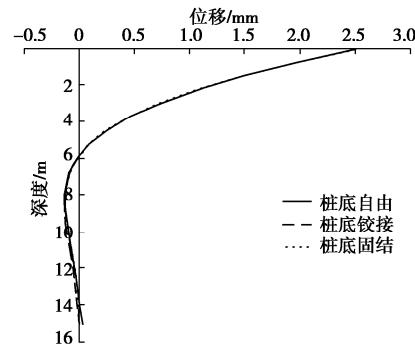


图 4 不同桩端约束的桩身位移

Fig. 4 Displacements of pile body with different pile end constraints

图 3, 4 中看出 3 种端部约束下的弯矩、位移曲线重合度较高, 仅在桩端附近处弯矩曲线出现了分叉发展的趋势。位移零点出现在距离桩顶 $4d$ 位置处, 相比桩身弯矩的 $6d$ 变化范围缩小了 33.3%。本算例所得的桩身弯矩极值、弯矩与位移零点所在的桩身位置符合目前国内外学者的研究结果, 如赵明华等^[15-16]曾建议桩影响范围取 $3\sim 5d$, 冯忠居等^[17]建议取 $(2\sim 8)d$ 等。

2.2 多层地基算例验证

某圆形^[12, 18]截面灌注桩^[10]桩径 $d=1.0\text{ m}$, 地面处桩顶剪力 $Q=150\text{ kN}$, 弯矩 $M=0$, 桩的弹性模量 $E=2.1675\times 10\text{ kN/m}^2$ 。桩侧有两层地基土体: 第一层为流塑状回填土, 层厚为 2.0 m , 相应的地基反力系数 m 为 3000 kN/m^4 ; 第二层为硬塑状黏性土, 桩身在该层土体中的长度为 10.0 m , 相应的地基反力系数为 20000 kN/m^4 。

表 1 为不同计算方法的计算结果, 从中可知本文线性方程解与精确解之间的桩顶位移误差为 2.3%, 最大弯矩误差为 0.285%。

表 1 不同计算方法结果对比

Table 1 Results of different calculation methods

计算方法	桩顶位移 /mm	最大弯矩 /(kN·m)	最大弯矩位 置/m
精确解 ^[18]	4.3735	336.81	3
规范解 ^[6]	3.0156	238.95	3
挠度加权换算 ^[9]	4.2093	343.83	3
有限差分法 ^[11]	4.2989	337.60	3
杆系有限元法 ^[11]	4.2520	336.07	3
矩阵传递法 ^[12]	4.2990	337.60	3
本文法	4.2703	335.85	3

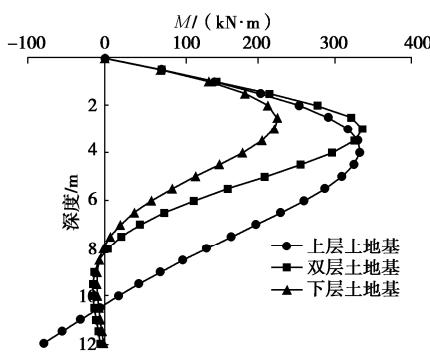


图 5 不同地层情况桩身弯矩

Fig. 5 Moments of pile body in different strata

笔者在本算例基础上, 改变地层情况再次进行桩身弯矩与位移计算, 分别将地层视为全为上层土的单一地层与全为下层土的单一地层(简称“上层土地基”与“下层土地基”), 将计算结果分别绘制成曲线图 5,

6 以对比分析。由图 5 可以看出, 桩身弯矩极值出现在距离桩顶 $(1\sim 5)d$ 之间, 本例中双层地基情况与“下层土地基”情况都在 $8d$ 位置处达到了弯矩零点; “下层土地基”与“两层土地基”均在深度 $5d$ 处为位移零点。

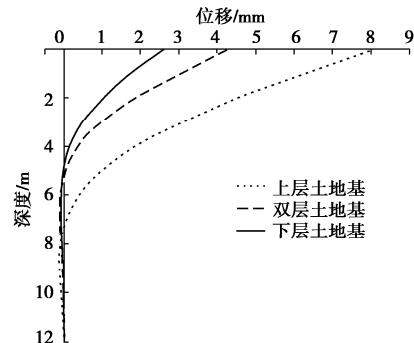


图 6 不同地层情况桩身位移

Fig. 6 Pile displacements in different strata

3 结 论

假设地基为弹性材料, 分段建立梁挠曲线微分方程, 通过结点内力与位移的连续条件一次性建立桩身全结点的线性方程组, 求解得到各点内力与位移。以两个算例验证了线性方程解法在单层地基与多层地基中桩身响应计算的正确性, 并对桩底不同边界条件、桩身周围不同地层进行了计算与讨论, 得出如下结论:

- (1) 在桩顶水平荷载的作用下, 桩身弯矩最大值出现在距离桩顶 $(1\sim 5)d$ 范围内, 桩顶附近土层抗力越差, 最大弯矩所出现的位置将越深。
- (2) 在距离桩顶 $(6\sim 8)d$ 位置附近将出现弯矩函数零点, 且下降段所处区间受桩中部土层的抗力大小控制。
- (3) 桩身位移最大值出现在桩顶, 距桩顶 $5d$ 位置处出现位移零点。桩端不同的边界条件对桩身的位移影响较小, 而桩周土层的抗力大小对桩身的位移起到控制作用。

- (4) 同一种情况下的桩身水平响应, 其弯矩零点所出现的位置将比位移零点所出现的位置滞后 $(2\sim 3)d$ 。

参考文献:

- [1] ROWE R K. Pile foundation analysis and design: Book review[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1981, **18**(3): 472-473.
- [2] 龚晓南. 桩基工程手册[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2016. (GONG Xiao-nan, Handbook of Pile Foundation of Engineering[M]. Beijing: China Architecture and Building

- Press, 2016. (in Chinese))
- [3] 吴恒立. 计算弹性地基中推力桩的双参数法(推力桩计算理论研究报告之一)[J]. 重庆交通大学学报(自然科学版, 1983(1): 11 - 24. (WU Heng-li. Double-parameter method used in calculating the laterally loaded pile in the elastic foundation[J]. Journal of Chongqing Jiaotong University, 1983(1): 11 - 24.(in Chinese)))
- [4] 竹下淳. 横向重な受けの有限長ケイの数值解法[J]. 土木技术, 1966, 24(5): 32 - 46. (TAKESHITA Jun. Numerical solution of finite-length piles under lateral and vertical loads[J]. Civil Engineering Technology, 1966, 24(5): 32 - 46. (in Japanese))
- [5] PISE P J. Laterally loaded piles in a two-layer soil system[J]. J Geotech Engng Div, ASCE, 1982, 108: 1177 - 1181.
- [6] 中国建筑科学研究院. 建筑桩基技术规范: JGJ 94—2008[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2008. (China Academy of Building Sciences. Technical Code for Building Pile Foundation : JGJ 94 — 2008[S]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2008. (in Chinese))
- [7] 公路桥涵地基与基础设计规范: JTGD63—2007 [S]. 北京: 人民交通出版社, 2007. (Code for Design of Ground Base and Foundation of Highway Bridges and Culverts: JTGD63—2007[S]. Beijing: China Communications Press, 2007. (in Chinese))
- [8] 赵明华. 多层地基及横向荷载下桩的分析[J]. 中南公路工程, 1986(4): 54 - 60. (ZHAO Ming-hua. Analysis of pile under multi-layer foundation and transverse load[J]. Central South Highway Engineering, 1986(4): 54 - 60. (in Chinese))
- [9] 赵明华, 王贻荪, 肖鹤松. 多层地基横向受荷桩的分析[J]. 建筑结构, 1994(2): 6 - 10. (ZHAO Ming-hua, WANG Yi-sun, XIAO Sun-he. Analysis of laterally loaded pile in multi-layer foundation[J]. Building Structure, 1994(2): 6 - 10. (in Chinese))
- [10] 彭文祥, 赵明华. 成层地基中倾斜荷载作用下桩的受力研究[J]. 中南公路工程, 1999(1): 27 - 30. (PENG Wen-xiang, ZHAO Ming-hua. Study on the force of pile under inclined load in layered foundation[J]. Central South Highway Engineering, 1999(1): 27 - 30.(in Chinese))
- [11] 戴自航, 陈林靖. 多层地基中水平荷载桩计算 m 法的两种数值解 [J]. 岩土工程学报, 2007, 29(5): 690 - 696. (DAI Zi-hang, CHEN Lin-qing. Two numerical solutions of laterally loaded piles installed in multi-layered soils by m method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, 29(5): 690 - 696. (in Chinese))
- [12] 竺明星, 龚维明, 何小元. 成层地基土中水平受荷桩身响应的矩阵传递解[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(增刊 2): 46 - 50. (ZHU Ming-xing, GONG Wei-ming, HE Xiao-yuan. Transfer matrix solutions for responses of laterally loaded piles in multilayered soil deposits[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, 37(S2): 46 - 50. (in Chinese))
- [13] 詹红志, 王亮清, 王昌硕, 等. 考虑滑床不同地基系数的抗滑桩受力特征研究[J]. 岩土力学, 2014, 35(增刊 2): 250 - 256. (ZHAN Hong-zhi, WANG Liang-qing, WANG Chang-shuo, et al. Study of mechanical characters of anti-sliding piles considering different foundation coefficients of sliding bed[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, 35(S2): 250 - 256. (in Chinese))
- [14] 竺明星, 龚维明, 何小元, 等. 纵横向受荷基桩变形内力的矩阵传递解[J]. 岩土力学, 2014, 35(11): 3281 - 3288. (ZHU Ming-xing, GONG Wei-ming, HE Xiao-yuan, et al. Matrix transfer solutions to deformation and internal forces of piles under combined vertical and lateral loads[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, 35(11): 3281 - 3288. (in Chinese))
- [15] 赵明华, 邹新军, 罗松南, 等. 横向受荷桩桩侧土体位移应力分布弹性解[J]. 岩土工程学报, 2004, 26(6): 767 - 771. (ZHAO Ming-hua, ZHOU Xin-jun, LUO Song-nan, et al. Elastic analytic solution to the displacement and stress distribution in the soil around laterally loaded piles[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, 26(6): 767 - 771. (in Chinese))
- [16] 杨明辉. 岩质陡坡桥梁桩基承载机理及其分析方法研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2006. (YANG Ming-hui. Study on bearing mechanism and analysis method of pile foundation of rock steep slope bridge[D]. Changsha: Hunan University, 2006. (in Chinese))
- [17] 冯忠居, 赵明华. 特殊地区基础工程[M]. 北京: 人民交通出版社, 2008. (FENG Zhong-ju, ZHAO Ming-hua. Basic Engineering in Special Area[M]. Beijing: China Communications Press, 2008. (in Chinese))
- [18] 赵明华. 桥梁桩基计算与检测[M]. 北京: 人民交通出版社, 2000. (ZHAO Ming-hua. Calculation and Test of Bridge Pile Foundation[M]. Beijing: China Communications Press, 2000. (in Chinese))

(编校: 明经平)