

DOI: 10.11779/CJGE202010005

基于变截面孔隙模型描述岩土介质的渗透及持水特性

张 昭¹, 程靖轩¹, 刘奉银¹, 齐吉琳^{1, 2}, 柴军瑞³, 李会勇⁴

(1. 西安理工大学岩土工程研究所, 陕西 西安 710048; 2. 北京建筑大学土木与交通工程学院, 北京 100044; 3. 省部共建西北旱区生态水利国家重点实验室(西安理工大学), 陕西 西安 710048; 4. 中国水电基础局有限公司, 天津 301700)

摘 要: 为研究孔隙变截面特征对岩土介质渗透及持水特性的影响, 先构建了圆柱形孔喉-大孔隙联合体组成的变截面孔隙模型。其次, 假定孔径分布服从分形分布, 基于构建的变截面孔隙模型推得岩土介质的饱和渗透系数函数、相对渗透系数函数及滞回持水曲线的理论表达式。最后, 利用已有文献中 4 种砂岩、8 种土的饱和-非饱和渗透试验以及 3 种土的减、增湿持水试验(含一种黏土的补充持水试验)结果分别验证了理论表达式在表征饱和和渗透率与孔隙率关系、相对渗透系数与有效饱和度关系以及滞回持水特性时的有效性, 通过计算饱和渗透率及相对渗透系数的预测值与其实测值之间的均方根偏差, 发现理论表达式在描述 4 种砂岩和 8 种土的饱和-非饱和渗透特性时优于 Kozeny-Carman 公式和 Assouline 模型。

关键词: 岩土介质; 渗透系数函数; 持水曲线; 变截面孔隙; 有效饱和度

中图分类号: TU441 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2020)10-1807-10

作者简介: 张 昭(1983—), 男, 陕西西安人, 博士, 副教授, 主要从事非饱和土水力特性的研究工作。E-mail: zhangzhao_1983@126.com。

Variable cross-sectional pore model to describe hydraulic conductivity and water retention behaviors of geotechnical materials

ZHANG Zhao¹, CHENG Jing-xuan¹, LIU Feng-yin¹, QI Ji-lin^{1, 2}, CHAI Jun-rui³, LI Hui-yong⁴

(1. Institute of Geotechnical Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 2. College of Civil and Transportation Engineering, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing 100044, China; 3. State Key Laboratory of Eco-hydraulics in Northwest Arid Region of China (Xi'an University of Technology), Xi'an 710048, China; 4. Sinohydro Foundation Engineering Co., Ltd., Tianjin 301700, China)

Abstract: To investigate the contribution of their non-uniform cross-section to hydraulic conductivity and water retention behaviours for geotechnical materials, the pores can be simplified as variable cross-sectional assembly of cylindrical macro-pores with pore throats. In addition, this variable cross-sectional pore model can provide theoretical expressions for both the saturated-relative hydraulic conductivity functions and the water retention curves based on a fractal pore size distribution. Finally, these theoretical expressions are validated against both the saturated-unsaturated permeability data for four sandstones and eight soils and the hysteretic water retention data (including the supplementary water retention tests on a clay) for three soils in the previous literatures. The results of RMSD between the predicted and the measured values of saturated permeability and relative hydraulic conductivity show that these new expressions are superior to Kozeny-Carman equation and Assouline model for describing the evolution of saturated permeability with porosity and the relation of relative hydraulic conductivity with effective degree of saturation.

Key words: geotechnical material; hydraulic conductivity function; water retention curve; variable cross-sectional pore; effective degree of saturation

0 引 言

岩土介质的渗透及持水特性可分别用渗透系数函数与持水曲线描述, 前者在饱和状态时表示饱和渗透系数 k_s 与孔隙率 n (或孔隙比 e 、干密度 ρ_d) 的关系, 在非饱和状态时表示相对渗透系数 k_r (非饱和渗透系

基金项目: 国家自然科学基金项目(41877278, 51679198); 国家留学基金项目(201908610043); 陕西省教育厅重点实验室科研计划项目(18JS071); 西安理工大学省部共建西北旱区生态水利国家重点实验室项目(QNZX-2019-07, 2019KJCXTD-12)
收稿日期: 2018-05-30
修改稿返回日期: 2020-04-11
*通信作者(E-mail: fylu@pub.xaonline.com)

数与饱和渗透系数 k_s 之比)与湿度(体积含水率 θ_w , 饱和度 S 或有效饱和度 S_e 等)或基质吸力 ψ 的关系, 后者表示基质吸力与湿度的关系, 这两者的模型描述是岩土介质(如非饱和土)水力特性的重要问题。

依据岩土介质的饱和渗透试验结果, Kozeny和Carman先后于1927年和1937年将岩土颗粒间孔隙假定为等径圆柱形毛细管, 基于Navier-Stokes方程推得饱和渗透系数 k_s 与孔隙率 n 的幂函数关系, 即Kozeny-Carman公式^[1](下文简称KC公式), 并广泛应用于砂岩、碎石土、砂土、粉土和部分黏土的饱和渗透特性描述中。另一方面, 土壤学和岩土工程领域学者从岩土介质的非饱和渗透试验结果出发, 利用试验分析和理论推导等手段较为系统地研究了相对渗透系数函数的构建, 主要有5种函数模型: ① 经验模型^[2]; ② 基于孔径分布及持水曲线的模型: Mualem^[3]基于圆柱形毛细管假定(类似于KC公式所用假定)推得了非饱和土的相对渗透系数函数; Assouline^[4]认为土的孔隙结构经由岩石均匀随机碎裂而成, 基于已提出持水曲线模型^[5]的二阶矩构建了预测相对渗透系数的统计函数模型; Hu等^[6]利用Mualem^[3]引入的孔隙连通-迂曲参数, 研究了孔隙尺寸分布变化对相对渗透系数函数的影响; ③ 基于分形理论的模型^[7-8]; ④ 考虑土壤溶液电导率的模型^[9]; ⑤ 模拟低含水率范围内薄膜流动模型^[10]。

上述非饱和渗透系数函数研究虽已取得了很多颇具价值的研究成果, 却大多认为孔隙截面尺寸沿水分流动路径不变, 并不符合实际中岩土介质孔隙的变截面特征, 从而影响对饱和-非饱和渗透系数函数规律的预测效果。不仅如此, 岩土介质的持水及非饱和渗透特性也存在显著的滞回现象, 主要表现为持水曲线以及用基质吸力表示的相对渗透系数函数在减、增湿过程中不唯一, 从而影响孔隙内水分的分布和流动特征^[11]。该现象与减、增湿过程中的水分运动历史有关, 可能由孔隙的变截面特征(亦称瓶颈效应)引发^[12]。针对这种滞回现象的模型描述, 土壤学和岩土工程领域学者基于干湿循环试验和理论推导等手段构建了经验模型^[13]、域模型^[14]、外推模型^[15]、边界面塑性模型^[16]和细观模型^[17]。然而, 如何在滞回模型中定量考虑孔隙变截面特征的影响仍有待深入研究。

为此, 先将岩土介质中的孔隙简化为圆柱形孔喉-大孔隙联合体组成的变截面孔隙, 既可描述岩土介质的饱和-非饱和渗透特性, 亦因存在孔喉而可考虑孔隙的变截面特征对滞回特性的影响。其次, 基于该孔隙模型推导饱和渗透系数函数、相对渗透系数函数以及滞回持水曲线的理论表达式。最后, 利用已有文献中不同种岩土介质的饱和-非饱和渗透试验及减、增湿持水试验结果分别验证这3种表达式的有效性。

1 变截面孔隙模型对渗透系数函数与持水曲线的预测方法

预测岩土介质的渗透系数函数与持水曲线的关键在于构建变截面孔隙模型。为此, 先定义岩土介质中孔喉和大孔隙的几何特征, 以描述水分在单个孔隙内的分布和流动特征, 进而依据室内试验制备的圆柱形试样典型特征, 构造半径和长度分别为 R 和 L 的圆柱形表征体元, 并假定其孔隙半径服从分形分布(图1), 力图推导关于孔隙率的饱和渗透系数函数、关于有效饱和度的相对渗透系数函数以及用有效饱和度表示的持水曲线的理论表达式。

1.1 水分在变截面孔隙内的分布及流动特征

如图1(a)所示, 将岩土介质的孔隙简化为 M 个圆柱形孔喉-大孔隙联合体依次组成的变截面孔隙(总长度为 L), 其中每个圆柱形孔喉(半径为 ar , 长度为 cl)-大孔隙(半径为 r)联合体的长度为 l , 故 $Ml=L$ 。由此, 单个变截面孔隙的半径沿其长度方向(即 x 方向)的变化规律可描述为

$$r(x) = \begin{cases} ar & x \in [0 + 2m\pi, cl + 2m\pi) \\ r & x \in [cl + 2m\pi, l + 2m\pi] \end{cases} \quad (1)$$

式中 a 为孔喉的径向系数($0 \leq a \leq 1$), 表征孔喉半径较大孔隙半径的折减比例; c 为孔喉的长度系数($0 \leq c \leq 1$), 表征孔喉在其与大孔隙组成的联合体中所占长度比例; $m=0, 1, \dots, M-1$ 。需注意: 若 $c=1$ 或 $c=0$, 即可得到半径为 ar 或 r 的等径孔隙模型。

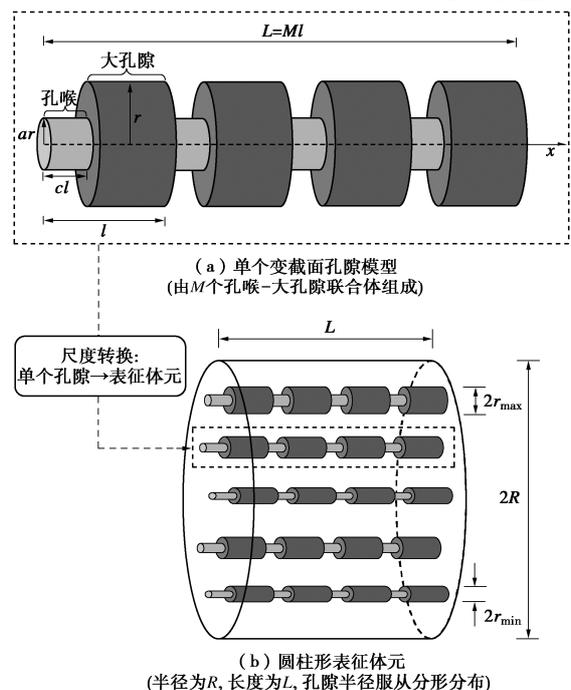


图1 岩土介质的圆柱形表征体元及其中单个变截面孔隙的几何参数

Fig. 1 Geometries of cylinder representative elementary volume and a single variable cross-sectional pore for geomaterials

基于上述对变截面孔隙的几何形状描述, 单个变截面孔隙的体积 V_p 可对其截面沿长度 L 积分得

$$V_p = M \left[\int_0^{cl} \pi(ar)^2 dx + \int_{cl}^l \pi r^2 dx \right] = L\pi r^2 \xi_v, \quad (2a)$$

$$\xi_v = (a^2 - 1)c + 1, \quad (2b)$$

式中, ξ_v 为孔隙体积控制参数 ($0 \leq \xi_v \leq 1$), 描述单个变截面孔隙因存在孔喉而使其体积减小的程度。 ξ_v 的密度分布如图 2 (a) 所示, 这种孔隙体积 V_p 随系数 c 减小或系数 a 增大趋于增大。

依据文献[18], 假定水分服从层流规律, 不考虑其流动的敛散性, 则水分在单个变截面孔隙内的体积流量 Q_p 可近似表示为

$$Q_p = \frac{\rho_w g}{\mu_w} \left[\frac{M}{L} \left(\int_0^{cl} \frac{8}{\pi a^4 r^4} dx + \int_{cl}^l \frac{8}{\pi r^4} dx \right) \right]^{-1} \frac{\Delta h}{L}, \quad (3)$$

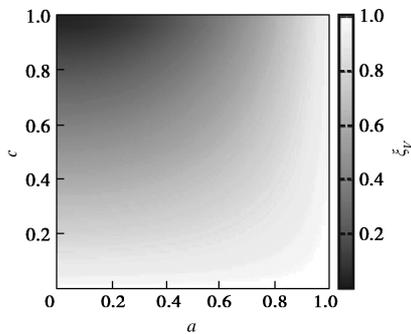
式中, ρ_w 为水分密度, g 为重力加速度, μ_w 为水分的动力黏滞系数, Δh 表示沿这种孔隙的水头差。

将式 (1) 代入式 (3) 进一步整理可得

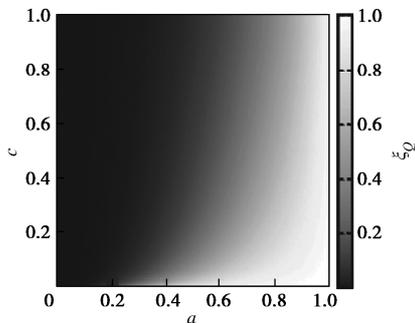
$$Q_p = \xi_Q \rho_w g \pi r^4 \Delta h / (8\mu_w L), \quad (4a)$$

$$\xi_Q = a^4 / [c + a^4(1 - c)], \quad (4b)$$

式中, ξ_Q 为孔隙流量控制参数 ($0 \leq \xi_Q \leq 1$), 描述单个变截面孔隙因存在孔喉而使其中水分体积流量减小的程度。 ξ_Q 的密度分布如图 2 (b) 所示, 当系数 a 减小时, 水分的体积流量 Q_p 随之减小。



(a) ξ_v 的密度分布



(b) ξ_Q 的密度分布

图 2 孔隙体积和流量控制参数 (ξ_v 和 ξ_Q) 的密度图

Fig. 2 Density plots of volume and flow rate parameters for pore (ξ_v and ξ_Q)

对比图 2 (a), 2 (b), a, c 这两个系数以不同方

式控制着岩土介质的孔隙体积以及水分的体积流量, 例如, 同时减小 a 和 c 虽对孔隙体积的影响较小, 但可显著减小水分的体积流量; 此外, 当 $a=1$ 或 $c=0$ 时, $\xi_v = \xi_Q = 1$, 此时式 (2) 和 (4) 分别描述半径为 r 的等径孔隙体积及水分在其中的体积流量。

1.2 由单个孔隙尺度向表征体元尺度过渡的岩土介质渗透特性描述

如图 1 (b) 所示, 表征体元的孔隙结构 (半径为 R) 由一簇变截面孔隙模型组成, 而构成单个变截面孔隙模型中的大孔隙半径 r 存在最大、最小值 (r_{\max} 和 r_{\min})。依据文献[19]可假定表征体元的累计孔隙半径分布服从分形规律:

$$N = (r/R)^{-D}, \quad (5)$$

式中, N 为孔隙数, D 为分维数, 是表征孔径分布的几何参数, 可用于描述岩土介质中水分的分布与流动特征^[7] ($1 < D < 2$, 2.4 节将讨论所选不同种岩土介质的分维数取值范围)。需注意: 若 $r=R$, 则 $N=1$ 且表征体元完全被单个孔隙占据; 若 $r=0$, 则表征体元包含无穷多个孔隙。

对式 (5) 关于 r 求微分, 可得半径在 r 至 $r + dr$ 变化范围内的孔隙数:

$$dN = -DR^D r^{-D-1} dr, \quad (6)$$

式中, 负号表示孔隙数随孔隙半径增大而减少。

表征体元的孔隙率 n 可依据其定义算得

$$n = \frac{\text{孔隙簇体积}}{\text{表征体元的体积}} = \frac{\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} V_p (-dN)}{\pi R^2 L}. \quad (7)$$

将式 (2) 和式 (6) 代入式 (7), 即可推得表征体元的孔隙率 n 表达式:

$$n = \xi_v n_{(\text{等径})}, \quad (8a)$$

$$n_{(\text{等径})} = D(r_{\max}^{2-D} - r_{\min}^{2-D}) / [(2-D)R^{2-D}], \quad (8b)$$

式中, $n_{(\text{等径})}$ 表示等径圆柱形孔隙构成的表征体元孔隙率 (即 $a=1$)。

水分通过表征体元的体积流量 Q 可通过对式 (4) 所述水分在单个孔隙内的体积流量在整个孔径范围积分而得

$$Q = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} Q_p (-dN) = \frac{\pi \xi_Q \rho_w g DR^D (\Delta h) (r_{\max}^{4-D} - r_{\min}^{4-D})}{8\mu_w L(4-D)}. \quad (9)$$

另一方面, 依据Darcy定律, 水分通过表征体元的体积流量 Q 亦可表示为

$$Q = k_s (\Delta h / L) \pi R^2, \quad (10)$$

式中, k_s 为饱和渗透系数。联立式 (9), (10), 可得 k_s 的表达式:

$$k_s = \xi_Q k_{s(\text{等径})}, \quad (11a)$$

$$k_{s(\text{等径})} = \rho_w g D (r_{\max}^{4-D} - r_{\min}^{4-D}) / [8\mu_w R^{2-D} (4-D)], \quad (11b)$$

式中, $k_{s(\text{等径})}$ 表示等径圆柱形孔隙构成的表征体元的饱和渗透系数。

通过对比分析式 (8) 和 (11) 可知, ξ_r 和 ξ_Q 可使表征体元的宏观特性 (n 和 k_s) 发生变化。由图2亦可知, 当参数 a 和 c 在 $0 \sim 1$ 范围取值时, ξ_Q 总小于 ξ_r , 因此变截面孔隙模型可描述孔隙率相同、渗透特性不同的岩土介质, 例如, 黏土和砂土可能具有相同的孔隙率, 但其渗透系数相差若干个数量级^[20]。

依据文献[19], 对大多数岩土介质, $r_{\min} / r_{\max} < 10^{-2}$, 故可假定 r_{\min} 远小于 r_{\max} , 由此可忽略式 (8b) 和 (11b) 中的 r_{\min}^{2-D} 和 r_{\min}^{4-D} 项, 进而联立简化后的式 (8a) 和 (11a) 以消去 r_{\max} , 即可推得 k_s 和 n 之间的关系:

$$k_s = \alpha \xi_Q (n / \xi_r)^{(4-D)/(2-D)}, \quad (12a)$$

$$\alpha = \rho_w g D R^2 (2 / D - 1)^{(4-D)/(2-D)} / [8 \mu_w (4 - D)]. \quad (12b)$$

需注意: 式 (12a) 中 n / ξ_r 的指数 $(4 - D) / (2 - D)$ 大于 3。当 n / ξ_r 的指数取极限值 3 时, 式 (12) 与 KC 公式类似。为此, 后文 2.1 节将对比分析式 (12) 与 KC 公式对岩土介质饱和和渗透试验结果的预测效果。

1.3 对持水曲线的预测

由于岩土介质的孔径存在变化, 故减、增湿试验过程中测得的持水曲线存在显著的滞回特性。基于图 1 所示的孔隙形状以及式 (1) 即可将滞回特性引入持水曲线的理论表达式中。依据毛细原理, 对于被水分充满的等径孔隙, 孔隙半径 r^* 与基质吸力 ψ 之间存在如下关系:

$$\psi = 2\sigma_w \cos \theta / r^*, \quad (13)$$

式中, σ_w 为水分的表面张力, θ 为固-液接触角。

为描述边界减湿持水曲线, 笔者认为表征体元首先处于饱和状态, 随后在基质吸力 ψ 状态下开始排水。这里假定: 当孔喉半径 $ar > r^*$ 时, 变截面孔隙内的水分已完全排出; 当 $r_{\min} \leq$ 大孔隙半径 $r \leq (r^* / a)$ 时, 变截面孔隙仍被水分充满。因此, 依据式 (2) 和 (6), 用边界减湿阶段的有效饱和度 $S_{e(d)}$ 表示的持水曲线可描述为

$$S_{e(d)} = \frac{\int_{r_{\min}}^{r^*/a} V_p(-dN)}{\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} V_p(-dN)} = \frac{(r^*/a)^{2-D} - r_{\min}^{2-D}}{r_{\max}^{2-D} - r_{\min}^{2-D}}. \quad (14)$$

将式 (13) 代入式 (14) 可得

$$S_{e(d)} = \begin{cases} 1 & \left(\psi < \frac{\psi_{\min}}{a} \right) \\ \frac{(a\psi)^{D-2} - \psi_{\max}^{D-2}}{\psi_{\min}^{D-2} - \psi_{\max}^{D-2}} & \left(\frac{\psi_{\min}}{a} \leq \psi \leq \frac{\psi_{\max}}{a} \right) \\ 0 & \left(\psi > \frac{\psi_{\max}}{a} \right) \end{cases}, \quad (15)$$

$$\psi_{\min} = 2\sigma_w \cos \theta / r_{\max}; \quad \psi_{\max} = 2\sigma_w \cos \theta / r_{\min}, \quad (16)$$

式中, ψ_{\min} 和 ψ_{\max} 分别表示 r_{\max} 和 r_{\min} 定义的基质吸力

最小和最大值。

类似的, 为描述边界增湿持水曲线, 可认为表征体元首先处于干燥状态, 随后在基质吸力 ψ 状态下开始吸水, 直至大孔隙半径 r 小于 r^* 时, 变截面孔隙被水分完全充满。因此, 用有效饱和度 $S_{e(w)}$ 表示的边界增湿持水曲线可描述为

$$S_{e(w)} = \begin{cases} 1 & (\psi < \psi_{\min}) \\ \frac{\psi^{D-2} - \psi_{\max}^{D-2}}{\psi_{\min}^{D-2} - \psi_{\max}^{D-2}} & (\psi_{\min} \leq \psi \leq \psi_{\max}) \\ 0 & (\psi > \psi_{\max}) \end{cases}. \quad (17)$$

1.4 对相对渗透系数函数的预测

采用相同的假定, 且不考虑孔隙表面的薄膜流动, 即可推得相对渗透系数函数的边界减、增湿曲线。在排水过程中, 仅有孔喉半径 $ar < r^*$ 的变截面孔隙仍处于完全饱和状态, 随后通过对式 (4) 所述的水分在单个变截面孔隙内的体积流量在仍处于完全饱和状态的孔隙 ($r_{\min} \leq r \leq (r^* / a)$) 范围内积分以求得通过表征体元的水分总体积流量:

$$Q = \int_{r_{\min}}^{r^*/a} Q_p(-dN). \quad (18)$$

另一方面, 依据 Buckingham-Darcy 定律, 通过表征体元的水分总体积流量亦可表示为

$$Q = k_s k_r (\Delta h / L) \pi R^2, \quad (19)$$

式中, k_r 表示相对渗透系数, 它可表示为 ψ 的无量纲函数 ($0 \leq k_r \leq 1$)。

联立式 (18) 和 (19), 并采用式 (4), (6) 和 (11), 可推得边界减湿阶段的相对渗透系数表达式:

$$k_{r(d)} = [(r^* / a)^{4-D} - r_{\min}^{4-D}] / (r_{\max}^{4-D} - r_{\min}^{4-D}). \quad (20)$$

将式 (13) 代入式 (20) 即可推得相对渗透系数在边界增湿阶段关于基质吸力的函数表达式:

$$k_{r(d)} = \begin{cases} 1 & \left(\psi < \frac{\psi_{\min}}{a} \right) \\ \frac{(a\psi)^{D-4} - \psi_{\max}^{D-4}}{\psi_{\min}^{D-4} - \psi_{\max}^{D-4}} & \left(\frac{\psi_{\min}}{a} \leq \psi \leq \frac{\psi_{\max}}{a} \right) \\ 0 & \left(\psi > \frac{\psi_{\max}}{a} \right) \end{cases}. \quad (21)$$

类似的, 这里亦可通过对式 (18) 在仍处于完全饱和状态的孔隙范围 ($r_{\min} \leq r \leq r^*$) 内积分求得相对渗透系数在边界增湿阶段关于基质吸力的理论表达式:

$$k_{r(w)} = \begin{cases} 1 & (\psi < \psi_{\min}) \\ \frac{\psi^{D-4} - \psi_{\max}^{D-4}}{\psi_{\min}^{D-4} - \psi_{\max}^{D-4}} & (\psi_{\min} \leq \psi \leq \psi_{\max}) \\ 0 & (\psi > \psi_{\max}) \end{cases}. \quad (22)$$

需注意: 表征减湿和增湿阶段持水曲线和相对渗透系数函数 (用基质吸力表示) 的理论表达式仅有 4 个独立参数—— a , D , ψ_{\min} 和 ψ_{\max} 。

不仅如此, 相对渗透系数 k_r 亦可表示为有效饱和度和 S_e 的函数。联立式 (14) 和式 (20) 可得减、增湿阶段的统一表达式:

$$k_r = \frac{\{S_e [(\psi_{\min} / \psi_{\max})^{D-2} - 1] + 1\}^{(D-4)/(D-2)} - 1}{(\psi_{\min} / \psi_{\max})^{D-4} - 1}, \quad (23)$$

值得注意: k_r 在整个 S_e 范围内不存在滞回特性, 这与文献[21]所得出的结论一致。

2 渗透系数函数及持水曲线的理论表达式验证

本节采用已有文献中对不同种岩土介质的饱和-非饱和渗透以及持水试验结果来验证第 1 节提出的渗透系数函数及持水曲线表达式, 以表现其在表征饱和渗透率与孔隙率的关系、相对渗透系数与有效饱和度的关系以及滞回持水曲线时的有效性。

2.1 对已有文献中 4 种砂岩的饱和渗透率预测

选取文献[22~24]中 4 种砂岩的饱和渗透试验结果验证笔者提出的理论表达式在表征饱和渗透率与孔隙率关系时的有效性 (这 4 种砂岩的主要物理性质参数详见文献[22~24])。饱和渗透率 K 与饱和渗透系数 k_s 存在如下关系:

$$k_s = K \rho_w g / \mu_w. \quad (24)$$

将式 (24) 和 (12) 联立可得饱和渗透率 K 关于孔隙率 n 的理论表达式:

$$K = \mu_w \alpha \xi_Q \xi_V^{(2-D)/(4-D)} n^{(4-D)/(2-D)} / (\rho_w g), \quad (25)$$

式中, ξ_V 和 ξ_Q 可分别采用孔喉的径向系数和长度系数 (a 和 c) 表示的式 (2b) 和式 (4b) 确定。此外, 采用 KC 公式同样可预测 4 种砂岩的饱和渗透率 K 与孔隙率 n 的关系:

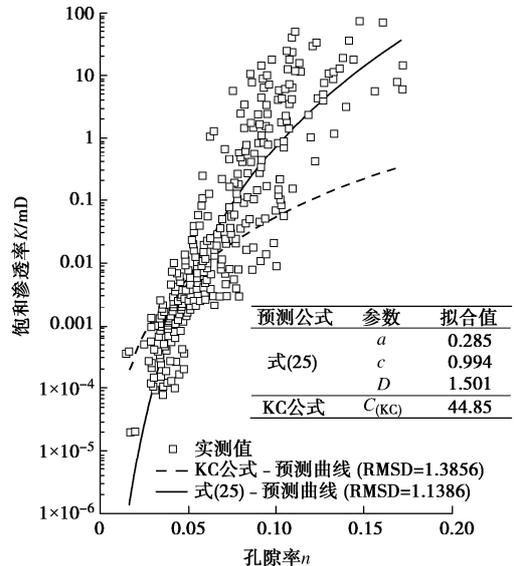
$$K = C_{(KC)} n^3 / (1-n)^2, \quad (26)$$

式中, $C_{(KC)}$ 表示与孔隙内壁的比表面积、几何形状及其迂曲程度有关的经验参数。基于最小二乘法对 4 种砂岩采用式 (25) 以及 KC 公式 (式 (26)) 计算不同孔隙率对应的饱和渗透率预测值及其实测值如图 3 所示 (相应参数的拟合值亦见图 3), 式 (25) 对 4~10 个数量级范围内变化的饱和渗透率预测效果明显优于式 (26); 从早白垩系砂岩、致密储气层砂岩、粉砂岩至细砂岩, a 值逐渐增大、 c 值逐渐减小, 从而使孔隙体积及水分的体积流量均随之逐渐增大, 具体表现为 4 种砂岩的饱和渗透率逐渐增高, 这与 1.1 节中式 (2) 和式 (4) 所述孔隙的体积及其体积流量随 a 和 c 的变化规律一致。为了定量评价这两种公式 (式 (25)

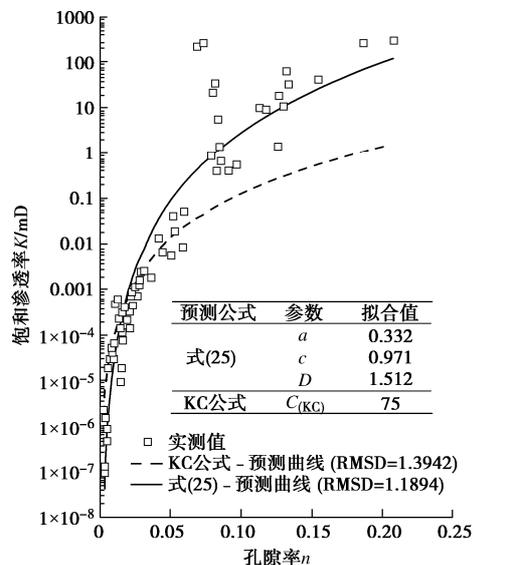
和式 (26)) 对饱和渗透率的预测效果, 依据图 3 中的数据计算饱和渗透率实测值和预测值的均方根偏差 RMSD 以评价预测精度:

$$RMSD = \sqrt{\frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{\omega} [\lg(W_{i(\text{预测})}) - \lg(W_{i(\text{实测})})]^2}, \quad (27)$$

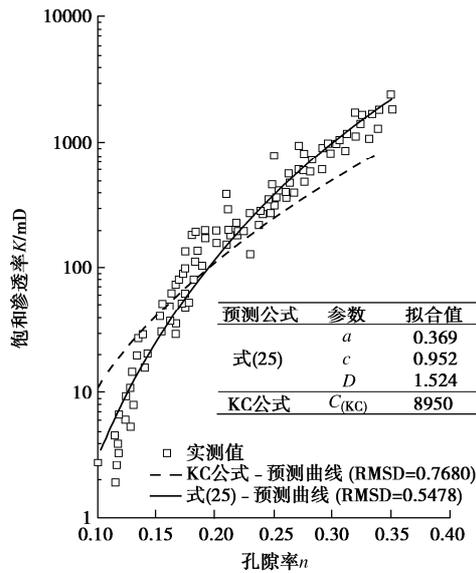
式中, $W_{i(\text{预测})}$ 和 $W_{i(\text{实测})}$ 分别表示饱和渗透率 K 、相对渗透系数 k_r 和有效饱和度 S_e 的预测值及其实测值, 由于图 3 中饱和渗透率的变化范围较大, 故计算 RMSD 时取 \lg 型对数值, ω 为数据点数。式 (25) 和式 (26) 对实测数据预测的 RMSD 值亦如图 3 所示。对比式 (25) 和 (26) 的 RMSD 发现: 笔者提出的饱和渗透率关于孔隙率的表达式对这 4 种砂岩饱和渗透率预测的 RMSD 较 KC 公式减小了 14.69%~32.79%, 表明式 (25) 适用于描述分维数 $D=1.501\sim 1.578$ 的砂岩饱和渗透率随孔隙率的变化规律。



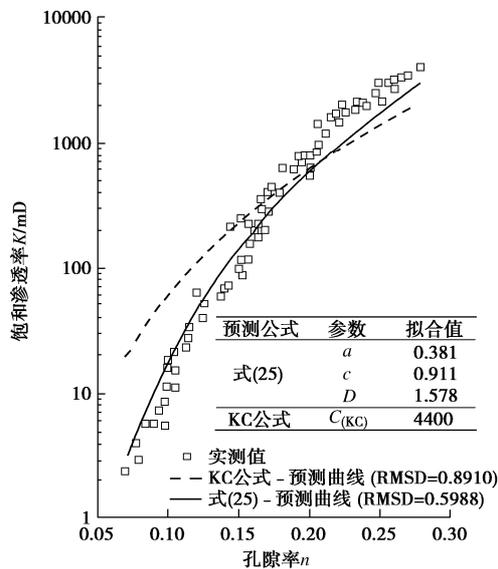
(a) 早白垩系砂岩 (实测值引自文献[23])



(b) 致密储气层砂岩 (实测值引自文献[24])



(c) 粉砂岩 (实测值引自文献[22])



(d) 细砂岩 (实测值引自文献[22])

图3 式(25)以及KC公式对4种砂岩饱和渗透率的预测值及其实测值与孔隙率的关系 (实测值引自文献[22~24])

Fig. 3 Comparison between Eq. (25) and KC equation and experimental data sets of saturated permeability versus porosity for four sandstones (data from Literatures [22~24])

2.2 对已有文献中8种土的相对渗透系数预测

选取文献[4, 25]中对8种土的非饱和渗透试验结果验证式(23)在表征相对渗透系数与有效饱和度关系时的有效性(这8种土的主要物理性质参数详见文献[4, 25])。在预测过程中,需要确定式(23)中的分维数 D 和 ψ_{min}/ψ_{max} ,这里采用对两参数优选更为合理、准确的网格搜索法[26]确定两者的最优拟合值。网格搜索法的基本原理是将参数 D 和 ψ_{min}/ψ_{max} 在一定范围划分网格并遍历网格内所有点进行取值,对于确定的 D 和 ψ_{min}/ψ_{max} 利用交叉验证方法得到在此组 D

和 ψ_{min}/ψ_{max} 下的训练集来验证分类准确率,最终选择使训练集交叉验证分类准确率最高的一组 D 和 ψ_{min}/ψ_{max} 作为最优参数组合。在网格搜索过程中,先在较大范围内采用大步距进行粗搜,选择使分类准确率最高的一组 D 和 ψ_{min}/ψ_{max} 。寻得局部最优参数后,在这组参数附近再选择一个小区间,采用小步距进行二次精搜,以寻找最终的最优参数。此外,如引言所述,Assouline[4]基于持水曲线模型的二阶矩亦构建了相对渗透系数的预测模型:

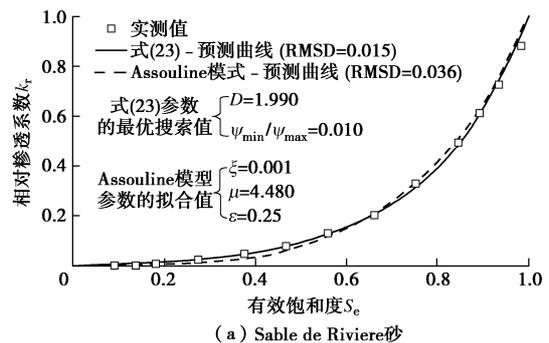
$$k_r = \left[\frac{\xi^{-1/\mu} (1/\mu) \gamma(1/\mu, \xi\alpha) - e^{-\xi\alpha} / \psi_r + 1/\psi_r}{\xi^{-1/\mu} (1/\mu) \Gamma(1/\mu) + 1/\psi_r} \right]^\eta, \quad (28a)$$

$$\psi = 1 / \{ 1/\psi_r + [(-1/\xi) \ln(1 - S_e)]^{1/\mu} \}, \quad (28b)$$

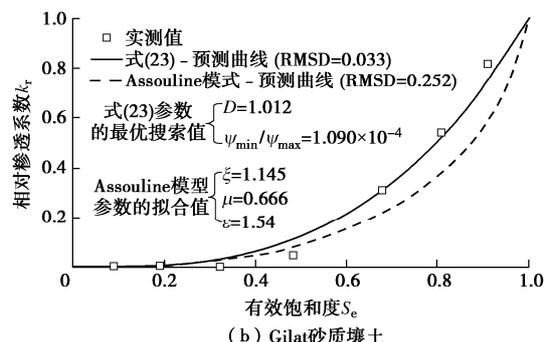
$$\alpha = (1/\psi - 1/\psi_r)^\mu \text{ 且 } \eta = 1.18\varepsilon^{-0.61}. \quad (28c)$$

式中 ψ_r 为残余基质吸力,依据文献[21]一般取1500 kPa; ξ , μ 和 ε 为拟合参数; $\gamma(1/\mu, \xi\alpha)$ 和 $\Gamma(1/\mu)$ 分别为不完全和完全Gamma函数。

Assouline模型和式(23)的预测结果如图4所示(相应参数的拟合值与最优搜索值亦见图4)。由图4(b), (d), (f), (h)可知,式(23)可显著改进Assouline模型对Gilat砂质壤土、Amarillo粉质黏壤土、Guelph壤土、Mont Cenis粉土相对渗透系数函数的预测效果。式(23)和Assouline模型对8种土的相对渗透系数实测数据预测的RMSD值(依据式(27)算得)亦如图4所示,式(23)对这8种土的相对渗透系数预测的RMSD较Assouline模型减小了5.26%~89.19%,表明式(23)适用于描述分维数 $D=1.012\sim 1.999$ 的壤土、砂土和粉土在 $\psi_{min}/\psi_{max}=10^{-4}\sim 10^{-2}$ 范围内相对渗透系数随有效饱和度的变化规律。



(a) Sable de Riviere砂



(b) Gilat砂质壤土

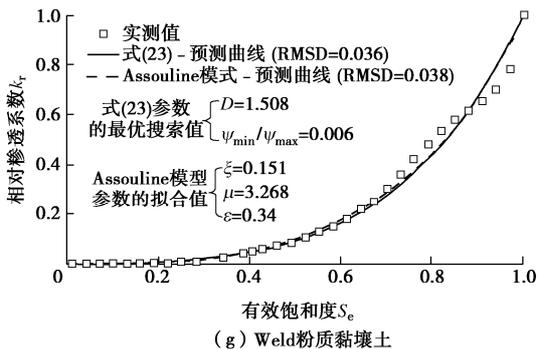
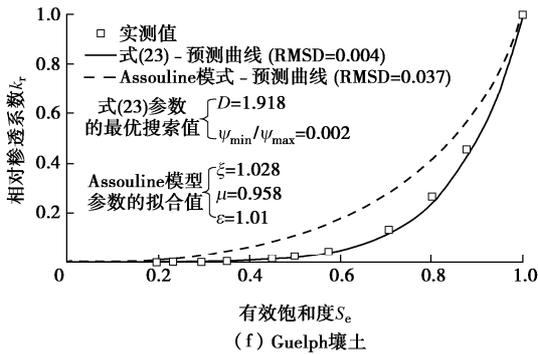
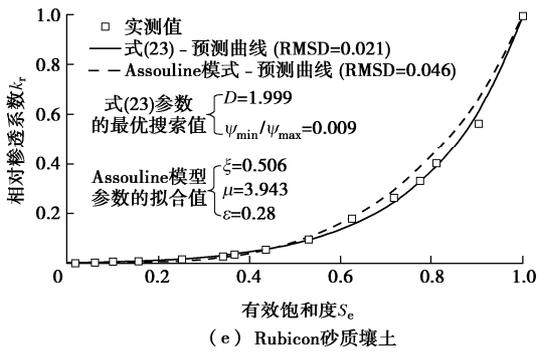
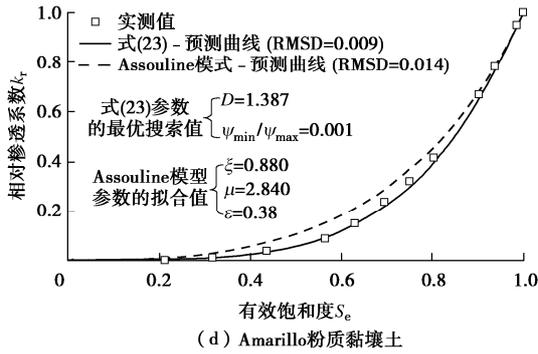
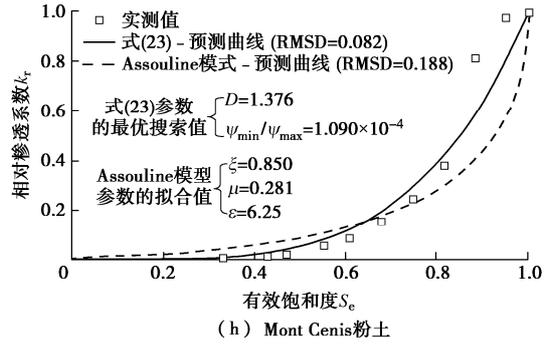
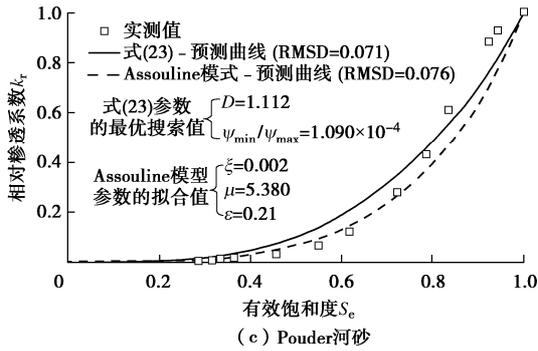


图 4 式 (23) 和 Assouline 模型对 8 种土的相对渗透系数预测值及其实测值与有效饱和度的关系 (实测值引自文献[4, 25])

Fig. 4 Comparison between Eq. (23) and Assouline model and experimental data sets of relative hydraulic conductivity versus effective degree of saturation for eight soils (data from Literatures [4, 25])

2.3 对 3 种土的滞回持水曲线预测

选取文献[27]中 Beaver Creek 砂以及人工粉土的减、增湿持水试验结果, 并对青藏黏土 (取自青海格尔木青藏铁路沿线) 进行减、增湿持水曲线的补充试验, 用以验证式 (15) 和式 (17) 在表征砂土、粉土和黏土滞回持水特性时的有效性。

采用 Fredlund 和 GCTS 公司联合研制的 GCTS 土水特征曲线仪对青藏黏土的饱和试样进行减、增湿持水试验。试样为圆柱形重塑试样, 其高度和直径为 3.19 × 7.10 cm, 是由原始扰动黏土经过过滤、加水、搅拌和静置后再利用压样法制成的, 初始含水率控制在 10%左右, 初始干密度控制在 1.53 g/cm³左右。青藏黏土的土粒相对密度为 2.70、液限和塑限含水率分别为 32.7%和 19.7%。试验前需将制成的试样进行抽气饱和, 随后擦除其表面附着的影响含水率或饱和度测定值的水膜, 再称取饱和试样的质量, 以计算饱和试样在试验前的饱和含水率。Beaver Creek 砂以及人工粉土的主要物理性质参数与持水试验方法详见文献 [27]。在预测滞回持水曲线时, 先采用试算法确定基质吸力的最大、最小值 (式 (16)), 再利用与 2.2 节类似的网格搜索法确定分维数 D 和孔喉径向系数 a 。式 (15) 和式 (17) 对这 3 种土的减、增湿持水曲线实测数据的预测结果及其 RMSD 值 (依据式 (27) 算得) 如图 5 所示 (采用网格搜索法确定参数 D 和 a 的最优值亦见图 5), 式 (15) 和式 (17) 对这 3 种土的滞回持水曲线预测效果较好; 不仅如此, 对减、增湿持水曲线可采用同一组参数 D 和 a 描述; 从 Beaver Creek 砂、人工粉土至青藏黏土, a 值逐渐减小, 反映了其孔隙体积逐渐减小, 这与 1.1 节中式 (2) 所述孔隙的体积随 a 的变化规律一致。由此可见, 式 (15) 和式 (17) 可用于预测所选砂土、粉土和黏土的滞回

持水曲线。

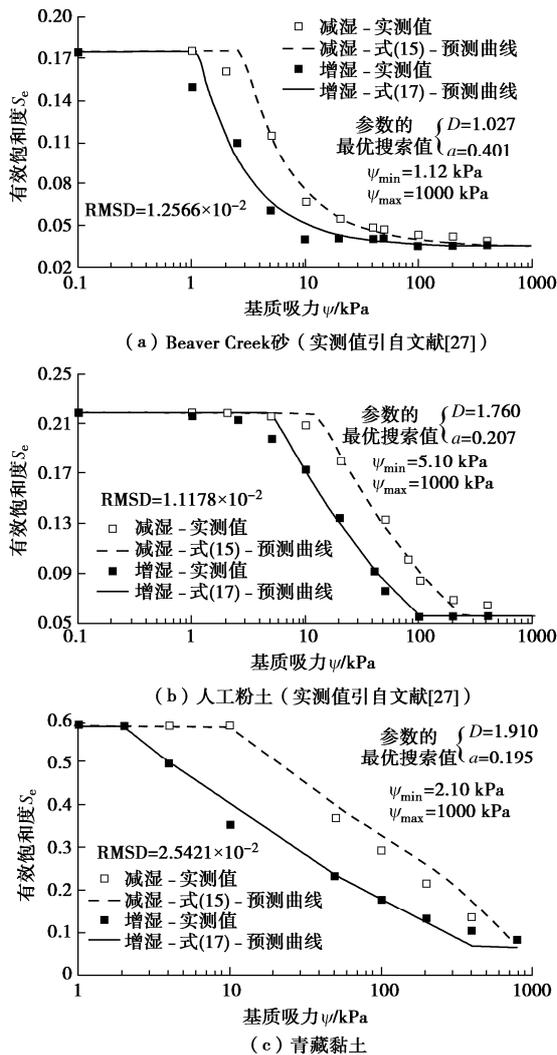


图5 Beaver Creek 砂、人工粉土和青藏黏土的滞回持水实测数据与式(15)和式(17)的预测曲线

Fig. 5 Predictions of Eqs. (15) and (17) in comparison with hysteretic water retention data of Beaver Creek sand, processed silt and Qinghai-Tibet clay

2.4 关于模型参数确定方法的讨论

如第1节所述,采用变截面孔隙模型预测岩土介质的饱和-非饱和渗透系数函数以及持水曲线时,均需确定孔喉径向系数 a , 孔喉长度系数 c 和分维数 D , 这3个参数均具有特定的物理意义或几何意义。然而,直接通过试验确定参数 a 和 c 较为困难,这需要准确地描述岩土介质孔隙结构的细观几何特征。值得注意: X 射线断层扫描技术可实现对岩土介质孔隙结构的图像描述,譬如, Lindquist 等^[28]和 Dong 等^[29]应用该技术测定了 Fontainebleau 砂岩和 Berea 砂岩的孔隙长度、孔喉半径以及孔隙体积的分布特征。由此可见,如何采用 X 射线断层扫描技术直接确定岩土介质的参数 a 和 c 有待进一步研究。尽管如此,笔者在 2.1 节和 2.3

节采用最小二乘法和网格搜索法对所选不同岩土介质求取的参数 a 和 c 值变化趋势与岩土介质孔隙体积及水分的体积流量随这两个参数的变化规律一致。

此外,笔者还整理了文献[30, 31]中不同种砂岩的分维数 D 与孔隙率 n 关系,如图6所示,所选砂岩的 D 值在 1.5~1.9 范围内变化,2.1 节所选 4 种砂岩的 D 值 ($D=1.501\sim 1.578$) 亦在该范围内。

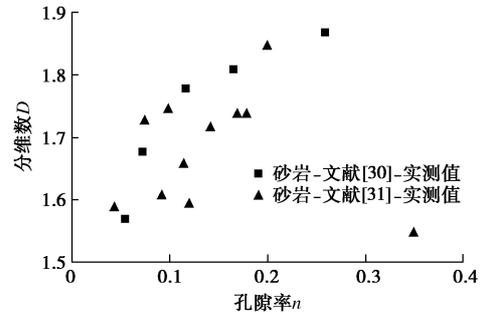


图6 文献[30, 31]所选取砂岩的分维数 D 与孔隙率 n 关系
Fig. 6 Relationship between fractal dimension D and porosity n from Literatures [30, 31]

不仅如此, Yu 等^[19]基于分形理论推得了岩土介质分维数 D 与孔隙率 n 的理论关系式:

$$D = 2 - \ln n / \ln(r_{\min} / r_{\max}) \quad (29)$$

式中, r_{\min} 和 r_{\max} 分别为岩土介质的表征体元孔隙半径的最小、最大值,与图1中对 r_{\min} 和 r_{\max} 的描述一致。依据文献[19]可知,大多数岩土介质的 r_{\min} / r_{\max} 在 $10^{-4}\sim 10^{-2}$ 范围内变化,而其 n 值在 $0\sim 1$ 范围内变化,故可推得其 D 值在 $1\sim 2$ 范围内变化,2.2~2.3 节中基于网格搜索法对所选 11 种土求取的 D 值亦在该范围内。

需注意:本文基于变截面孔隙模型提出表征岩土介质渗透及持水特性的理论表达式虽有助于深化和完善对岩土介质孔隙结构与其水力特性的内在机理认识,但在实际工程中的简化应用仍有待进一步研究。譬如,式(23)和式(25)形式较为复杂,一方面令 $\psi_{\min} / \psi_{\max} \approx 0$ 可简化式(23),但需结合实际工程用土的大量非饱和和渗透试验结果对这种简化方法的适用范围进行统计分析;另一方面可将式(25)中包含参数 a , c 和 D 的 $\mu_w \alpha \xi_0 \xi_r^{\xi(2-D)/(4-D)}$ 项简化为修正系数,但仍需结合实际工程所用砂岩的大量饱和和渗透试验结果对该修正系数的建议取值范围进行统计分析。

3 结 论

(1) 将岩土介质中的孔隙简化为圆柱形孔喉-大孔隙联合体组成的变截面孔隙,基于这种孔隙模型的几何特征与物理规律,并假定孔径分布服从分形分布,

推得表征饱和和渗透系数函数、相对渗透系数函数以及滞回持水曲线的理论表达式, 其中包含的参数均有特定的物理意义或几何意义。

(2) 变截面孔隙模型内存在的孔喉可通过孔隙体积和流量控制参数(ξ_v 和 ξ_Q)修正孔隙率和渗透系数。这两个参数取决于孔喉的径向系数 a 及其长度系数 c , 而且影响渗透系数的参数 ξ_Q 总小于影响孔隙率的参数 ξ_v , 故这种变截面孔隙能够模拟孔隙率相同、渗透特性不同的岩土介质, 而等径圆柱形孔隙无法模拟这类岩土介质。

(3) 利用已有文献中 4 种砂岩和 8 种土的饱和-非饱和渗透试验结果, 采用均方根偏差对比分析了理论表达式与已有公式对饱和渗透率和相对渗透系数的预测效果, 结果发现理论表达式对 4 种砂岩实测数据的 RMSD 较 Kozeny-Carman 公式减小了 14.69%~32.79%, 表明式 (25) 在描述分维数 $D=1.501\sim 1.578$ 的砂岩饱和渗透率随孔隙率的变化规律时优于 Kozeny-Carman 公式。对 8 种土实测数据的 RMSD 较 Assouline 模型减小了 5.26%~89.19%, 表明式 (23) 在描述分维数 $D=1.012\sim 1.999$ 的壤土、砂土和粉土在 $\psi_{\min}/\psi_{\max}=10^{-4}\sim 10^{-2}$ 范围内相对渗透系数随有效饱和度的变化规律时优于 Assouline 模型。此外, 利用 3 种土的持水试验结果(取自文献与补充试验), 亦验证了理论表达式在表征所选砂土、粉土和黏土滞回持水特性时的有效性。

参考文献:

- [1] CHAPUIS R P, AUBERTIN M. On the use of the Kozeny-Carman equation to predict the hydraulic conductivity of soils[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2003, **40**(3): 616 - 628.
- [2] TAIBI S, BICALHO K V, SAYAD-GAIDI C, et al. Measurements of unsaturated hydraulic conductivity functions of two fine-grained materials[J]. Soils and Foundations, 2009, **49**(2): 181 - 191.
- [3] MUALEM Y. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media[J]. Water Resources Research, 1976, **12**(3): 513 - 522.
- [4] ASSOULINE S. A model for soil relative hydraulic conductivity based on the water retention characteristic curve[J]. Water Resources Research, 2001, **37**(2): 265 - 271.
- [5] ASSOULINE S, TESSIER D, BRUAND A. A conceptual model of the soil water retention curve[J]. Water Resources Research, 1998, **34**(2): 223 - 231.
- [6] HU R, CHEN Y F, LIU H H, et al. A relative permeability model for deformable soils and its impact on coupled unsaturated flow and elasto-plastic deformation processes[J]. Science China-Technological sciences, 2015, **58**(11): 1971 - 1982.
- [7] YU B M, LI J H, LI Z H, et al. Permeabilities of unsaturated fractal porous media[J]. International Journal of Multiphase Flow, 2003, **29**(10): 1625 - 1642.
- [8] 徐永福, 黄寅春. 分形理论在研究非饱和土力学性质中的应用[J]. 岩土工程学报, 2006, **28**(5): 635 - 638. (XU Yong-fu, HUANG Yin-chun. Fractal-textured soils and their unsaturated mechanical properties[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, **28**(5): 635 - 638. (in Chinese))
- [9] DOUSSAN C, RUY S. Prediction of unsaturated soil hydraulic conductivity with electrical conductivity[J]. Water Resources Research, 2009, **45**(10): W10408.
- [10] TOKUNAGA T K. Hydraulic properties of adsorbed water films in unsaturated porous media[J]. Water Resources Research, 2009, **45**(6): W06415.
- [11] JERAULD G R, SALTER S J. The effect of pore-structure on hysteresis in relative permeability and capillary pressure: pore-level modeling[J]. Transport in Porous Media, 1990, **5**(2): 103 - 151.
- [12] NG C W W, PANG Y W. Experimental investigations of the soil-water characteristics of a volcanic soil[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2000, **37**(6): 1252 - 1264.
- [13] FENG M, FREDLUND D G. Hysteretic influence associated with thermal conductivity sensor measurements[C]// Proceedings of the 52nd Canadian Geotechnical Conference, 1999, Regina: 651 - 657.
- [14] MUALEM Y, BERIOZKIN A. General scaling rules of the hysteretic water retention function based on Mualem's domain theory[J]. European Journal of Soil Science, 2009, **60**(4): 652 - 661.
- [15] LIU Y, PARIANGE J Y, STEENHUIS T S. A soil water hysteresis model for fingered flow data[J]. Water Resources Research, 1995, **31**(9): 2263 - 2266.
- [16] WEI C F, DEWOOIKAR M M. Formulation of capillary hysteresis with internal state variables[J]. Water Resources Research, 2006, **42**(7): W07405.
- [17] ZHOU A N. A contact angle-dependent hysteresis model for soil-water retention behavior[J]. Computers and Geotechnics,

- 2013, **49**(4): 36 - 42.
- [18] BOUSFIELD D W, KARLES G. Penetration into three-dimensional complex porous structures[J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 2004, **270**(2): 396 - 405.
- [19] YU B M, LI J H. Some fractal characters of porous media[J]. *Fractals*, 2001, **9**(3): 365 - 372.
- [20] CARSEL R F, PARRISH R S. Developing joint probability distributions of soil water retention characteristics[J]. *Water Resources Research*, 1988, **24**(5): 755 - 769.
- [21] VAN GENUCHTEN M T. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils[J]. *Soil Science Society of America Journal*, 1980, **44**(5): 892 - 898.
- [22] CHILINDAR G V. Relationship between porosity, permeability and grain size distribution of sands and sandstones[C]// *Proceedings of Deltaic and Shallow Marine Deposits*, 1964, New York: 71 - 75.
- [23] LUFFEL D L, HOWARD W E, HUNT E R. Travis Peak core permeability and porosity relationships at reservoir stress[J]. *SPE Formation Evaluation*, 1991, **16**(3): 310 - 318.
- [24] HIRST J P P, DAVIS N, PALMER A F, et al. The tight gas challenge: appraisal results from the Devonian of Algeria[J]. *Petroleum Geoscience*, 2001, **7**(1): 13 - 21.
- [25] MUALEM Y. A Catalogue of the Hydraulic Properties of Unsaturated Soil[R]. Haifa: Technion-Israel Institute of Technology, 1974.
- [26] LERMAN P M. Fitting segmented regression models by grid search[J]. *Journal of the Royal Statistical Society Series C: Applied Statistics*, 1980, **29**(1): 77 - 84.
- [27] PHAM H Q, FREDLUND D G, BARBOUR S L. A practical model for the soil-water characteristic curve for soils with negligible volume change[J]. *Géotechnique*, 2003, **53**(2): 293 - 298.
- [28] LINDQUIST W B, VENKATARAMAN A, DUNSMUIR J, et al. Pore and throat size distributions measured from synchrotron X-ray tomographic images of Fontainebleau sandstones[J]. *Journal of Geophysical Research*, 2000, **105**(B9): 21509 - 21527.
- [29] DONG H, BLUNT M J. Pore-network extraction from micro-computerized-tomography images[J]. *Physical Review E*, 2009, **80**(3): 1 - 11.
- [30] KROHN C E, THOMPSON A H. Fractal sandstone pores: automated measurements using scanning-electron-microscope images[J]. *Physical Review B*, 1986, **33**(9): 6366 - 6374.
- [31] SMIDT J M, MONRO D M. Fractal modeling applied to reservoir characterization and flow simulation[J]. *Fractals*, 1998, **6**(4): 401 - 408.