

DOI: 10.11779/CJGE202009006

考虑裂缝几何特性和 T 应力的类岩石材料压剪张拉 断裂准则

王俊杰¹, 黄诗渊^{1, 2}, 郭万里², 赵天龙^{1, 2}

(1. 重庆交通大学水工建筑物健康诊断技术重庆市高校工程研究中心, 重庆 400074; 2. 南京水利科学研究院岩土工程研究所, 江苏 南京 210024)

摘要: 为探究类岩石材料中非闭合裂缝的压剪起裂机理, 引入相对钝化系数和相对临界尺寸, 建立了考虑裂缝几何特性和 T 应力的压剪张拉断裂准则, 分析了不同因素对裂缝尖端周向应力分布规律和张拉起裂角的影响。考虑相对钝化系数后, 张拉起裂角预测曲线得到明显改善; 考虑 T 应力后, 可解释由裂缝长度和材料属性引起的差异化断裂行为。根据几种典型类岩石材料的试验结果与理论曲线对比分析发现, 当相对钝化系数较小时, 理论预测值与试验值吻合较好, 且预测角度范围较大; 随相对钝化系数增大, 理论预测值与试验结果误差逐渐增大, 预测角度范围逐渐减小。解释了出现该现象的原因, 讨论了基于线弹性断裂力学理论建立的压剪非闭合起裂准则存在的不足, 并建议了本文准则的适用条件。

关键词: 压剪应力; 非闭合裂缝; 断裂准则; T 应力

中图分类号: TU45; O346.11

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2020)09-1622-10

作者简介: 王俊杰(1973—), 男, 博士, 教授, 主要从事地质工程、岩土工程方面的研究工作。E-mail: wangjunjie@cqjtu.edu.cn。

Compression-shear tension fracture criteria for rock-like materials considering geometric characteristics of cracks and T-stresses

WANG Jun-jie¹, HUANG Shi-yuan^{1, 2}, GUO Wan-li², ZHAO Tian-long^{1, 2}

(1. Diagnostic Technology on Health of Hydraulic Structures Engineering Research Center of Chongqing Education Commission of China, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China; 2. Geotechnical Engineering Department, Nanjing Hydraulic Research Institute, Nanjing 210024, China)

Abstract: In order to explore the fracture mechanism of open cracks under compression-shear stress in rock-like materials, a relative passivation coefficient and a relative critical size are introduced, and a compression-shear-tension fracture criterion considering the geometric characteristics of cracks and T-stress is established. The effects of different factors on the distribution of tangential stresses and initiation angle of cracks are investigated. The predicted curves of the initiation angle of cracks are improved obviously because of considering the relative passivation coefficient, and the different fracture behaviors induced by crack length and material properties can also be explained after considering the T-stresses. In order to validate the theoretical solutions, the calculated results are compared with the test ones of several typical rock-like materials. It is found that when the relative passivation coefficient is small, the predicted values obtained by the proposed method agree well with those obtained from the tests, and the range of predicted angle is large. With the increase of the relative passivation coefficient, the error between the theoretical values and the test results increases gradually, and the range of predicted angle decreases slowly. The reason for this phenomenon is explained, the flaw of the fracture criterion based on the linear elastic fracture mechanics is discussed, and the applicable conditions of the proposed criterion is suggested.

Key words: compression-shear stress; open crack; fracture criterion; T-stress

0 引言

自断裂力学理论引入岩土力学领域以来, 关于岩石类材料的起裂强度和裂缝扩展问题受到大量关注^[1-2]。从荷载角度来看, 裂缝受到的外荷载可转换为法向力

基金项目: 国家自然科学基金委员会—雅砻江流域水电开发有限公司雅砻江联合基金项目 (U1865103); 水利部土石坝破坏机理与防控技术重点实验室开放基金项目 (YK319001)

收稿日期: 2019-11-26

***通信作者** (E-mail: cqjtdxhsy@163.com)

和切向力, 归结为纯拉、纯剪、拉剪和压剪作用下的断裂问题。由于工程岩体多处于受压力学环境, 研究其压剪断裂问题是具有实际意义的。

对于工程岩体中的压剪裂缝, 若处于闭合状态^[3-5], 则裂缝尖端应力场由 II 型应力强度因子 K_{II} 控制。根据线弹性断裂力学最大周向应力准则可知, 张拉起裂角恒为 70.53° 。大量岩石类材料试验表明, 无论裂缝闭合与否, 张拉起裂角均随预置裂缝倾角变化而变化^[6-10], 与理论值存在较大差异, 传统理论尚无法解释此现象。有学者指出^[11-12], 传统断裂力学 Williams 展开项中忽略的非奇异常数项 (T 应力) 对计算结果存在影响。研究表明, 若同时考虑裂纹尖端的奇异应力项和非奇异常数项, 计算结果将大大改善^[13]。T 应力最早是为了研究拉剪作用下脆性材料的断裂问题引入的, 近年来也运用于岩石材料的压剪断裂问题, 并针对闭合裂缝建立了一些考虑 T 应力的压剪断裂准则^[5, 14-15]。考虑 T 应力后, 闭合裂缝的起裂角与预制裂缝倾角存在单调递增关系, 在相同裂缝长度情况下, 起裂荷载、起裂角与材料断裂过程区尺寸密切相关^[14]。由于类岩石材料的断裂过程区尺寸较一般脆性材料如玻璃、陶瓷等更大^[16], T 应力对其断裂特性的影响更加显著。

无论是工程岩体裂缝还是试样预制裂缝, 非闭合裂缝是常见的。前人在压剪裂缝的 I 型应力强度因子 K_I 处理方法上有不同观点^[17-20] ($K_I < 0$ 和 $K_I = 0$)。对于闭合裂缝, $K_I = 0$ 毋庸置疑; 而 $K_I < 0$ 实质上是认为压应力对裂缝张开有抑制作用。关于非闭合裂缝的起裂问题, 郭少华^[9]指出在压应力作用下裂缝表面达到闭合之前就出现了开裂现象, 裂纹的张开对裂纹的萌生和扩展有不可忽视的影响。蒲成志等^[21]指出, 由于裂缝预制方法的不同, 实验室条件下的一些预制闭合裂缝并不是真正的闭合裂缝, 而存在一定张开度, 导致采用闭合裂缝的理论模型分析非闭合裂缝开裂问题时产生较大差异。李银平等^[22]认为对于非闭合裂缝, 由于传统理论将其抽象为无厚度的数学裂缝, 导致计算结果是固定的; 然而, 不同预制裂缝存在不同的几何特性 (如: 裂缝长度、裂缝厚度、裂缝端部曲率半径等), 这是导致张拉起裂角离散的重要原因。

综上, 由于裂缝几何特征和材料属性的不同, 无法将不同学者的试验结果统一对比分析, 更难从理论上解释其差异性断裂行为。鉴于此, 本文考虑裂缝几何特性和 T 应力的影响, 建立非闭合裂缝的压剪张拉起裂准则, 结合典型类岩石材料中心斜裂缝单轴压缩试验结果对准则进行验证, 并分析准则的适用性。

1 压剪裂缝尖端应力场

1.1 传统线弹性断裂力学理论

传统 I - II 复合型裂缝尖端应力场如图 1 所示。

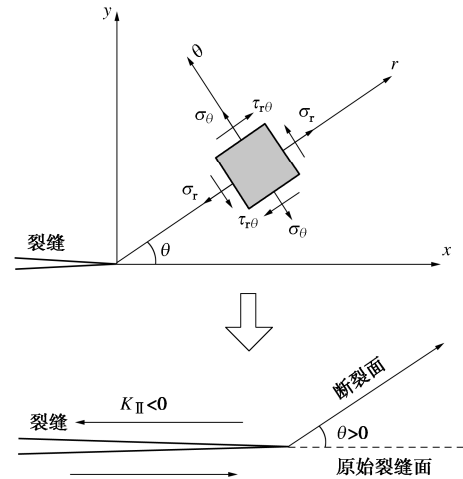


图 1 裂缝尖端应力场

Fig. 1 Stress fields of crack tip

各应力分量如下式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} (3 - \cos \theta) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} (3 \cos \theta - 1) \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I (1 + \cos \theta) - 3K_{II} \sin \theta \right] \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) \right] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ 分别为径向应力、周向应力、剪应力; r , θ 为极径和极角。

针对压剪非闭合裂缝, 建立双轴应力作用下的中心斜裂缝模型, 如图 2 所示。裂缝面上的应力状态为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_T &= -\sigma (\cos^2 \beta + \lambda \sin^2 \beta) \\ \sigma_N &= -\sigma (\sin^2 \beta + \lambda \cos^2 \beta) \\ \tau_N &= -\sigma (1 - \lambda) \sin \beta \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 σ_N , σ_T , τ_N 分别为裂缝面上的法向应力、切向应力、剪应力; β 为中心裂缝与竖直方向的夹角 ($^\circ$); λ 为侧压力系数。

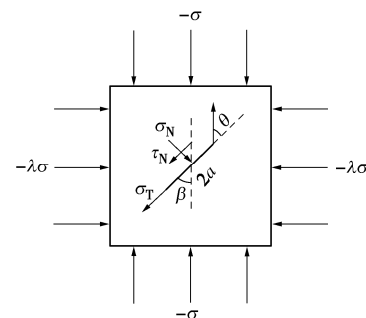


图 2 压缩荷载下中心斜裂缝受力状态

Fig. 2 Stress state of central inclined crack under compression

在岩石断裂力学研究中，一般认为裂缝只存在非闭合或闭合形态，不考虑中间过渡形态^[23]。因此在计算时常认为闭合裂缝 $K_I = 0$ ，非闭合裂缝 $K_I < 0$ 。

非闭合裂缝的应力强度因子一般被写为

$$K_I = \sigma_N \sqrt{\pi a} = -\sigma(\sin^2 \beta + \lambda \cos^2 \beta) \sqrt{\pi a} \quad , \quad (3)$$

$$K_{II} = \tau_N \sqrt{\pi a} = -\sigma(1 - \lambda) \sin \beta \cos \beta \sqrt{\pi a} \quad 。 \quad (4)$$

式 (3) 对 K_I 进行变号处理，认为压应力对裂缝张开存在抑制作用，但忽略了一个重要因素，即传统线弹性断裂力学将裂缝认为是数学裂缝。实际上，无论是实际工程还是室内试验中，非闭合裂缝也是常见的。即便是室内试验中预制的闭合裂缝，由于闭合裂缝预制方法不同，也可能导致裂缝为非闭合状态^[21]。当裂缝存在一定厚度时，其裂缝尖端受到的横向压应力 σ_T 就不能忽略。Muskhelishvili^[24]指出，对于长轴和短轴长度分别为 $2a$ 和 $2b$ 的椭圆裂缝，其裂缝尖端处所受横向压应力 σ_T 会产生与其相垂直的拉应力 σ'_T ，其应力大小等于横向压应力，该拉应力引起的 I 型应力强度因子为

$$K_I^T = 0.5 \sigma_T \sqrt{\rho \pi} = 0.5 \sigma_T \sqrt{\rho/a} \sqrt{\pi a} \quad , \quad (5)$$

式中， ρ 为裂缝端部曲率半径， $\rho = b^2/a$ ，其中 $\rho \rightarrow 0$ 。

椭圆裂缝的厚度是逐渐改变的，在端部较为尖锐，而室内试验中预制裂缝的厚度一般是相同的，只是在端部出现一定程度的钝化。也就是说，相同裂缝厚度时，真实情况下裂缝端部并不如椭圆裂缝尖锐，其曲率半径大得多。如图 3 所示，陈簏^[25]提出的真实裂缝模型更能反映常见的非闭合裂缝的几何特征，裂缝端部形态被考虑成半圆形态，此时 $\rho = b$ ，因此公式 (5) 可近似写为

$$K_I^T = 0.5 \sigma_T \sqrt{\pi b} = 0.5 \sigma_T \sqrt{b/a} \sqrt{\pi a} \quad 。 \quad (6)$$

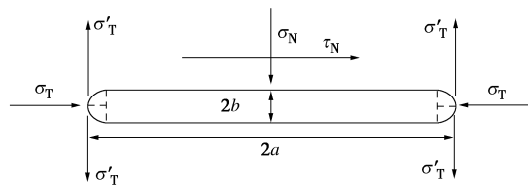


图 3 陈簏真实裂缝模型

Fig. 3 Chen Chi's model for real crack

综上，非闭合裂缝 K_I 应受法向压应力和横向压应力的共同作用，叠加可得

$$\begin{aligned} K_I &= \sigma_N \sqrt{\pi a} - 0.5 \sigma_T \sqrt{b/a} \sqrt{\pi a} \\ &= -\sigma \sqrt{\pi a} [(\sin^2 \beta + \lambda \cos^2 \beta) - \\ &\quad 0.5(\cos^2 \beta + \lambda \sin^2 \beta) \sqrt{b/a}] \quad 。 \quad (7) \end{aligned}$$

笔者收集了部分学者研究中采用的裂缝几何特

性，如表 1 所示。

表 1 不同学者研究中采用的裂缝几何特性

Table 1 Geometric characteristics of cracks studied by different scholars

学者	材料	2a/mm	2b/mm	η
Bobet ^[6]	石膏	12.7	0.1	0.1
Wong 等 ^[7]	石膏	12.5	0.1~1.3	0.1~0.3
Vesga 等 ^[8]	压实黏土	25	1	0.2
郭少华 ^[9]	石膏	30	1~6	0.2~0.45
Lin 等 ^[10]	水泥砂浆	30	1	0.2
Wang 等 ^[26]	花岗岩	30	1	0.2
Zhang 等 ^[27]	PFC 模拟岩石材料	12.7	1.3	0.3
Zhuang 等 ^[28]	砂岩相似材料	15	1	0.3

从表 1 可知，为满足厚度趋于 0 的数学裂缝，室内试验中对裂缝厚度的要求较高，其往往被限制在 1 mm 以下，但室内试样的几何尺寸有限，无法确定其是否能够接近数学裂缝的假设。由于学者们研究中采用的试样结构和裂缝预制方法不同，所采用的裂缝长度和裂缝厚度均存在一定差异。

根据式 (7) 可知，裂缝厚度和裂缝长度均对 K_I 存在影响，单独讨论曲率半径或裂缝厚度的影响并不全面，有必要对其进行综合考虑。由于 $\sigma \sqrt{\pi a}$ 为 K_I 的一般表达形式，此时只需将厚度和长度进行归一化，即可将式 (7) 中括号内的参数定量描述。本文定义 $\eta = \sqrt{b/a}$ 为相对钝化系数，即可描述不同裂缝长度和裂缝厚度组合下的 K_I ，相对钝化系数 $\eta \rightarrow 0$ 时即对应数学裂缝的理想条件。

1.2 考虑 T 应力的断裂力学理论

传统断裂力学理论中，往往只保留了 Williams 的无限级数展开项中的奇异项（即 $r^{-0.5}$ 项），在起裂角分析时自然地回避了 r 的影响。近年来许多学者^[3-4, 15]认为，对于岩石或类岩石材料，其裂缝尖端临界尺寸 r_c （也被认为是断裂过程区尺寸）比一般脆性材料更大，因此其非奇异性中的常数项（ r^0 项，即 T 应力）的影响不可忽略。

关于压剪裂缝中 T 应力的存在形式，目前存在以下几种观点：①考虑平行于裂缝面的 T 应力 T_x ^[11]；②考虑平行于裂缝面的 T 应力 T_x ，同时，由于裂缝闭合，考虑了垂直于裂缝面的 T 应力 T_y ^[15, 29]；③除了考虑 T_x 和 T_y ，还考虑 T_y 对闭合裂缝产生的摩擦作用^[5, 18]，即 T_{xy} 。分别对应非闭合裂缝、光滑闭合裂缝、粗糙闭合裂缝。因此考虑 T 应力的非闭合裂缝尖端应力场表达式可写为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} (3 - \cos \theta) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} (3 \cos \theta - 1) \right] + \\ T_x \cos^2 \theta, \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I (1 + \cos \theta) - 3K_{II} \sin \theta \right] + T_x \sin^2 \theta, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) \right] - \frac{1}{2} T_x \sin 2\theta, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中

$$T_x = -\sigma(\cos^2 \beta + \lambda \sin^2 \beta) \quad (9)$$

2 非闭合裂缝压剪-张拉起裂准则

最大周向应力准则 (MTS) 由于意义明确、考虑影响因素最少, 运用最为广泛。其认为当裂缝最大周向应力 σ_θ 达到临界值时, 将沿着最大周向应力的方向扩展。裂缝起裂角 θ_0 由下式可得

$$\left. \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \right|_{r=r_c} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} \right|_{r=r_c} < 0 \quad (10)$$

根据传统断裂力学理论, 非闭合裂缝尖端最大周向应力表达式如下:

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r_c}} \cos \frac{\theta_0}{2} \left\{ -\sigma \sqrt{\pi a} \left[\begin{aligned} &(\sin^2 \beta + \lambda \cos^2 \beta) \\ &-0.5(\cos^2 \beta + \lambda \sin^2 \beta) \eta \end{aligned} \right] \right. \\ \left. (1 + \cos \theta_0) + 3\sigma \sqrt{\pi a} (1 - \lambda) \sin \beta \cos \beta \sin \theta_0 \right\} \quad (11)$$

考虑 T 应力后, 非闭合裂缝尖端最大周向应力表达式如下:

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r_c}} \cos \frac{\theta_0}{2} \left\{ -\sigma \sqrt{\pi a} \left[\begin{aligned} &(\sin^2 \beta + \lambda \cos^2 \beta) \\ &-0.5(\cos^2 \beta + \lambda \sin^2 \beta) \eta \end{aligned} \right] \right. \\ \left. (1 + \cos \theta_0) + 3\sigma \sqrt{\pi a} (1 - \lambda) \sin \beta \cos \beta \sin \theta_0 \right\} - \\ \sigma(\cos^2 \beta + \lambda \sin^2 \beta) \sin^2 \theta_0 \quad (12)$$

传统理论中一般认为 $r \rightarrow 0$, 将式 (11) 代入式 (10) 后临界值 r_c 可消去进而得到起裂角, 但无法采用具体的 $(\sigma_\theta)_{\max}$ 来表征起裂应力, 通常转换为 K_{IC} 进行描述。考虑 T 应力后, 在计算起裂角和起裂应力时 r_c 均无法消去, 此时必须考虑其具体取值。一般地, 临界尺寸 r_c 被认为是材料的特征属性, 常采用下式表述^[12]

$$r_c = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_I} \right)^2 \quad (13)$$

从式 (12) 看出, 考虑 T 应力后最大周向应力 $(\sigma_\theta)_{\max}$ 与裂缝倾角 β 、侧压力系数 λ 、裂缝半长 a 、相对钝化系数 η 以及临界尺寸 r_c 均存在关系。为便于分析, 引入相对临界尺寸 $\alpha = \sqrt{2r_c/a}$, 故式 (12) 可

写为

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \frac{1}{2\alpha} \cos \frac{\theta_0}{2} \left\{ -\sigma \left[\begin{aligned} &(\sin^2 \beta + \lambda \cos^2 \beta) \\ &-0.5(\cos^2 \beta + \lambda \sin^2 \beta) \eta \end{aligned} \right] \right. \\ \left. (1 + \cos \theta_0) + 3\sigma (1 - \lambda) \sin \beta \cos \beta \sin \theta_0 \right\} - \\ \sigma(\cos^2 \beta + \lambda \sin^2 \beta) \sin^2 \theta_0 \quad (14)$$

此时, 裂缝半长 a 被消除, $(\sigma_\theta)_{\max}$ 转变为与裂缝倾角 β 、侧压力系数 λ 、相对钝化系数 η 和相对临界尺寸 α 相关的函数。前两者可根据实际应力状态确定, 后两者可根据材料特性和裂缝几何特性确定。

后文计算中在式 (11) 中也考虑具体 r_c 值, 将相对临界尺寸 $\alpha = \sqrt{2r_c/a}$ 代入, 即可对比传统理论和考虑 T 应力时最大周向应力的差异。显然, 当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, 两者结果是等效的。

3 压剪非闭合裂缝张拉起裂机理

3.1 裂缝面应力强度因子分布规律

对于非闭合裂缝, 由于裂缝面不存在摩擦作用, 裂缝面上的应力分布实际上就是外荷载在裂缝面的分力, 仅与裂缝倾角 β 、侧压力系数 λ 有关, 而应力强度因子则有所不同。根据式 (4) 和式 (7) 可知, K_{II} 与 β , λ 相关, 而 K_I 则受到法向压应力和横向压应力的共同影响, 与 λ , η 和 β 有关。非闭合裂缝应力强度因子 K_I/K_{II} 比值如下:

$$\frac{K_I}{K_{II}} = \frac{1}{1 - \lambda} \left[\frac{\lambda + \tan^2 \beta - 0.5\eta(1 + \lambda \tan^2 \beta)}{\tan \beta} \right] \quad (15)$$

以单轴受压情况为例, 从图 4 可知, 相对钝化系数 η 不改变 $K_I/(\pi a)^{0.5}$ 随裂缝倾角 β 增加而减小的趋势, 但影响了其正负大小。在一定角度范围内 K_I 存在正值 (受拉), η 越大, 存在正值的角度范围越大。当裂缝倾角 β 为 0° 时非闭合裂缝可认为 I 型裂缝问题 ($K_I > 0$, $K_{II} = 0$), 在许多试验中也发现, 此时会出现沿原裂缝面的张拉裂缝^[7, 9, 10]。引入相对钝化系数 η 后对 K_I/K_{II} 存在一定影响, 随着 η 不断增加, 其对 K_I/K_{II} 影响范围逐渐增加, 在裂缝倾角 β 较小时影响尤为显著。

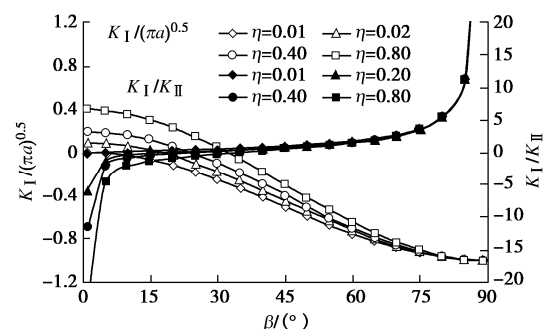


图4 η 对 K_I 和 K_I/K_{II} 分布规律的影响

Fig. 4 Effects of η on K_I and K_I/K_{II}

3.2 裂缝尖端周向应力分布规律

张拉起裂条件与裂缝尖端周向应力分布规律密切相关, 鉴于此, 针对裂缝倾角 β 、侧压力系数 λ 、相对钝化系数 η 和相对临界尺寸 α 分别进行讨论。

(1) 裂缝倾角 β

取 $\lambda = 0$, $\alpha = 0.1$, $\eta = 0, 0.2$ (数学裂缝和一定钝化程度的裂缝), 研究裂缝倾角 β 对裂缝尖端周向应力分布的影响, 分析中将周向应力进行无量纲处理。由于计算中 α 值取了定值, 因此最大周向应力不会趋于无穷大。

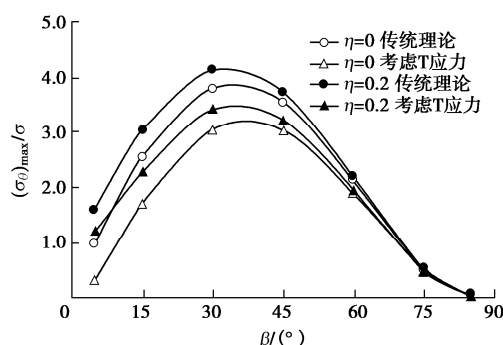


图5 β 对最大周向应力的影响

Fig. 5 Effects of β on maximum tangential stress

从图5可知, 无论考虑裂缝钝化度和T应力与否, 最大周向应力均随裂缝倾角 β 增加呈先增加后减小的趋势, 但最大周向应力对应的裂缝倾角 β 有所差异。在 $\beta = 15^\circ \sim 45^\circ$ 之间存在一个临界角度使得起裂应力最小。当 β 增加到一定程度时, 裂缝尖端的周向应力峰值趋于0, 此时, 裂缝尖端并不会发生张拉起裂。在许多室内试验也可发现, 预制裂缝倾角较大时, 张拉裂缝往往不会出现于裂缝尖端, 例如 $\beta = 90^\circ$ 时, 常出现于裂缝面中部区域^[8-9, 30]。

(2) 侧压力系数 λ

取 $\beta = 45^\circ$, $\alpha = 0.1$, $\eta = 0.2$, 研究侧压力系数 λ 对裂缝尖端周向应力分布的影响。

从图6可知, 不论考虑T应力与否, 随着 λ 增加, 最大周向应力逐渐减小, 张拉起裂角逐渐增大。当 λ 增加至一定程度后, 最大周向应力趋近于0, 说明围压增加, 裂缝尖端拉应力逐渐被抑制。在相同 λ 情况下, 考虑T应力后, 最大周向应力减小, 张拉起裂角减小, 也体现了其对张拉起裂的抑制作用。

(3) 相对临界尺寸 α

根据图5, β 较小时T应力对最大周向应力影响更为显著。取 $\lambda = 0$, $\eta = 0.2$, $\beta = 15^\circ, 30^\circ$ 和 45° , 研究相对临界尺寸 α 对裂缝尖端周向应力影响规律。

从图7可见, $\beta = 15^\circ$ 和 30° 时, 无论考虑T应力与否, 随着相对临界尺寸 α 增加, 最大周向应力均

逐渐减小, α 一定时, 考虑T应力会降低最大周向应力。采用传统理论计算得到的张拉起裂角 θ_0 是恒定的, 不随 α 增加而变化, 考虑T应力后, θ_0 随 α 增加而减小。而 $\beta = 45^\circ$ 时, 考虑T应力对裂缝张拉起裂角和周向应力的影响逐渐减小, 趋近于传统理论计算结果。

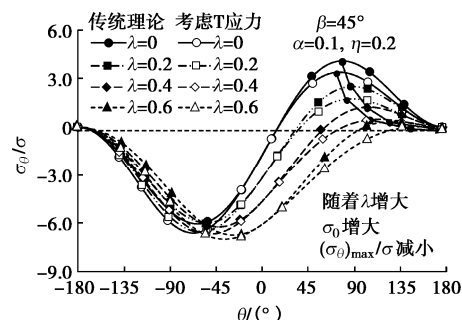
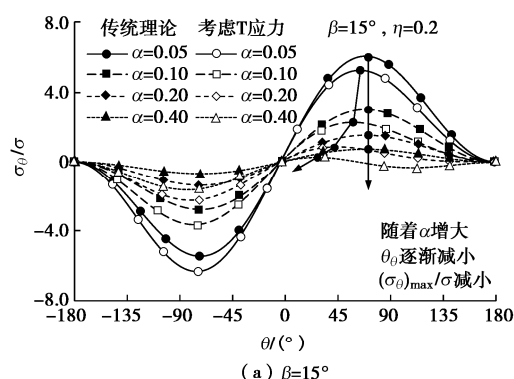
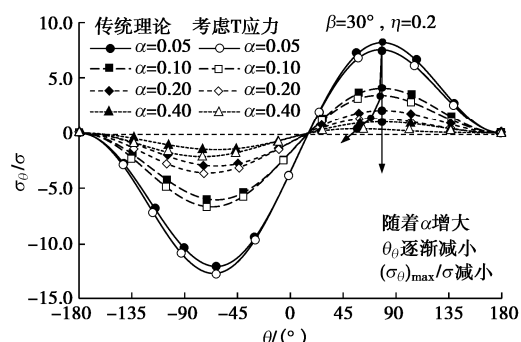


图6 λ 对周向应力分布的影响

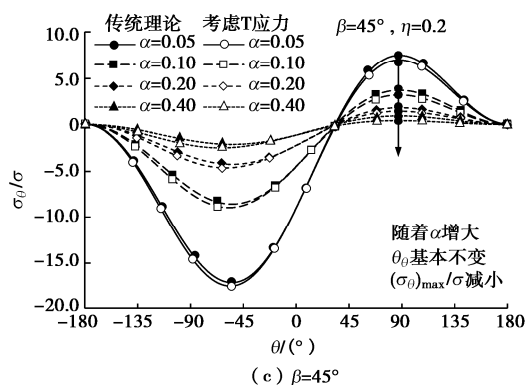
Fig. 6 Effects of λ on distribution of tangential stress



(a) $\beta=15^\circ$



(b) $\beta=30^\circ$



(c) $\beta=45^\circ$

图7 α 对周向应力分布的影响

Fig. 7 Effects of α on distribution of tangential stress

由此说明, 采用传统理论时, 若考虑具体 r_c 进行计算, 相对临界尺寸 α 增大对最大周向应力存在抑制作用, 但不影响其张拉起裂角 θ_0 。考虑 T 应力后, 在一定倾角范围内, 随着相对临界尺寸 α 增大, 最大周向应力和张拉起裂角均存在明显减小趋势。

(4) 相对钝化系数 η

从图 5 可知, 当 β 较小时, 相对钝化系数 η 对最大周向应力影响更明显。取 $\lambda = 0$, $\beta = 15^\circ$, $\alpha = 0.1$, 研究 η 对裂缝尖端周向应力分布规律的影响。

从图 8 可看出, 当 α 一定时, 不论考虑 T 应力与否, 随着 η 增加, 最大周向应力逐渐增加, 张拉起裂角 θ_0 逐渐减小。说明在相同裂缝长度情况下, 裂缝厚度增大将会增大其最大周向应力, 同时, 由于 η 改变了 K_I 大小, 使得其起裂角发生改变。

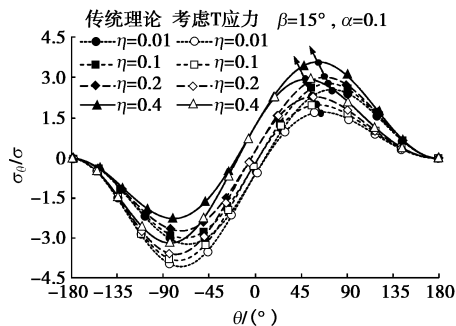


图 8 η 对周向应力分布的影响

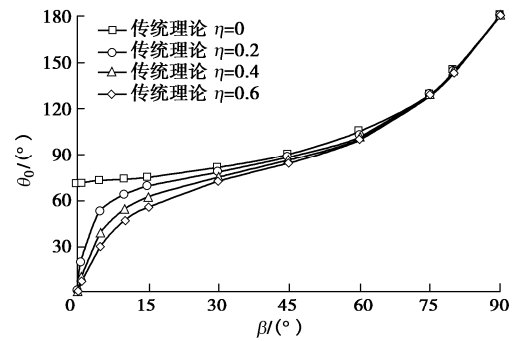
Fig. 8 Effects of η on distribution of tangential stress

3.3 张拉起裂角

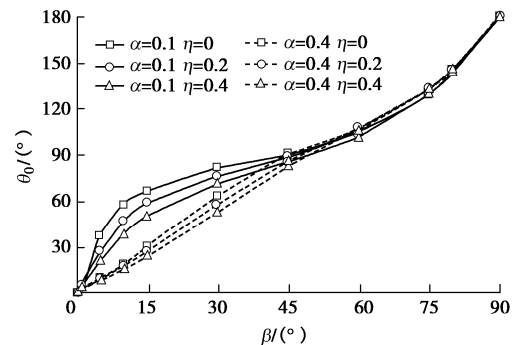
以单轴受压状态为例 ($\lambda = 0$), 研究 α 和 η 对张拉起裂角的影响。图 9 (a) 中实线为采用传统理论针对数学裂缝计算得到的预测曲线, 许多学者研究中也得到了这条曲线^[6, 10], 不过其张拉起裂角恒大于 70.5° , 与试验结果不符。考虑裂缝钝化度后得到一定改善, 张拉起裂角 θ_0 随着 η 增大而减小。李部等^[17]研究中考虑了横向压应力对非闭合裂缝的影响, 其计算曲线与图 8 中 3 条虚线类似, 但其试验值仍与理论值存在较大差距, 可能是未考虑材料属性导致的。

从图 9 (b) 可知, 当 η 相同时, 考虑 T 应力后起裂角曲线发生改善, 在裂缝倾角小于 45° 时, 张拉起裂角 θ_0 且随 α 增加而减小。

值得指出的是, 以上计算的曲线中均可发现, 当 β 为 90° 时起裂角为 180° , 实际情况并不会出现。许多试验中也表明, 对于水平裂缝, 裂缝中部区域首先发生张拉起裂, 随后在端部可能会出现次生裂缝。Miao 等^[30]结合数字图像处理技术分析, 认为该次生裂缝由剪应力引起。



(a) 传统理论



(b) 考虑 T 应力

图 9 η 和 α 对张拉起裂角的影响

Fig. 9 Effects of η and α on initiation angle of cracks

4 试验验证与讨论

4.1 试验验证

含裂缝岩石试样制备不便, 学者们通常采用类岩石材料模拟, 为验证本文准则合理性, 选取典型的类岩石材料的中心斜裂缝单轴压缩试验结果与理论值进行对比。由于不同学者采用的材料和试样结构存在差异, 且少有文献给出明确的临界尺寸 r_c 因而无法确定相对临界尺寸 α , 而相对钝化系数 η 一般能够从其试样结构特征获取。因此, 根据不同相对钝化系数 η 对不同学者的研究成果进行分别讨论, 所有计算曲线均已考虑了相对钝化系数的影响。其中, 当 $\beta = 90^\circ$ 时裂缝端部最大周向应力为 0, 端部并不发生张拉起裂, 故在对比分析时将此点剔除。

(1) $\eta = 0.1$

Bobet^[6]采用石膏模拟单轴压缩下岩石的断裂试验受到国内外学者的广泛引用, 其试验中采用的非闭合裂缝几何特征为: $2a = 12.7 \text{ mm}$, $2b = 0.1 \text{ mm}$, 对应本文的相对钝化系数 $\eta = 0.1$, 其给出了材料属性参数 $r_c = 0.22 \text{ mm}$, 对应本文的相对临界尺寸 $\alpha = 0.26$ 。同时, Bobet 采用数值模拟方法与试验值进行了验证, 图 10 中计入了其试验值和模拟值。

从图 10 可知, 当 $\beta = 45^\circ$ 和 60° 时, 传统理论和考虑 T 应力的预测值与 Bobet^[6]研究结果均比较吻

合, 当 $\beta = 30^\circ$ 时, Bobet^[6]试验值和模拟值均比传统理论计算值更小, 而考虑 T 应力之后, 预测结果和 Bobet^[6]的试验值和模拟值吻合程度很高, 说明本文准则预测 Bobet^[6]的结果是成功的。由于 Bobet^[6]试验中数据点仅涉及 $\beta = 30^\circ$, 45° 和 60° 3 种角度, 还需进一步讨论。

Wong 等^[7]采用了类似的试样结构 ($2a = 12.5$ mm, $2b = 0.1$ mm, $\eta = 0.1$), 也对石膏进行了试验, 其倾角取值更为密集。虽然在 $\beta = 45^\circ$ 附近其试验值略高于理论值, 但在 $\beta < 45^\circ$ 范围明显体现了本文准则的合理性。假定石膏的材料属性一致, 从总体来看, Wong 等^[7]试验点与 $\alpha = 0.26$ 曲线也较为吻合, 体现了起裂角随裂缝倾角增加而增加的规律。

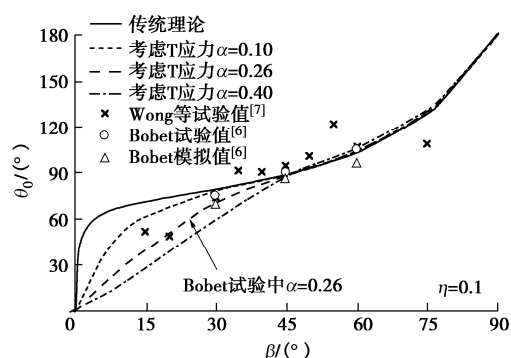


图 10 石膏试验值与理论值对比 ($\eta = 0.1$)

Fig. 10 Comparison between theoretical and experimental results of gypsum ($\eta = 0.1$)

(2) $\eta = 0.2$

Vesga 等^[8]、郭少华^[9]、Lin 等^[10]以及 Wang 等^[26]分别针对压实黏土、石膏、水泥砂浆和花岗岩试样开展了中心斜裂缝单轴压缩试验, 裂缝相对钝化系数 η 均在 0.2 左右, 但相对临界尺寸 α 未知。除压实黏土试样的裂缝长度 $2a$ 为 25 mm, 其他 3 种材料试样的裂缝长度 $2a$ 均为 30 mm。假定石膏、水泥砂浆与花岗岩这 3 种材料的 r_c 差距不大, 取 $r_c = 0.2 \sim 1.0$ mm, 则 $\alpha = 0.16 \sim 0.37$ 。Vesga 等^[8]研究中的压实黏土含水率较小, 但脆性仍相对其它材料更差, 参考 Wang 等^[16]对不同压实黏土 r_c 的对比研究, 取该压实黏土 $r_c = 0.8 \sim 3.3$ mm, 则 $\alpha = 0.36 \sim 0.73$ 。

从图 11 可知, 当 $\beta = 45^\circ$ 时, 不同材料的起裂角基本相同, 此时不同理论曲线在该角度下的起裂角也是基本相同的。随着 β 偏离 45° , 不同材料的试验值均偏离传统理论预测曲线。考虑 T 应力后, 在 $\beta = 0^\circ \sim 60^\circ$ 范围内, 石膏^[9]、水泥砂浆^[10]及花岗岩材料^[26]的试验值或模拟值处于 $\alpha = 0.20$ 曲线附近, 而压实黏土^[8]的试验值则与 $\alpha = 0.40$ 曲线吻合, 根据试验反推得到的 α 值在预估范围之内, 充分说明了压实黏土的

r_c 值大于其他 3 种材料, 说明本文准则能够体现材料属性差异。当 $\beta > 60^\circ$ 后, 不同材料的试验值与理论值偏差均逐渐增大, 尤其是压实黏土的试验值, 其起裂角偏差约 50° 。Vesga 等^[8]指出, $\beta = 75^\circ$ 和 90° 时翼型张拉裂缝并不出现于裂缝端部附近, 而是出现与裂缝面中部区域, 此时采用线弹性断裂力学分析必然存在误差。

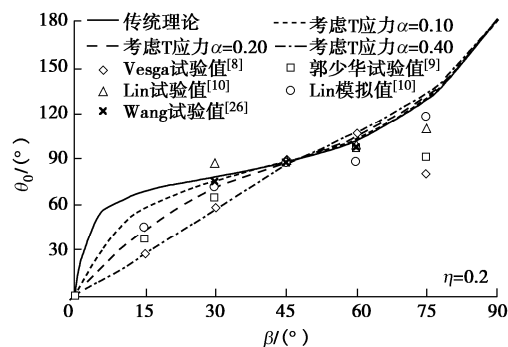


图 11 压实黏土、石膏、水泥砂浆和花岗岩试验值与理论值对比 ($\eta = 0.2$)

Fig. 11 Comparison between theoretical and experimental results of compacted clay, gypsum, cement mortar and granite ($\eta = 0.2$)

综上说明, 本文准则中考虑了 T 应力, 因此能够解释不同材料属性引起的差异性断裂行为, 在 $\beta \leq 45^\circ$ 范围 α 越大起裂角越小, 在 $\beta > 45^\circ$ 范围 α 越大起裂角越大。不过, 在 β 较大时, 由于裂端部发生的起裂机制发生改变, 此时理论值与试验值存在差距。

(3) $\eta = 0.3 \sim 0.45$

图 12 收集了 3 组试验数据, 对应的裂缝相对钝化系数 η 在 0.3 左右。Zhang 等^[27]和郭少华^[9]分别采用 PFC 数值试验和室内试验研究了石膏的断裂特性, 但相对临界尺寸 α 未知。假定两者采用的石膏材料差别不大, 取 $r_c = 0.2 \sim 1.0$ mm, 对应地, α 分别在 0.25~0.56 和 0.16~0.37 范围。Zhuang 等^[28]采用砂岩相似材料开展了中心斜裂缝单轴压缩试验, 根据其力学参数得到该相似材料 $r_c = 2.96$ mm, 对应地, 根据其裂缝长度 $2a = 15$ mm 得到 $\alpha = 0.89$ 。

从图 12 可知, $\beta = 0^\circ$, 15° 和 30° 时 3 种材料试验值处于 $\alpha = 0.20$ 和 $\alpha = 0.40$ 曲线之间, 根据 α 预估值范围, Zhang 等^[27]、郭少华^[9]的试验值在该角度范围内与本文准则吻合程度较好。而随着 β 增加, 所有试验值与理论值的差距均逐渐增大。根据 Zhuang 等^[28]的试验值分布规律, 其采用的砂岩相似材料的 α 值应与前两者所采用的材料相近, 但其文献中给出的 α 值达到 0.89, 与本文理论曲线存在显著差异。可能是抗拉强度和 I 型断裂韧度测试方法或精度导致的。按照 Zhuang 等^[28]文献中给出的砂岩的力学性能可知, 其 r_c 在 0.48~1.80 范围, 对应 $\beta = 0.36 \sim 0.69$,

较 0.89 小得多。

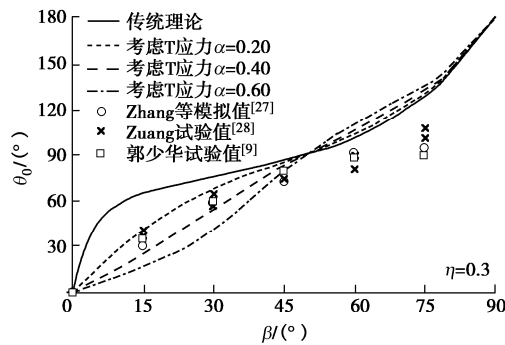


图 12 石膏和砂岩相似材料试验值与理论值对比 ($\eta = 0.3$)

Fig. 12 Comparison between theoretical and experimental results of gypsum and sandstone similar materials ($\eta = 0.3$)

此外,郭少华^[9]研究中也对相对钝化系数 η 为0.45的石膏试样进行了试验,如图13所示。在类似的,在 $\beta = 0^\circ$, 15° 和 30° 时,其试验值处于 $\alpha = 0.20$ 和 $\alpha = 0.40$ 曲线之间,根据 α 预估值范围说明吻合程度较好,但随着 β 增加,本文理论值与试验值的差距较大。

综上可知,基于传统断裂力学理论,采用MTS准则计算非闭合裂缝的起裂角时,由于将其裂缝厚度考虑成趋于0的数值,忽略了横向压应力的作用,计算得到的张拉起裂角恒大于 70.5° 。本文准则考虑了裂缝几何特性和T应力时,引入了相对钝化系数 η 和相对临界尺寸 α ,不仅能够体现裂缝几何特性的影响,而且体现了不同材料的差异性断裂行为。

当 $\eta = 0.1$ 和 0.2 时,本文准则在 $\beta = 0^\circ \sim 60^\circ$ 与试验值吻合程度较高;在 $\eta = 0.3$ 和 0.45 时,本文准则仅在 $\beta = 0^\circ \sim 30^\circ$ 时与试验值吻合较好,随着 β 增加,偏离程度逐渐增大。可见,本文准则存在一定适用范围。

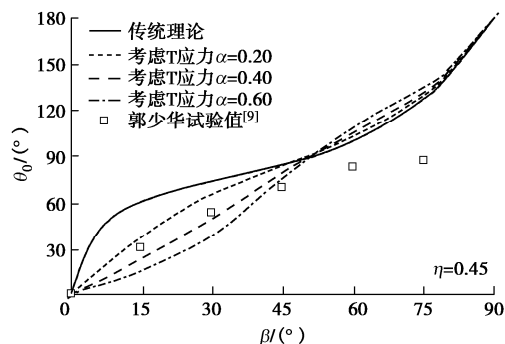


图 13 石膏试验值与理论值对比 ($\eta = 0.45$)

Fig. 13 Comparison between theoretical and experimental results of gypsum ($\eta = 0.45$)

4.2 讨论

采用Williams展开项建立的压剪断裂准则,其前

提假设是建立在数学裂缝基础之上的,一般不考虑横向压应力的影响。本文准则引入了相对钝化系数,体现了裂缝几何形态对裂缝端部应力集中特性,即在应力强度因子 K_I 中得到了体现。不过,仍无法改变断裂力学理论中认为裂缝在端部起裂的假定。

为进一步探究其原因,对于本文图3中的真实裂缝模型,文献[23]中采用复变函数和保角变换方法,得到相对钝化系数和裂缝倾角对裂纹面最大拉应力出现位置的影响。令 s 为最大拉应力出现位置距裂缝尖端的距离,将 s 除以裂缝半长 a 进行无量纲化,如图14所示。从图14可知: η 一定时, s/a 随着 β 增大而增大,呈指数型曲线状; β 一定时, s/a 随着 η 增大而增大。当 $\eta = 0.1$ 和 0.2 时, s/a 在 $\beta = 0^\circ \sim 60^\circ$ 范围趋近于0,说明了本文准则在以上范围的合理性。而当 $\eta = 0.3$ 和 0.45 时,起裂位置偏离裂缝端部的趋势越来越明显,说明了图12,13中预测曲线偏离试验点的原因。

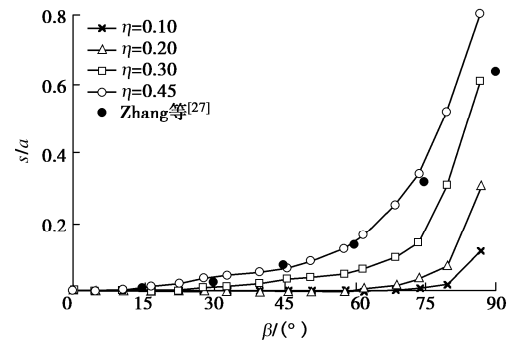


图 14 η 对最大拉应力出现位置的影响

Fig. 14 Effects of η on location of maximum tangential stress

此外,图14中实心圆点是Zhang等^[27]采用PFC模拟时监测的数据,其非闭合裂缝的相对钝化系数 η 约为0.32,进一步说明了起裂位置与裂缝倾角的关系。根据图5也可发现,在单轴受压情况下,即便是 $\eta = 0.1$ 时,裂缝倾角 $\beta = 85^\circ$ 时最大周向应力已经趋于0,说明近水平裂缝不可能在端部发生张拉起裂。现有文献中,相对钝化系数最小也只能在 $\eta = 0.1$ 。根据图14,此时在 $\beta > 80^\circ$ 后,裂缝起裂点逐渐远离裂缝端部,许多试验现象也验证了这点^[8-9]。

目前岩石压剪断裂准则大多是建立在数学裂缝模型基础上,以裂缝端部起裂为前提假设,分析方法往往是先建立理论模型然后采用试验结果去验证理论的合理性和适用性。对于压剪非闭合裂缝而言,由于室内试验中很难做到无限细长的裂缝,无法真正接近数学裂缝的假设条件,导致采用断裂力学理论建立的压剪断裂准则在一定范围是失效的。拉剪裂缝也存在此问题,但由于拉剪作用下裂缝端部的最大周向应力并不会趋于0,多数情况下在端部附近发生应力集中,

裂缝几何特性对拉剪裂缝的影响不如压剪非闭合裂缝显著。

采用室内试验验证基于断裂力学理论建立的非闭合裂缝压剪起裂准则时, 必须控制试样的裂缝的几何特性, 也就是要确定何时能够接近数学裂缝的假定条件。根据本文试验验证结果来看, 单轴加载情况下, 相对钝化系数 $\eta \leq 0.2$ 时在 $\beta = 0^\circ \sim 60^\circ$ 范围能够满足条件。当 η 较大时, 起裂点位置逐渐远离裂缝端部, 使得试验值与理论值必然存在较大误差。

当裂缝厚度较大时, 应当将其考虑成扁椭圆裂缝模型, 采用复变函数和保角变换的方法, 根据裂缝的具体形态建立裂缝面方程, 考虑裂缝面各个点的应力状态, 此时断裂准则中涉及了裂缝起裂点位置, 但似乎无法考虑材料属性的影响。

5 结 论

(1) 引入相对钝化系数 $\eta = \sqrt{b/a}$ 和相对临界尺寸 $\alpha = \sqrt{2r_c/a}$ 对压剪非闭合裂缝的应力场进行定量描述, 沿用最大周向应力准则的思想, 建立了考虑裂缝几何特性和 T 应力的压剪张拉断裂准则。相对钝化系数 η 增加对裂缝端部最大周向应力存在促进作用, 相对临界尺寸 α 对最大周向应力存在抑制作用。

(2) 针对压剪非闭合裂缝, 传统线弹性断裂力学理论中未考虑裂缝厚度, 导致计算得到的张拉起裂角恒大于 70.5° 。本文准则引入相对钝化系数和相对临界尺寸, 使得起裂角预测曲线得到改善, 且能够解释裂缝长度和材料属性共同引起的差异化断裂行为。

(3) 当相对钝化系数 $\eta \leq 0.2$ 、裂缝倾角 $\beta = 0 \sim 60^\circ$ 时, 本文准则对典型类岩石材料的张拉起裂角预测是成功的。然而, 随着 η 逐渐增大, 本文准则理论值与试验值误差逐渐较大, 在 β 较大时尤为明显。主要原因是由于 η 增大后, 起裂点逐渐偏离裂缝端部, 与理论假设存在差异。

(4) 采用室内试验验证基于断裂力学理论建立的非闭合裂缝压剪起裂准则时, 试样的裂缝厚度需要加以控制, 否则试验和理论代表的模型是截然不同的。根据本文成果, 建议相对钝化系数 $\eta \leq 0.2$, 若预制裂缝厚度由于条件限制无法足够小, 可同时增大试样尺寸和裂缝长度。

参考文献:

[1] VÁSÁRHELYI B, BOBET A. Modeling of crack initiation, propagation and coalescence in uniaxial compression[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 2000, **33**(2): 119 - 139.

[2] ALIHA M R M, AYATOLLAHI M R, SMITH D J, et al.

Geometry and size effects on fracture trajectory in a limestone rock under mixed mode loading[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2010, **77**(11): 2200 - 2212.

[3] LIU H Y. Wing-crack initiation angle: A new maximum tangential stress criterion by considering T-stress[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2018, **199**: 380 - 391.

[4] TANG S B, BAO C Y, LIU H Y. Brittle fracture of rock under combined tensile and compressive loading conditions[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2017, **54**(1): 88 - 101.

[5] 刘红岩. 考虑 T 应力的岩石压剪裂纹起裂机理[J]. 岩土工程学报, 2019, **41**(7): 1296 - 1302. (LIU Hong-yan. Initiation mechanism of rock shear crack considering T-stress[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2019, **41**(7): 1296 - 1302. (in Chinese))

[6] BOBET A. The initiation of secondary cracks in compression[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2000, **66**(2): 187 - 219.

[7] WONG L, EINSTEIN H. Fracturing behavior of prismatic specimens containing single flaws[C]// Proceedings of the 41st US Rock Mechanics Symposium-ARMA's Golden Rocks 2006 - 50 Years of Rock Mechanics, 2006, Golden.

[8] VESGA L, VALLEJO L, Lobo-Guerrero S. DEM analysis of the crack propagation in brittle clays under uniaxial compression tests[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2008, **32**: 1405 - 1415.

[9] 郭少华. 岩石类材料压缩断裂的实验与理论研究[D]. 长沙: 中南大学, 2003. (GUO Shao-hua. Experimental and Theoretical Study on Compression Fracture of Rock Materials[D]. Changsha: Central South University, 2003. (in Chinese))

[10] LIN H, YANG H T, WANG Y X, et al. Determination of the stress field and crack initiation angle of an open flaw tip under uniaxial compression[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2019, **104**: 102358.

[11] SMITH D J, AYATOLLAHI M R, PAVIER M J. The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed-mode loading[J]. Fatigue Fracture of Engineering Materials and Structures, 2001, **24**(2): 137 - 150.

[12] AYATOLLAHI M R, ALIHA M R M. Wide range data for crack tip parameters in two disc-type specimens under mixed mode loading[J]. Computational Materials Science, 2007, **38**(4): 660 - 670.

[13] AYATOLLAHI M R, MIRMOHAMMADI S A, SHIRAZI H A. The tension-shear fracture behavior of polymeric bone cement modified with hydroxyapatite nano-particles[J].

- Archives of Civil and Mechanical Engineering, 2018, **18**(1): 50 - 59.
- [14] LIU H Y, LV S R. A model for the wing crack initiation and propagation of the inclined crack under uniaxial compression[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2019, **123**: 104121.
- [15] TANG S B. The effect of T-stress on the fracture of brittle rock under compression[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2015, **79**: 86 - 98.
- [16] WANG J J, HUANG S H, GUO W L, et al. Experimental study on fracture toughness of a compacted clay using semi-circular bend specimen[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2020, **224**: 106814.
- [17] 李 部, 黄润秋, 吴礼舟. 类岩石脆性材料非闭合裂纹的 I - II 压剪复合型断裂准则研究[J]. 岩土工程学报, 2017, **39**(4): 662 - 668. (LI Bu, HUANG Run-qiu, WU Li-zhou. Compression-shear fracture criteria for mixed mode I - II of open crack of rock-like brittle materials[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2017, **39**(4): 662 - 668. (in Chinese))
- [18] 赵彦琳, 范 勇, 朱哲明, 等. T 应力对闭合裂纹断裂行为的理论和实验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2018, **37**(6): 1340 - 1349. (ZHAO Yan-lin, FAN Yong, ZHU Zhe-ming, et al. Theoretical and experimental study on the fracture behavior of closed crack under t-stress[J]. Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2018, **37**(6): 1340 - 1349. (in Chinese))
- [19] WANG J J. Hydraulic Fracturing in Earth-Rock Fill Dams[M]. Singapore: John Wiley & Sons Singapore Pte Ltd., 2014.
- [20] RAO Q H, SUN Z Q, STEPHANSSON O, et al. Shear fracture (Mode II) of brittle rock[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2003, **40**(3): 355 - 375.
- [21] 蒲成志, 杨仕教, 张春阳. 张开度影响的裂隙体破断机制探讨[J]. 岩土工程学报, 2019, **41**(10): 1836 - 1844. (PU Cheng-zhi, YANG Shi-jiao, ZHANG Chun-yang. Fracture mechanism of fracture body affected by opening degree[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2019, **41**(10): 1836 - 1844. (in Chinese))
- [22] 李银平, 杨春和. 裂纹几何特征对压剪复合断裂的影响分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, **25**(3): 462 - 466. (LI Yin-ping, YANG Chun-he. Analysis of the influence of crack geometry on compression shear composite fracture[J]. Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, **25**(3): 462 - 466. (in Chinese))
- [23] 李 强. 压缩作用下岩体裂纹起裂扩展规律及失稳特性的研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2008. (LI Qiang. Study on Crack Initiation and Propagation Law and Instability Characteristics of Rock Mass under Compression[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2008. (in Chinese))
- [24] MUSKHELISHVILI N. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity[M]. Leyden: Noordhoff, 1953.
- [25] 陈 簏. 论裂纹扩展的判据[J]. 金属学报, 1977, **13**(1/2): 57 - 72. (CHEN Chi. On the criterion for crack extension[J]. Acta Metallurgica Sinica, 1977, **13**(1/2): 57 - 72. (in Chinese))
- [26] WANG Y X, ZHANG H, LIN H, et al. Fracture behaviour of central-flawed rock plate under uniaxial compression[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2020, **106**: 102503.
- [27] ZHANG X P, WONG L N Y. Cracking processes in rock-like material containing a single flaw under uniaxial compression: a numerical study based on parallel bonded-particle model approach[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 2012, **45**(5): 711 - 737.
- [28] ZHUANG X Y, CHUN J W, ZHU H H. A comparative study on unfilled and filled crack propagation for rock-like brittle material[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2014, **72**: 110 - 120.
- [29] LI X F, LEE K Y, TANG G J. Kink angle and fracture load for an angled crack subjected to far-field compressive loading[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2012, **82**: 172 - 184.
- [30] MIAO S T, PAN P Z, WU Z G, et al. Fracture analysis of sandstone with a single filled flaw under uniaxial compression[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2018, **204**: 319 - 343.