

DOI: 10.11779/CJGE202008012

# 一种模拟节点达西渗透流速的双重网格多尺度有限单元法

赵文凤<sup>1</sup>, 谢一凡<sup>\*2</sup>, 吴吉春<sup>1</sup>

(1. 南京大学地球科学与工程学院, 江苏 南京 210023; 2. 河海大学水利水电学院, 江苏 南京 210024)

**摘要:** 提出了一种用于模拟节点达西渗透流速的双重网格多尺度有限单元法(D-MSFEM)。该方法是多尺度有限单元法(MSFEM)与VedatBatu双重网格技术(D-FEM)的有机结合,不仅可以应用双重网格技术获得连续、精确的水头一阶导数,还可以应用多尺度基函数直接在粗网格上求解水头和达西渗透流速,从而突破了传统有限元基础框架的限制,具有极高的计算效率。同时,D-MSFEM还可以应用粗尺度节点的达西渗透流速和多尺度基函数直接获得细尺度节点的达西渗透流速,而无需在精细尺度上求解,能够节约大量的计算消耗。应用D-MSFEM和多种传统达西渗透流速计算方法对地下水稳定流和非稳定流进行了模拟,结果显示D-MSFEM具有极高的模拟效率和精度。该方法可为高效计算地下水达西渗透流速问题提供新途径。

**关键词:** 双重网格技术; 多尺度有限单元法; 达西渗透流速; 地下水流; 数值模拟

**中图分类号:** TU45

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000-4548(2020)08-1474-08

**作者简介:** 赵文凤(1994—),男,江苏淮安人,硕士研究生,主要从事地下水流数值模拟方面的研究工作。E-mail: MF1729038@smail.nju.edu.cn。

## A dual-mesh multiscale finite element method for simulating nodal Darcy velocities in aquifers

ZHAO Wen-feng<sup>1</sup>, XIE Yi-fan<sup>2</sup>, WU Ji-chun<sup>1</sup>

(1. School of Earth Sciences and Engineering, Nanjing University, Nanjing 210023, China; 2. College of Water Conservancy and

Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing 210024, China)

**Abstract:** A dual-mesh multiscale finite element method (D-MSFEM) is developed to simulate nodal Darcy velocities in aquifers. It is a combination of the multiscale finite element method (MSFEM) and the dual-mesh finite element method (D-FEM). D-MSFEM can obtain continuous first-order head derivatives and solve the head and nodal Darcy velocities directly on the coarse grid without the necessity for solving Darcy equation specifically. Therefore, it breaks through the limitations of the traditional finite element basic framework and improves the computational efficiency extremely in comparison to the traditional methods for nodal Darcy velocities. D-MSFEM can also directly obtain the fine-scale nodal Darcy velocities by using the coarse-scale nodal Darcy velocities and the multiscale base functions, which can save a lot of computational cost. D-MSFEM is compared with some traditional methods for nodal Darcy velocities in the simulation of groundwater steady flow and transient flow. The results show that D-MSFEM achieves higher simulation efficiency and accuracy. This study may provide a new approach to simulate nodal Darcy velocities in aquifers efficiently.

**Key words:** dual-mesh technique; multiscale finite element method; Darcy velocity; groundwater flow; numerical simulation

## 0 引言

在地下水系统的热量和质量运移问题的模拟中,连续、精确的达西渗透流速能够提高对流-弥散方程的模拟精度<sup>[1]</sup>。因此,对获取精确、高效的达西渗透流速的地下水数值算法的研究具有重要意义<sup>[2-4]</sup>。然而,传统有限元类的达西渗透流速算法受到有限元基础框架的限制,在模拟大尺度、非均质等情况下的地下水

问题时,常需要更为精细的网格剖分来保证网格单元内部渗透系数可以视为常数,以此来保证计算精度,

**基金项目:** 国家自然科学基金青年基金项目(41702243); 国家自然科学基金-新疆联合项目(U1503282); 中央高校基本业务费项目(2018B05114)

**收稿日期:** 2019-07-07

**\*通信作者** (E-mail: yfxie@hhu.edu.cn)

而精细剖分却要占用大量的计算时间与计算消耗, 导致计算效率较低<sup>[5]</sup>。因此本文应用多尺度有限单元法 (MSFEM)<sup>[6-13]</sup>改进传统达西渗透流速算法, 多尺度基函数可以直接在粗网格上求解水头和达西渗透流速, 能在保证计算精度的同时提升计算效率, 从而解决有限元框架的限制。笔者在前期工作中, 已经证明了用 MSFEM 改进三次样条技术形成的算法<sup>[14-17]</sup>和用 MSFEM 改进 Yeh 的伽辽金模型形成的算法<sup>[18]</sup>的有效性。

与其他传统达西渗透流速算法相比, VedatBatu 的双重网格技术<sup>[19]</sup>原理更简单、直接, 技术上更易于操作。与其他方法不同, 该算法仅仅需要应用有限元法求解水流方程即可, 无需专门求解达西方程, 因而非常易于工程人员的理解和实施。该算法的主要思想是: 在原有的剖分网格基础上, 将内部节点平移一段极小的距离, 并将平移后的点视为原节点, 通过平移前后的水头差和位移差, 再结合达西定律即可求解出该点达西渗透流速。通过此方法求出的达西渗透流速具有连续性, 因而具有很高的计算精度。然而, 如前文所述, 该算法受到有限元框架的限制, 计算效率较低。地下水问题具有非均质性, 且研究区域常具有较大尺度。因而, 在使用包括双重网格技术在内的传统达西渗透流速方法时需要精细剖分保证精度, 需要大量的计算消耗。

因此, 本文将双重网格技术与多尺度有限单元法有机结合, 提出了双重网格多尺度有限单元法 (D-MSFEM)。D-MSFEM 的主要思想是: 先将研究区剖分多尺度网格, 运用多尺度有限单元法高效求解各节点的水头值; 再将研究区网格沿所求达西渗透流速方向的坐标轴平移一段极小距离, 并在平移后的网格上运用多尺度有限单元法二次求解水头, 从而得到同一点平移前后的水头差和位移差; 最后结合双重网格技术求解出连续的水头一阶导数, 从而获得连续、精确的达西渗透流速。本文的数值试验将 D-MSFEM 与 VedatBatu 的 D-FEM<sup>[19]</sup>以及精度更高的 Yeh 的伽辽金有限元模型<sup>[20]</sup>等传统方法进行了比较, 结果显示 D-MSFEM 能够仅应用和传统方法相近的时间即可获得精细剖分网格上的所有水头值和达西渗透流速值, 并具有很高的计算精度。

## 1 原理和算法

### 1.1 D-MSFEM 的网格构造

图 1 展示了双重网格多尺度有限单元法的第一重网格构造, 设研究区域原点为  $(0, 0)$ , 将研究区剖分成  $N \times N$  个粗网格单元, 用粗实线表示。每个粗网格

单元再剖分成 8 个细网格单元, 用细虚线表示。图 1 只画出了边界上的单元剖分, 中间单元省略, 用点虚线表示。其中  $\square ijkl$  为一示例粗网格单元。

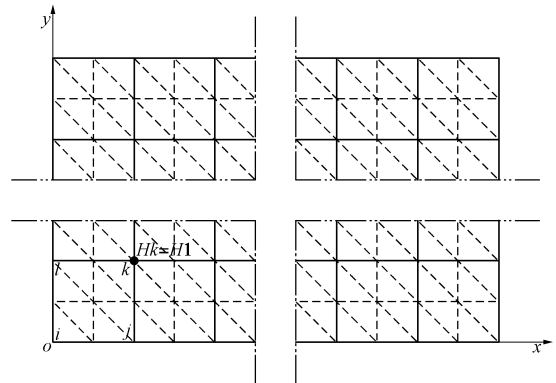


图 1 双重网格多尺度有限元法 (D-MSFEM) 的研究区第一重 (原) 网格

Fig. 1 Original study region mesh of D-MSFEM

在此基础上, D-MSFEM 应用双重网格技术进行第二重网格构造。以求解  $x$  方向上达西渗透流速的网格为例 (图 2), 粗实线代表平移之前的原粗网格边界, 粗虚线代表平移之后的粗网格边界, 细虚线代表对平移之后的粗网格精细剖分。图 2 中, 平移之前的粗网格单元  $\square ijkl$  经过平移之后变成  $\square ij'k'l'$ 。主要思想是, 保持研究区边界条件不变, 内部垂向的粗网格线沿着坐标轴  $x$  方向向右平移一段极小距离  $\Delta x$ 。在左右边界条件不变的前提下, 平移之后靠左边界的第一列单元的水平尺度扩大  $\Delta x$ , 平移之后靠右边界的最后一列单元的水平尺度缩小  $\Delta x$ , 中间单元大小不变, 只是位置向右平移了  $\Delta x$ 。平移之后的研究区内部粗网格 (粗虚线) 和研究区外边界重新构成了一组  $N \times N$  的粗网格单元, 再将每个粗网格剖分成 8 个细网格单元。

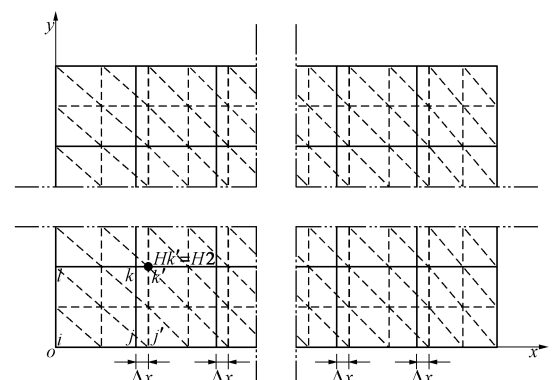


图 2 双重网格多尺度有限元法 (D-MSFEM) 的研究区第二重网格

Fig. 2 Second study region mesh of D-MSFEM

### 1.2 构造基函数

D-MSFEM 通过求解简化的椭圆方程构造基函数, 能够有效抓住细尺度的信息。设坐标轴方向与渗

透系数张量的主方向一致, 示例粗网格单元为  $\square ijkl$ , 顶点按照逆时针顺序分别为  $i, j, k, l$ , 相应节点的基函数分别为  $\Psi_i, \Psi_j, \Psi_k, \Psi_l$ 。以构造基函数  $\Psi_i$  的过程为例, 考虑在粗网格单元  $\square ijkl$  上的简化的椭圆方程:

$$-\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla \Psi_i) = 0 \quad (x, y) \in \square ijkl, \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix}$  为渗透系数张量,  $K_x, K_y$  分别为坐标轴  $x$  方向,  $y$  方向的渗透系数分量。此方程可以采用基函数的线性、振荡、全局等边界条件<sup>[7]</sup>。

运用伽辽金加权余量法, 得到一个  $p \times p$  的方程组:

$$J_{M_\tau} = \iint_{\square ijkl} (\mathbf{K} \nabla \Psi_i) \cdot \nabla N_{M_\tau} dx dy = 0 \quad (\tau = 1, 2, \dots, p), \quad (2)$$

式中,  $N_{M_\tau}$  为  $M_\tau$  点的线性基函数。

在粗网格单元  $\square ijkl$  中的任意细网格单元  $\Delta abc$  内, 根据多尺度有限元法基础理论<sup>[8]</sup>,  $\Psi_i$  可被线性表示为

$$\Psi_i(x, y) = \Psi_i(a)N_a + \Psi_i(b)N_b + \Psi_i(c)N_c \quad ((x, y) \in \Delta abc). \quad (3)$$

同理,  $\Psi_j, \Psi_k, \Psi_l$  可被线性表示为

$$\Psi_j(x, y) = \Psi_j(a)N_a + \Psi_j(b)N_b + \Psi_j(c)N_c \quad ((x, y) \in \Delta abc), \quad (4)$$

$$\Psi_k(x, y) = \Psi_k(a)N_a + \Psi_k(b)N_b + \Psi_k(c)N_c \quad ((x, y) \in \Delta abc), \quad (5)$$

$$\Psi_l(x, y) = \Psi_l(a)N_a + \Psi_l(b)N_b + \Psi_l(c)N_c \quad ((x, y) \in \Delta abc). \quad (6)$$

式 (3) ~ (6) 中,  $N_a, N_b, N_c$  为在  $a, b, c$  点的线性基函数。

将式 (3) 代入式 (2), 得到关于基函数  $\Psi_i$  的内点的方程组,  $\Psi_j, \Psi_k, \Psi_l$  的方程组可以用类似方法得到。通过求解这些正定方程组, 分别得到基函数  $\Psi_i, \Psi_j, \Psi_k, \Psi_l$  在粗网格单元内部所有节点的值。

### 1.3 应用 D-MSFEM 求解水头

和传统双重网格有限元法不同, D-MSFEM 采用 MSFEM 进行水头求解, 能够显著提升计算效率。以二维稳定流问题为例, 在原网格 (图 1) 上考虑如下方程:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) &= W, \\ H|_{\partial \Omega} &= g \end{aligned} \right\} \quad (x, y) \in \Omega. \quad (7)$$

式中  $K_x, K_y$  分别为坐标轴  $x$  方向,  $y$  方向的渗透系数分量;  $g$  为定义边界的函数;  $W$  为源汇项;  $\Omega$  为研究区域, 设  $\Omega$  被剖分成  $N \times N$  份, 共有  $\gamma$  个矩形粗网格单元  $\square ijkl$ 。

将式 (7) 两边乘以基函数  $\Psi_i$ , 运用伽辽金加权余量法, 得到

$$\sum_1^\gamma \iint \left[ \left( K_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \left( K_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right] dx dy = \sum_1^\gamma \iint W \Psi_i dx dy. \quad (8)$$

根据多尺度有限元法基础理论<sup>[8]</sup>, 在研究区内任意粗网格单元  $\square ijkl$  内部的水头被可以表示为

$$H(x, y) = H_i \Psi_i(x, y) + H_j \Psi_j(x, y) + H_k \Psi_k(x, y) + H_l \Psi_l(x, y), \quad (9)$$

式中,  $H_i, H_j, H_k, H_l$  为粗网格单元  $\square ijkl$  顶点  $i, j, k, l$  处的水头值。

将式 (9) 代入式 (8) 中, 在每一粗网格单元  $\square ijkl$  上有

$$\begin{aligned} \iint_{\square ijkl} \left[ \left( K_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \left( K_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right] dx dy \\ = B_{ii} H_i + B_{ij} H_j + B_{ik} H_k + B_{il} H_l. \end{aligned} \quad (10)$$

同理, 将式 (7) 两边乘以基函数  $\Psi_j, \Psi_k, \Psi_l$ , 运用伽辽金加权余量法, 得到

$$\begin{aligned} \iint_{\square ijkl} \left[ \left( K_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + \left( K_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right] dx dy \\ = B_{ji} H_i + B_{jj} H_j + B_{jk} H_k + B_{jl} H_l, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\square ijkl} \left[ \left( K_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) \frac{\partial \Psi_k}{\partial x} + \left( K_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) \frac{\partial \Psi_k}{\partial y} \right] dx dy \\ = B_{ki} H_i + B_{kj} H_j + B_{kk} H_k + B_{kl} H_l, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\square ijkl} \left[ \left( K_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) \frac{\partial \Psi_l}{\partial x} + \left( K_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) \frac{\partial \Psi_l}{\partial y} \right] dx dy \\ = B_{li} H_i + B_{lj} H_j + B_{lk} H_k + B_{ll} H_l. \end{aligned} \quad (13)$$

把式 (10) ~ (13) 记作

$$B_{\theta i} H_i + B_{\theta j} H_j + B_{\theta k} H_k + B_{\theta l} H_l = F_\theta \quad (\theta = i, j, k, l). \quad (14)$$

式中  $H_i, H_j, H_k, H_l$  为粗网格单元  $\square ijkl$  4 个顶点的水头值;  $F_\theta$  为右端项。当  $\theta = i$  时, 系数  $B_{\theta i}, B_{\theta j}, B_{\theta k}, B_{\theta l}$  的表达式为

$$B_{ii} = \iint_{\square ijkl} \left( K_x \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + K_y \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right) dx dy, \quad (15)$$

$$B_{ij} = \iint_{\square ijkl} \left( K_x \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + K_y \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) dx dy, \quad (16)$$

$$B_{ik} = \iint_{\square ijkl} \left( K_x \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \frac{\partial \Psi_k}{\partial x} + K_y \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \frac{\partial \Psi_k}{\partial y} \right) dx dy, \quad (17)$$

$$B_{il} = \iint_{\square ijkl} \left( K_x \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \frac{\partial \Psi_l}{\partial x} + K_y \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \frac{\partial \Psi_l}{\partial y} \right) dx dy. \quad (18)$$

将式 (3) ~ (6) 代入式 (15) ~ (18) 即可得到  $B_{ii}, B_{ij}, B_{ik}, B_{il}$  的具体细尺度形式。当  $\theta = j, k, l$  时, 其余系数的表达式与式 (15) ~ (18) 类似。令

$A=[B]$ ,  $H=[H_i, H_j, H_k, H_l]^T$ ,  $F=[F_i, F_j, F_k, F_l]^T$ , 则式(14)可写成

$$AH=F \quad (19)$$

研究区每一个粗网格单元  $\square ijkl$  都可以得到一个类似(19)的线性方程, 联立这些方程构成一个关于  $H$  的线性方程组并求解, 即可得到研究区所有节点的水头值  $H$ 。

#### 1.4 应用 D-MSFEM 求解达西渗透流速

在 1.3 节中, 已经介绍了用 D-MSFEM 方法求解节点水头值的过程, 本节将介绍利用节点水头值求解节点的达西渗透流速。

以粗网格单元  $\square ijkl$  中点  $k$  在  $x$  方向上的达西渗透流速求解过程为例, 如图 1 所示, 在双重网格多尺度有限元法的第一重网格基础上, 设运用 1.3 节中 D-MSFEM 方法求解出  $k$  点的水头值为  $H_1$ 。保持研究区边界条件不变, 内部垂向的粗网格沿坐标轴方向平移一段极小距离  $\Delta x$ , 构成双重网格多尺度有限元法的第二重网格构造(图 2), 粗网格单元的剖分方式不变。

如图 2 所示, 粗网格单元  $\square ijkl$  平移之后变成  $\square ij'kl'$ , 点  $k$  平移后的变成点  $k'$ , 再次运用 1.3 节中 D-MSFEM 方法求解出平移之后点  $k'$  的水头值为  $H_2$ , 从而得到点  $k$  平移前后的水头差  $\Delta h$ 。

根据达西定律:

$$\mathbf{v}=\mathbf{K} \cdot \mathbf{J} \quad (20)$$

式中,  $\mathbf{v}$  为达西渗透流速,  $\mathbf{K}$  为渗透系数张量  $\mathbf{K}=\begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{J}$  为水力坡度  $\mathbf{J}=\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix}$ 。在直角坐标系中, 如以  $v_x$  表示沿  $x$  轴方向的达西渗透流速分量, 则有

$$v_x=K_x J_x=-K_x \frac{\partial H}{\partial x} \quad (21)$$

式中  $K_x$  为坐标轴  $x$  方向的渗透系数分量;  $J_x$  为坐标轴  $x$  方向的水力坡度分量  $J_x=-\frac{\partial H}{\partial x}$ , 可由同一点平移之后的水头差近似获得, 由于平移距离  $\Delta x$  极小, 平移前后点可视为同一点, 该点的水力梯度连续, 故达西渗透流速也连续。

因此由式(21)可得, 点  $k$  处在  $x$  方向上的达西渗透流速分量  $v_x(k)$  为

$$v_x(k)=-K_x \frac{H_2-H_1}{\Delta x} \quad (22)$$

同理,  $v_y(k)$  的计算过程与  $v_x(k)$  类似, 这里不再赘述。

## 2 数值试验

本文采用如下缩写方式: AS 表示解析解;  $v_x$  表

示  $x$  方向上的达西渗透流速, D-FEM 表示 VedatBatu 双重网格有限元方法; D-FEM-F 表示精细剖分的 VedatBatu 双重网格有限元方法; Yeh 表示 Gour - Tsyh Yeh 的伽辽金有限元方法; Yeh-F 表示精细剖分的 Gour - Tsyh Yeh 的伽辽金有限元方法; D-MSFEM 表示双重网格多尺度有限单元法; D-MSFEM( $a, b$ ) 表示用 D-MSFEM 方法将研究区划分为  $a$  个粗网格单元; 每个粗网格单元被剖分为  $b$  个细网格单元。D-MSFEM-L、D-MSFEM-O 分别表示 D-MSFEM 使用基函数线性边界条件、振荡边界条件。

本节将利用 D-MSFEM 求解渗透系数均质的二维稳定流问题、渗透系数非均质振荡的二维稳定流问题, 以及渗透系数渐变的二维非稳定流问题中的水头和达西渗透流速。并与 D-FEM、D-FEM-F、Yeh、Yeh-F 方法作比较。所有数值方法均采用 C++ 编写, 没有应用并行计算技术, 并且在同一计算机上运行。

本文的基础算法之一, VedatBatu 双重网格法在文献[19]中已经被证明该方法能够适用于各向异性介质。又因为各向同性与各向异性的计算过程基本一致, 并且本文的重点在于多尺度格式在该方法的应用情况分析, 故在算例部分使用了各向同性的算例。

#### 2.1 渗透系数均质的二维稳定流

地下水二维稳定流方程为

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial H}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial H}{\partial y}\right)=W \quad ((x, y) \in \Omega), \quad (23)$$

式中, 研究区域  $\Omega$  为  $[0,1] \times [0,1]$ , 渗透系数  $K_x=K_y=1$ , 解析解为  $H=xy(1-x)(1-y)$ , 含水层厚度为 1, 源汇项  $W$  及狄利克雷边界条件由解析解给出。

本例中, D-MSFEM、D-FEM 和 Yeh 方法均将研究区划分为  $N \times N$  份,  $N=10, 20, 30, 40$  时, 粗网格单元尺度分别为 0.1, 0.05, 0.03, 0.025。用 D-FEM 和 Yeh 方法计算时, 将研究区域分别剖分成 200, 800, 1800, 3200 个三角形粗网格单元 ( $N \times N \times 2$ )。与之对应的, 用 D-MSFEM 方法计算时, 将研究区域分别剖分成 100, 400, 900, 1600 个正方形粗网格单元 ( $N \times N$ ), 再将每一个粗网格单元剖分成 8 个三角形单元 ( $2 \times 2 \times 2$ )。同样, 用 Yeh-F 方法计算时, 将研究区域分别剖分成 800, 3200, 7200, 12800 个三角形单元, 以获得与 D-MSFEM 相同的细网格单元数目。D-FEM 和 D-MSFEM 方法中 4 种尺度对应的横向平移距离  $\Delta x$  分别取 0.001, 0.0002, 0.000053, 0.000016。

图 3 展示了水头的平均相对误差和粗网格单元尺度之间的关系, 结果显示, 随着粗网格单元尺度的减小, 水头精度升高。当粗网格单元尺度相同时, 各数值方法的水头精度从高到低依次为 Yeh-F、D-FEM-F、

D-MSFEM、Yeh、D-FEM，其中 Yeh-F、D-FEM-F、D-MSFEM 三种方法精度相近，且明显比 Yeh、D-FEM 精度更高。由于 Yeh 和 D-FEM（Yeh-F 和 D-FEM-F）都是在有限元的基础上计算，所以当剖份份数相同时，水头误差也相同。从这一结果可以看出，D-MSFEM 能够获得和精细剖分的传统方法相近的水头结果。

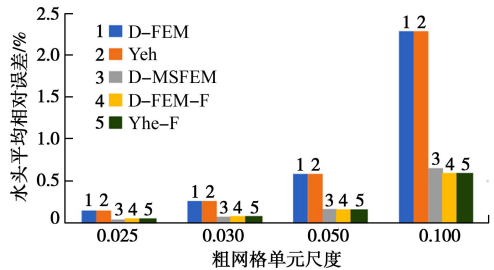


图 3 各数值方法所计算的水头平均相对误差与粗网格单元尺度关系  
Fig. 3 Relationship between coarse element scale and relative error of  $H$

图 4 展示了不同粗网格尺度下各数值方法计算达西渗透流速所需的时间（包含了水头计算时间）。当粗网格单元尺度相同时，各数值方法的所花时间从高到低为 Yeh-F、D-FEM-F、D-MSFEM、Yeh、D-FEM，其中 D-MSFEM、Yeh、D-FEM 明显比 Yeh-F、D-FEM-F 所花时间更少。当粗网格尺度为 0.025 时，Yeh-F 和 D-FEM-F 两种精细剖分方法所用时间最长，分别为 287，246 s；D-MSFEM、Yeh、D-FEM 用时较短依次为 10，10，8 s。

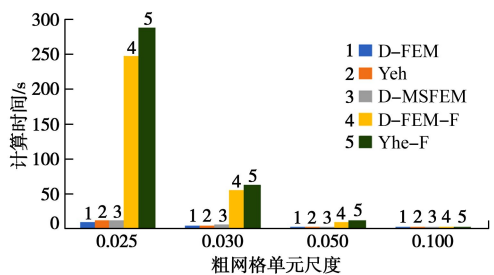


图 4 各数值方法所需计算时间与粗网格单元尺度关系  
Fig. 4 Relationship between coarse element scale and computation time

图 5 展示了达西渗透流速  $v_x$  的平均相对误差和粗网格单元尺度之间的关系，结果显示，随着粗网格单元尺度的减小， $v_x$  的精度升高。各数值方法的  $v_x$  精度从高到低依次为 Yeh-F、D-FEM-F、D-MSFEM、Yeh、D-FEM。其中，当粗网格尺度为 0.025 时，Yeh-F、D-MSFEM 和 D-FEM 方法的  $v_x$  的平均相对误差分别为 0.054%，0.086%，0.356%。根据图 3，粗网格尺度为 0.025 时，Yeh-F、D-MSFEM 和 D-FEM 方法的水头平均相对误差分别为 0.037%，0.042%，0.149%。精

细剖分的 Yeh-F 结果比其余方法精确，显示了速度误差主要是由水头误差产生的。D-MSFEM 的水头精度和 Yeh-F 十分接近，所以 D-MSFEM 相比于 D-FEM 和 Yeh，能够得到更为精确的水头值，从而提高速度精度。

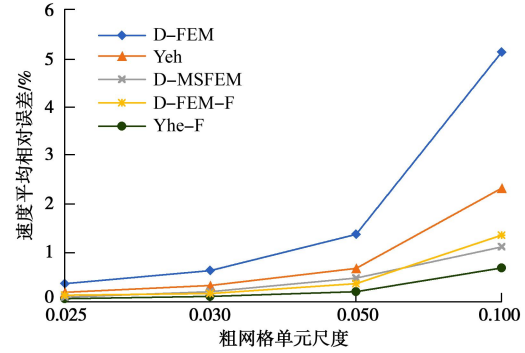


图 5 各数值方法所计算的  $v_x$  平均相对误差与粗网格单元尺度关系  
Fig. 5 Relationship between coarse element scale and relative error of  $v_x$

综合上述结果，发现 D-MSFEM 能够仅应用和传统方法相近的时间即可获得精细剖分网格上的所有水头值和达西渗透流速值，并具有很高的计算精度。

同时，D-MSFEM 还能获得细尺度达西渗透流速值。表 1 展示了粗网格单元尺度为 0.025 时，用 D-MSFEM（1600,50）计算的某一粗网格单元  $\square ijkl$  中细尺度节点速度  $v_x$  及其解析解，并比较相对误差。所取粗网格单元  $\square ijkl$  的顶点坐标为  $i(0.8, 0.6)$ ， $j(0.825, 0.6)$ ， $k(0.825, 0.625)$ ， $l(0.8, 0.625)$ 。

表 1 D-MSFEM（1600,50）计算的细尺度节点在  $x$  方向的达西渗透流速

Table 1 Fine-scale nodal Darcy velocities in $x$ direction calculated by D-MSFEM（1600,50）			
节点坐标	解析解	D-MSFEM	相对误差/%
(0.805,0.605)	0.149241	0.145775	2.38
(0.810,0.605)	0.149300	0.148165	0.77
(0.815,0.605)	0.149277	0.150554	0.85
(0.820,0.605)	0.149343	0.152944	2.35
(0.805,0.610)	0.148530	0.145119	2.35
(0.810,0.610)	0.148604	0.147498	0.75
(0.815,0.610)	0.148565	0.149877	0.88
(0.820,0.610)	0.148643	0.152256	2.37
(0.805,0.615)	0.147825	0.144433	2.35
(0.810,0.615)	0.147902	0.146801	0.75
(0.815,0.615)	0.147863	0.149168	0.87
(0.820,0.615)	0.147937	0.151536	2.37
(0.805,0.620)	0.147125	0.143716	2.37
(0.810,0.620)	0.147191	0.146072	0.77
(0.815,0.620)	0.147167	0.148428	0.85
(0.820,0.620)	0.147226	0.150784	2.36

从表 1 可以看出，D-MSFEM 的细尺度达西渗透流速值具有较高精度。同时，这些细尺度达西渗透流

速是 D-MSFEM 直接应用粗尺度节点的达西渗透流速值和多尺度基函数直接插值得到的, 无需额外的计算消耗。

为了评估式 (22) 计算节点达西渗透流速时所引入的误差大小, 利用解析解  $H = xy(1-x)(1-y)$  直接获得节点水头值, 来代替式 (22) 中节点平移前后的水头值  $H_1$  和  $H_2$ , 从而消除由于节点平移引起的水头误差, 以此来评估式 (22) 本身引入的的误差大小, 把该方法定义为 AS-D-MSFEM。

表 2 展示了当粗网格单元尺度为 0.025 时各数值方法所计算的截面  $y=0.6$  上各点以及研究区全局的达西渗透流速  $v_x$  的平均相对误差。可以看出各数值方法的精度从高到低依次为 AS-D-MSFEM、Yeh-F、D-MSFEM、D-FEM, 并且 AS-D-MSFEM、Yeh-F、D-MSFEM 的精度远高于 D-FEM。由此可见, 在不考虑水头误差的情况下, 式 (22) 所计算的达西渗透流速误差极小, 各方法计算达西渗透流速的误差主要来源于水头。同时, 由于 D-MSFEM 的水头误差极小, 故其使用式 (22) 获得的达西渗透流速时也仅引入了很小的误差。

表 2 各数值方法所计算的达西渗透流速的平均相对误差

Table 2 Relative errors of velocities calculated by numerical methods (%)

数值方法	截面平均相对误差	全局平均相对误差
D-FEM	0.325	0.356
D-MSFEM	0.080	0.086
Yeh-F	0.034	0.054
AS-D-MSFEM	0.005	0.006

2.2 渗透系数振荡的二维稳定流

渗透系数振荡的二维稳定流方程为式 (23), 渗透系数  $K_x = K_y = \frac{1}{2 + A \sin[Q(x+y)\pi]}$ 。研究区域  $\Omega$  为  $[0,1] \times [0,1]$ , 解析解为  $H = xy(1-x)(1-y)$ , 含水层厚度为 1, 源汇项  $W$  及狄利克雷边界条件由解析解给出。令振幅  $A=1.99$ , 相位  $Q=1.5$ , 则渗透系数的最大值为最小值的 400 倍, 图 6 为此非均质介质中渗透系数的三维分布示意图。

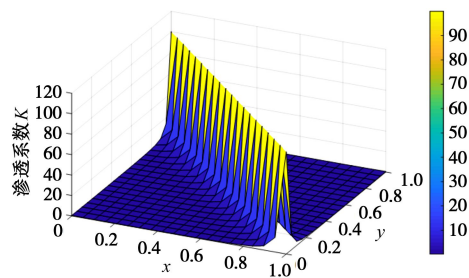


图 6 渗透系数  $K$  分布图  
Fig. 6 Hydraulic conductivities

本例用 Yeh-F、D-MSFEM-O、D-MSFEM-L、Yeh 以及 D-FEM 法求解。粗网格尺度取 0.025, D-FEM、Yeh 将研究区域分别剖分成 3200 个三角形粗网格单元 ( $N \times N \times 2$ )。D-MSFEM 将研究区域剖分成 1600 个正方形粗网格单元 ( $N \times N$ ), 再将每一个粗网格单元剖分成 8 个三角形单元。同样, Yeh-F 将研究区域剖分成 12800 个三角形单元, 以获得与 D-MSFEM 相同的细网格单元数目。其中 D-FEM 和 D-MSFEM 的横向平移距离  $\Delta x$  均取 0.0003。

图 7 展示了各数值方法所计算的截面  $y=0.6$  上各点的达西渗透流速  $v_x$  的绝对误差。和 2.1 节类似, 引入 AS-D-MSFEM-O 方法来评估式 (22) 的误差。截面  $y=0.6$  各点  $v_x$  的平均绝对误差从小到大依次为 AS-D-MSFEM-O (0.23); Yeh-F (0.88); D-MSFEM-O (2.62); D-MSFEM-L (3.04); Yeh (4.51); D-FEM (10.94)。D-MSFEM 运用基函数振荡边界条件的 D-MSFEM-O 所计算的达西渗透流速的平均绝对误差为 2.62, 比应用基函数线性边界条件的 D-MSFEM-L 的 3.04 更精确, 表明基函数振荡边界条件处理非均质问题的有效性。AS-D-MSFEM-O 的平均绝对误差约为 Yeh-F 的 1/4, 表明式 (22) 产生的误差很小。各方法计算达西渗透流速的误差主要来源于水头。同时, 和例 2.1 中结果相同, D-MSFEM 在使用式 (22) 时, 因其水头精度较高, 仅引入了很小的误差。在计算时间方面, Yeh-F 用时 265 s, D-MSFEM-L 和 D-MSFEM-O 均为 18 s, Yeh 用时 7 s, D-FEM 用时 6 s。

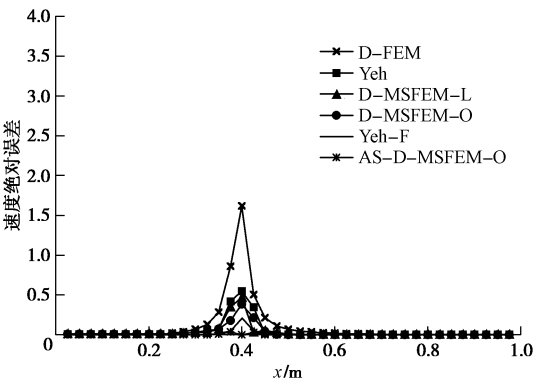


图 7 在截面  $y=0.6$  处各数值方法所计算达西渗透流速的绝对误差

Fig. 7 Absolute errors of velocities calculated by numerical methods at section  $y=0.6$

由此可见用式 (22) 计算达西渗透流速时所引入的误差极小, 各方法计算达西渗透流速的误差主要来源于水头。D-MSFEM 也能够高效、精确地求解渗透系数振荡的二维稳定流问题。同时, D-MSFEM-O 能够在参数振荡的条件下获得更精确的计算结果。

### 2.3 渗透系数渐变的二维非稳定流问题

非稳定流一般方程由抛物型方程表示, 其二维形式为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) + W = S \frac{\partial H}{\partial t} \quad ((x, y) \in \Omega), \quad (24)$$

式中,  $K_x$ ,  $K_y$  分别为坐标轴  $x$  方向,  $y$  方向的渗透系数分量, 且  $K_x = K_y$ ,  $H$  为水头,  $S$  为贮水系数,  $W$  为源汇项,  $\Omega$  为研究区。

非稳定流模型和文献[9]中例 3.3 相同, 是基于实际山前冲积平原的水流问题的模拟。研究区域为  $[0, 10 \text{ km}] \times [0, 10 \text{ km}]$ , 边界条件为上下隔水边界, 左右为一类边界, 左边界水头为 10 m, 右边界水头为 0 m, 源汇项为 0。渗透系数从左至右缓慢增加, 即

$$K_x = \frac{x}{40} + 1 \text{ (m/d)}, \text{ 是典型的山前冲积平原介质的变化特征。}$$

时间步长为 1 d, 总时间为 5 d。由于此算例没有解析解, 用 Yeh-F 将研究区精细剖分成  $200 \times 200$  份, 获得 80000 个三角形单元, 所计算的达西渗透流速值作为解析解, 以此求得各数值方法的达西渗透流速误差。

本例采用 Yeh、D-FEM、D-MSFEM 以及 Yeh-F 方法计算, 将研究区剖分成  $10 \times 10$  份。则 D-FEM 和 Yeh 将研究区剖分为 200 个三角形单元; D-MSFEM 将研究区剖分为 100 个粗网格单元, 每个粗网格单元再剖分成 8 个三角形单元, 共 800 个三角形单元; Yeh-F 将研究区剖分成 800 个三角形单元。其中 D-FEM、D-MSFEM 的横向平移距离  $\Delta x$  取 20 m。

图 8 展示了上述数值方法所计算的达西渗透流速的平均绝对误差, 精度从高到低依次为 Yeh-F (0.87); D-MSFEM (0.92); Yeh (1.61); D-FEM (1.75)。与 2.1 节、2.2 节类似, 在每个时间步长内, D-MSFEM 的计算时间依然和传统有限元方法接近, 所用时间小于精细剖分的 Yeh-F。由此可见, D-MSFEM 同样能够精确、高效地求解非稳定流问题。

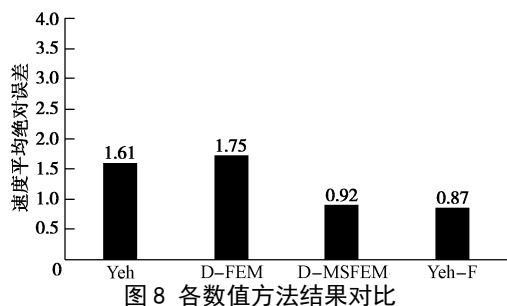


图 8 各数值方法结果对比

Fig. 8 Absolute errors of velocities calculated by numerical methods

## 3 结 语

本文的试验结果显示 D-MSFEM 能够精确、高效

地计算渗透系数均质的二维稳定流、渗透系数非均质振荡的二维稳定流, 以及渗透系数渐变的二维非稳定流问题。结果显示: 式 (22) 计算达西渗透流速引入的误差极小, 各方法计算达西渗透流速的误差主要来源于水头。D-MSFEM 相比于 D-FEM 和 Yeh 等传统方法 (传统方法单元数与 D-MSFEM 粗网格数相同), 具有更高的精度以及相近的计算时间; 在与精细剖分的传统方法的比较中 (传统方法单元数与 D-MSFEM 细网格数相同), D-MSFEM 获得了与 Yeh-F 十分接近的精度, 但计算时间却远远小于 Yeh-F。另一方面, D-MSFEM 采用振荡边界条件的 D-MSFEM-O 精度要比采用线性边界条件的 D-MSFEM-L 精度高, 能够有效处理地下水问题的非均质特性。

### 参考文献:

- [1] 薛禹群, 谢春红. 地下水数值模拟[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 175 - 178. (XUE Yu-qun, XIE Chun-hong. Numerical simulation for Groundwater[M]. Beijing: Science Press, 2007: 175 - 178. (in Chinese))
- [2] ZHOU Q, BENSABAT J, BEAR J. Accurate calculation of specific discharge in heterogeneous porous media[J]. Water Resources Research, 2001, **37**(12): 3057 - 3069.
- [3] 王铁行, 罗 扬, 张 辉. 黄土节理二维稳态流流量方程[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(6): 1115 - 1120. (WANG Tie-hang, LUO Yang, ZHANG Hui. Two-dimensional steady flow rate equation for loess joints[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(6): 1115 - 1120. (in Chinese))
- [4] WOUTER Z. Finite-Element methods based on a transport velocity representation for groundwater motion[J]. Water Resources Research, 1984, **20**(1): 137 - 145.
- [5] 谢一凡, 吴吉春, 薛禹群, 等. 一种模拟非均质介质中地下水运动的快速提升尺度法[J]. 水利学报, 2015, **46**(8): 918 - 924. (XIE Yi-fan, WU Ji-chun, XUE Yu-qun, et al. A fast upscaling method for simulating groundwater flow in heterogeneous media[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2015, **46**(8): 918 - 924. (in Chinese))
- [6] EFENDIEV Y R, WU X H. Multiscale finite element for problems with highly oscillatory coefficients[J]. Numerische Mathematik, 2002, **90**(3): 459 - 486.
- [7] 薛禹群, 叶淑君, 谢春红, 等. 多尺度有限元法在地下水模拟中的应用[J]. 水利学报, 2004, **35**(7): 7 - 13. (XUE Yu-qun, YE Shu-jun, XIE Chun-hong, et al. Application of multi-scale finite element method to simulation of groundwater flow[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2004,

- 35(7): 7 - 13. (in Chinese))
- [8] HOU T Y, WU X H. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media[J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, **134**(1): 169 - 189.
- [9] YE S, XUE Y, XIE C. Application of the multiscale finite element method to flow in heterogeneous porous media[J]. *Developments in Water Science*, 2004, **55**(9): 337 - 348.
- [10] 贺新光, 任 理. 求解非均质多孔介质中非饱和水流问题的一种自适应多尺度有限元方法——I. 数值格式[J]. *水利学报*, 2009, **40**(1): 38 - 45. (HE Xin-guang, REN Li. Adaptive multiscale finite element method for unsaturated flow in heterogeneous porous media: I numerical scheme[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2009, **40**(1): 38 - 45. (in Chinese))
- [11] 贺新光, 任 理. 求解非均质多孔介质中非饱和水流问题的一种自适应多尺度有限元方法——II. 数值结果[J]. *水利学报*, 2009, **40**(2): 138 - 144. (HE Xin-guang, REN Li. Adaptive multiscale finite element method for unsaturated flow in heterogeneous porous media: II numerical result[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2009, **40**(2): 138 - 144. (in Chinese))
- [12] 叶淑君, 吴吉春, 薛禹群. 多尺度有限单元法求解非均质多孔介质中的三维地下水流问题[J]. *地球科学进展*, 2004, **19**(3): 437 - 442. (YE Shu-jun, WU Ji-chun, XUE Yu-qun. Application of multiscale finite element method to three dimensional groundwater flow problems in heterogeneous porous media[J]. *Advance in Earth Sciences*, 2004, **19**(3): 437 - 442. (in Chinese))
- [13] 于 军, 吴吉春, 叶淑君, 等. 苏锡常地区非线性地面沉降耦合模型研究[J]. *水文地质工程地质*, 2007(5): 11 - 16. (YU Jun, WU Ji-chun, YE Shu-jun, et al. Research on nonlinear coupled modeling of land subsidence in Suzhou, Wuxi and Changzhou areas, China[J]. *Hydrogeology & Engineering Geology*, 2007(5): 11 - 16. (in Chinese))
- [14] 谢一凡, 吴吉春, 薛禹群, 等. 一种模拟节点达西渗透流速的三次样条多尺度有限单元法[J]. *岩土工程学报*, 2015, **37**(9): 1727 - 1732. (XIE Yi-fan, WU Ji-chun, XUE Yu-qun, et al. A cubic-spline multiscale finite element method for simulating nodal Darcy velocities[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2015, **37**(9): 1727 - 1732. (in Chinese))
- [15] 谢一凡, 吴吉春, 薛禹群, 等. 结合有限单元法运用三次样条技术求解达西渗透流速[J]. *水文地质工程地质*, 2015, **42**(5): 1 - 5. (XIE Yi-fan, WU Ji-chun, XUE Yu-qun, et al. Combination of finite element method and cubic-spline technique to solve Darcy velocities[J]. *Hydrogeology & Engineering Geology*, 2015, **42**(5): 1 - 5. (in Chinese))
- [16] XIE Y, WU J, XIE C. Cubic-spline multiscale finite element method for solving nodal Darcian velocities in porous media[J]. *Journal of Hydrologic Engineering*, 2015, **20**(11): 04015030.
- [17] 谢一凡. 改进多尺度有限单元法求解二维地下水流问题[D]. 南京: 南京大学, 2015. (XIE Yi-fan, Improved Multiscale Finite Element Method for Solving Two-Dimensional Groundwater Flow Problems[D]. Nanjing: Nanjing University, 2015. (in Chinese))
- [18] XIE Y F, WU J C, XUE Y Q, et al Combination of multiscale finite-element method and Yeh's finite-element model for solving nodal Darcian velocities and fluxes in porous media[J]. *Journal of Hydrologic Engineering*, 2016, **21**(12): 04016048.
- [19] VEDAT B. A finite element dual mesh method to calculate Nodal Darcy velocities in nonhomogeneous and anisotropic aquifers[J]. *Water Resources Research*, 1984, **20**(11): 1705 - 1717.
- [20] YEH G T. On the computation of Darcian velocity and mass balance in the finite element modeling of groundwater flow[J]. *Water Resources Research*, 1981, **17**(5): 1529 - 1534.