

DOI: 10.11779/CJGE202001014

# 行波效应下黏弹性地基梁动力响应解析解

冯 浩, 杨喻声, 禹海涛\*

(同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092)

**摘要:** 弹性地基梁动力问题通常采用解析法和数值法进行分析, 当可以应用解析法计算时效率更高。采用 Laplace 和 Fourier 变换, 推导得出了黏弹性地基上受恒定轴向压力和横向行波作用下的无限长 Euler-Bernoulli 梁的解析解。经与数值模拟结果对比, 验证了解答的正确性; 并以长隧道为应用实例, 分析对比了行波频率、波速、轴力和地基刚度对长隧道动力响应的影响, 并得出了隧道内力响应受行波频率影响, 频率越低, 隧道内力响应越大, 以及隧道内力响应受行波波速影响, 当行波波速接近临界波速时, 隧道内力响应明显增大等结论。

**关键词:** 行波效应; 弹性地基梁; 动力问题; 解析解

中图分类号: TU435 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2020)01-0126-07

作者简介: 冯 浩(1978—), 男, 博士研究生, 主要从事地下隧道结构及结构抗震等方面的科研工作。E-mail: 67735635@qq.com.

## Dynamic response of viscoelastic foundation beams under traveling wave effect

FENG Hao, YANG Yu-sheng, YU Hai-tao

(Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** The dynamic problem of elastic foundation beams is usually analyzed by using the analytical and numerical methods, but the numerical method has a large amount of calculation, and the analytical method is usually more efficient. The analytic solution of infinite length Euler-Bernoulli beam on viscoelastic foundation subjected to constant axial pressure and transverse traveling wave is obtained by the Laplace and Fourier transforms. Compared with the numerical simulation results, the correctness of the solution is verified. Taking a long tunnel as an example, the influences of wave frequency, wave velocity and axial force and foundation stiffness on the dynamic response of the long tunnel are analyzed, and its internal force response affected by the wave frequency is obtained. The lower the frequency, the greater the internal force response of the tunnel. The internal force response is affected by the travelling wave velocity. When the travelling wave velocity is close to the critical velocity, the internal force response of the tunnel significantly increases.

**Key words:** travelling wave effect; elastic foundation beam; dynamic problems; analytical solution

## 0 引言

在隧道工程、交通工程等领域中, 许多土-结构相互作用问题都可以归纳为经典的弹性地基梁问题, 长隧道纵向抗震研究也属弹性地基梁动力问题<sup>[1]</sup>。弹性地基梁动力问题分析方法主要包括解析法和数值法, 相比于数值分析法, 适用的解析法效率更高。文献[2]最早研究了 Winkler 地基上无限长 Bernoulli-Euler 梁在移动集中荷载作用下的响应, 文献[3, 4]将 Kenney 的解推广到其他的移动荷载。文献[5]得到了有阻尼的 Winkler 地基梁在移动集中荷载下的稳态响应。文献[6~7]将移动荷载表示为谐线荷载, 利用关于时间和空间的双 Fourier 变换推导了黏弹性地基上无限长梁解析解。文献[8]采用同一方法求得具有与频率线性无

关的滞回阻尼的黏弹性地基上无限长梁在移动谐线荷载下的动力位移响应。文献[9]推导了用剪切相互作用弹性模拟黏弹性地基上无限长梁在移动集中荷载下稳态响应解析解。文献[10, 11]利用 Fourier 变换和 Laplace 变换, 推导了任意荷载作用下黏弹性地基和 Pasternak 地基上无限长梁动力响应解析解。

行波效应对隧道动力响应有显著影响<sup>[12]</sup>。本文采

基金项目: 国家自然科学基金项目(41922059, 51678438); 国家重点研发计划项目(2018YFC1504305, 2018YFC0809602, 2017YFC1500703); 上海市青年科技启明星计划项目(17QC1400500); 上海市科学技术委员会项目(17DZ1203402, 18DZ1205103, 17DZ1203804)

收稿日期: 2019-03-11

\*通信作者(E-mail: yuhaitao@tongji.edu.cn)

用 Laplace 和 Fourier 变换, 推导黏弹性地基上受恒定轴向压力和横向行波作用下的无限长 Euler-Bernoulli 梁解析解, 与数值模拟结果对比验证了本文解答的正确性。以长隧道为应用实例, 分析对比了行波频率、波速、轴力和地基刚度对长隧道动力响应的影响, 对隧道纵向抗震研究有一定指导意义。

## 1 无限长梁模型

黏弹性地基上无限长均质 Bernoulli-Euler 梁, 梁的轴线设为  $x$  轴, 如图 1 所示。梁的单位长度质量和抗弯刚度分别为  $\rho A$  和  $EI$ , 支承地基单位长度的分布弹簧刚度和阻尼系数分别为  $K$  和  $C$ 。不考虑梁的内部阻尼。假定梁受到沿轴向不随时间变化的轴向压力  $N$  和任意横向荷载  $F(x, t)$  作用, 相应的横向挠度响应为  $y(x, t)$ , 则梁受迫振动的运动方程<sup>[13]</sup>为

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + Ky(x, t) + \rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + C \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = F(x, t) \quad . \quad (1)$$

无穷远处梁的挠度、曲率、弯矩和剪力为 0, 即边界条件为

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial^n y(x, t)}{\partial x^n} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3) \quad . \quad (2)$$

假设梁开始处于静止状态, 初始条件为

$$\left. \begin{array}{l} y(x, t) \\ \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \end{array} \right|_{t=0} = 0 \quad . \quad (3)$$

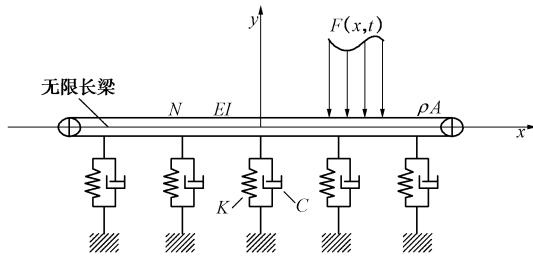


图 1 受恒定轴向压力和任意横向荷载作用下黏弹性地基上无限长 Bernoulli-Euler 梁

Fig. 1 Bernoulli-euler beam of infinite length on viscoelastic foundation under constant axial pressures and arbitrary transverse loads

方程 (1) ~ (3) 构成了黏弹性地基上无限长梁振动问题的完整数学表达, 任意荷载下梁的动力响应可以通过求解上述偏微分方程得到。

## 2 行波作用解析解

定义 Fourier 变换和其逆变换为

$$F(\xi) = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \quad (\text{Fourier 变换}) , \quad (4)$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\xi)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (\text{Fourier 逆变换}) . \quad (5)$$

定义 Laplace 变换和其逆变换为

$$F(\omega) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-\omega t} dt \quad (\text{Laplace 变换}) , \quad (6)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(\omega) e^{\omega t} d\omega \quad (\text{Laplace 逆变换}) . \quad (7)$$

式中,  $\gamma$  为  $\omega$  的实部。

对式 (1) 两边空间变量  $x$  作用 Fourier 变换

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} e^{-i\xi x} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} N \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} e^{-i\xi x} dx + \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} Ky(x, t) e^{-i\xi x} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} e^{-i\xi x} dx + \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} C \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, t) e^{-i\xi x} dx . \end{aligned} \quad (8)$$

将边界条件代入式 (8), 并考虑 Fourier 变换的微分性质, 则有

$$\begin{aligned} & (EI\xi^4 + N\xi^2 + K)\tilde{y}(\xi, t) + \rho A \frac{\partial^2 \tilde{y}(\xi, t)}{\partial t^2} + \\ & C \frac{\partial \tilde{y}(\xi, t)}{\partial t} = \tilde{F}(\xi, t) . \end{aligned} \quad (9)$$

式中,  $\tilde{y}(\xi, t)$ ,  $\tilde{F}(\xi, t)$  分别为  $y(x, t)$ ,  $F(x, t)$  的 Fourier 变换:

$$\tilde{y}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(x, t) e^{-i\xi x} dx , \quad (10)$$

$$\tilde{F}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, t) e^{-i\xi x} dx . \quad (11)$$

对式 (9) 两边时间变量  $t$  做 Laplace 变换:

$$\begin{aligned} & (EI\xi^4 + N\xi^2 + K) \int_0^{+\infty} \tilde{y}(\xi, t) e^{-\omega t} dt + \rho A \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 \tilde{y}(\xi, t)}{\partial t^2} e^{-\omega t} dt + \\ & C \int_0^{+\infty} \frac{\partial \tilde{y}(\xi, t)}{\partial t} e^{-\omega t} dt = \int_0^{+\infty} \tilde{F}(\xi, t) e^{-\omega t} dt . \end{aligned} \quad (12)$$

代入初始条件, 并考虑 Laplace 变换的微分性质, 则有

$$(\rho A\omega^2 + C\omega + EI\xi^4 + N\xi^2 + K)\bar{y}(\xi, \omega) = \bar{F}(\xi, \omega) , \quad (13)$$

式中,  $\bar{y}(\xi, \omega)$ ,  $\bar{F}(\xi, \omega)$  分别为  $\tilde{y}(\xi, t)$ ,  $\tilde{F}(\xi, t)$  的 Laplace 变换:

$$\bar{y}(\xi, \omega) = \int_0^{+\infty} \tilde{y}(\xi, t) e^{-\omega t} dt , \quad (14)$$

$$\bar{F}(\xi, \omega) = \int_0^{+\infty} \tilde{F}(\xi, t) e^{-\omega t} dt . \quad (15)$$

则梁的横向挠度响应在波数域和频域内的解可以表示为

$$\bar{y}(\xi, \omega) = \frac{\bar{F}(\xi, \omega)}{\rho A \omega^2 + C \omega + EI \xi^4 + N \xi^2 + K} \quad . \quad (16)$$

式 (16) 可变换为

$$\tilde{y}(\xi, \omega) = \frac{1}{\rho A} \frac{\bar{F}(\xi, \omega)}{(\omega + m)^2 + b^2(\xi)} \quad , \quad (17)$$

其中,

$$m = \frac{C}{2\rho A} \quad , \quad (18)$$

$$b(\xi) = \sqrt{\frac{EI}{\rho A} \xi^4 + \frac{N}{\rho A} \xi^2 + \frac{K}{\rho A} - \frac{C^2}{4(\rho A)^2}} \quad . \quad (19)$$

式 (17) 可进一步变换为

$$\tilde{y}(\xi, \omega) = \frac{1}{\rho A b(\xi)} \bar{F}(\xi, \omega) \frac{b(\xi)}{(\omega + m)^2 + b^2(\xi)} \quad . \quad (20)$$

定义函数  $H(\omega)$  为

$$H(\omega) = \frac{b(\xi)}{(\omega + m)^2 + b^2(\xi)} \quad . \quad (21)$$

定义  $h(t)$  为  $H(\omega)$  的 Laplace 逆变换, 则有

$$\begin{aligned} h(t) &= L^{-1}[H(\omega)] = L^{-1}\left[\frac{b(\xi)}{(\omega + m)^2 + b^2(\xi)}\right] \\ &= e^{-mt} \sin[b(\xi)t] \quad . \end{aligned} \quad (22)$$

又有  $\tilde{F}(\xi, t)$  为  $\bar{F}(\xi, \omega)$  的 Laplace 逆变换, 即

$$\tilde{F}(\xi, t) = L^{-1}[\bar{F}(\xi, \omega)] \quad . \quad (23)$$

利用卷积定理, 则有

$$\begin{aligned} h(t) * \tilde{F}(\xi, t) &= L^{-1}[H(\omega) \bar{F}(\xi, \omega)] \\ &= \int_0^t \tilde{F}(\xi, \eta) e^{-m(t-\eta)} \sin[b(\xi)(t-\eta)] d\eta \quad . \end{aligned} \quad (24)$$

对式 (20) 两边作 Laplace 逆变换, 则有

$$\begin{aligned} \tilde{y}(\xi, t) &= L^{-1}[\bar{y}(\xi, \omega)] = \frac{1}{\rho A b(\xi)} \\ L^{-1}\left[\bar{F}(\xi, \omega) \frac{b(\xi)}{(\omega + m)^2 + b^2(\xi)}\right] &= \frac{1}{\rho A b(\xi)} h(t) \tilde{F}(\xi, t) \quad . \end{aligned} \quad (25)$$

将式 (24) 代入式 (25) 有

$$\tilde{y}(\xi, t) = \frac{1}{\rho A b(\xi)} \int_0^t \tilde{F}(\xi, \eta) e^{-m(t-\eta)} \sin[b(\xi)(t-\eta)] d\eta \quad . \quad (26)$$

对式 (26) 两边做 Fourier 逆变换, 则有

$$\begin{aligned} y(x, t) &= F^{-1}[\tilde{y}(\xi, t)] \\ &= \frac{1}{2\pi\rho A} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi x}}{b(\xi)} \left\{ \int_0^t \tilde{F}(\xi, \eta) e^{-m(t-\eta)} \sin[b(\xi)(t-\eta)] d\eta \right\} d\xi \quad , \end{aligned} \quad (27)$$

又

$$\tilde{F}(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(s, \eta) e^{-i\xi s} ds \quad , \quad (28)$$

将式 (25) 代入式 (27) 有

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{1}{2\pi\rho A} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi(x-s)}}{b(\xi)} \\ &\quad \left\{ \int_0^t F(s, \eta) e^{-m(t-\eta)} \sin[b(\xi)(t-\eta)] d\eta \right\} ds d\xi \quad . \end{aligned} \quad (29)$$

考虑函数奇偶性:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(x-s)} d\xi = 2 \int_0^{+\infty} \cos[\xi(x-s)] d\xi \quad . \quad (30)$$

将式 (30) 代入式 (29) 有

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{1}{\pi\rho A} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\cos[\xi(x-s)]}{b(\xi)} \\ &\quad \left\{ \int_0^t F(s, \eta) e^{-m(t-\eta)} \sin[b(\xi)(t-\eta)] d\eta \right\} d\xi ds \quad . \end{aligned} \quad (31)$$

式 (31) 即为受恒定轴向压力和任意横向荷载作用下黏弹性地基上无限长 Bernoulli-Euler 梁的横向响应解。

行波荷载可表示为

$$F(x, t) = \begin{cases} 0 & (x > Vt) \\ P \sin\left[2\pi\Omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right] & (x < Vt) \end{cases} \quad , \quad (32)$$

式中,  $P$ ,  $\Omega$  和  $V$  分别为荷载幅值, 频率和波速。

将式 (32) 代入式 (31), 得

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{P}{\pi\rho A} \int_0^{+\infty} \int_0^t \int_0^{V\eta} \frac{\cos[\xi(x-s)]}{b(\xi)} \sin\left[2\pi\Omega\left(\eta - \frac{s}{V}\right)\right] e^{-m(t-\eta)} \\ &\quad \sin[b(\xi)(t-\eta)] ds d\eta d\xi \quad . \end{aligned} \quad (33)$$

式 (33) 即为受恒定轴向压力和横向行波作用下黏弹性地基上无限长梁的横向位移解答。

速度  $v(x, t)$  和加速度  $a(x, t)$  可以通过式 (33) 对时间  $t$  求一次导数和两次导数求得, 即

$$v(x, t) = \frac{P}{\pi\rho A} \int_0^{+\infty} \int_0^t \int_0^{V\eta} \frac{\cos[\xi(x-s)]}{b(\xi)} \sin\left[2\pi\Omega\left(\eta - \frac{s}{V}\right)\right] e^{-m(t-\eta)} \cdot$$

$$\{b(\xi) \cos[b(\xi)(t-\eta)] - m \sin[b(\xi)(t-\eta)]\} ds d\eta d\xi \quad , \quad (34)$$

$$a(x, t) = \frac{P}{\pi\rho A} \int_0^{+\infty} \int_0^t \int_0^{V\eta} \frac{\cos[\xi(x-s)]}{b(\xi)} \sin\left[2\pi\Omega\left(\eta - \frac{s}{V}\right)\right] e^{-m(t-\eta)} \cdot$$

$$\{[m^2 - b^2(\xi)] \sin[b(\xi)(t-\eta)] - 2mb(\xi) \cos[b(\xi)(t-\eta)]\} \cdot \\ ds d\eta d\xi \quad . \quad (35)$$

弯矩  $M(x, t)$  和剪力  $V(x, t)$  可以通过式 (31) 对  $x$  求两次导数和三次导数再乘系数 ( $-EI$ ) 得到:

$$\begin{aligned} M(x, t) &= \frac{PEI}{\pi\rho A} \int_0^{+\infty} \int_0^t \int_0^{V\eta} \frac{\xi^2 \cos[\xi(x-s)]}{b(\xi)} \sin\left[2\pi\Omega\left(\eta - \frac{s}{V}\right)\right] \\ &\quad e^{-m(t-\eta)} \cdot \sin[b(\xi)(t-\eta)] ds d\eta d\xi \quad , \end{aligned} \quad (36)$$

$$V(x,t) = \frac{PEI}{\pi\rho A} \int_0^{\infty} \int_0^t \int_0^{V\eta} \frac{\xi^3 \sin[\xi(s-x)]}{b(\xi)} \sin\left[2\pi\Omega\left(\eta - \frac{s}{V}\right)\right] e^{-m(t-\eta)} \cdot \sin[b(\xi)(t-\eta)] ds d\eta d\xi \quad (37)$$

前文推导基于假设  $EI\xi^4 + N\xi^2 + K - \frac{C^2}{4\rho A} > 0$ , 当

$EI\xi^4 + N\xi^2 + K - \frac{C^2}{4\rho A} < 0$  时, 梁的横向挠度变为

$$y(x,t) = \frac{P}{\pi\rho A} \int_{\xi_0}^{\infty} \int_0^t \int_0^{V\eta} \frac{\cos[\xi(x-s)]}{b_0(\xi)} \sin\left[2\pi\Omega\left(\eta - \frac{s}{V}\right)\right] e^{-m(t-\eta)} \cdot \sin[b_0(\xi)(t-\eta)] ds d\eta d\xi + \frac{P}{\pi\rho A} \int_{\xi_0}^{\infty} \int_0^t \int_0^{V\eta} \frac{\cos[\xi(x-s)]}{b(\xi)} \sin\left[2\pi\Omega\left(\eta - \frac{s}{V}\right)\right] e^{-m(t-\eta)} \cdot \sin[b(\xi)(t-\eta)] ds d\eta d\xi \quad (38)$$

其中,  $\xi_0$  为方程 (38) 的正实根:

$$EI\xi^4 + N\xi^2 + K - \frac{C^2}{4\rho A} = 0 \quad , \quad (39)$$

$$b_0(\xi) = \sqrt{\frac{C^2}{4(\rho A)^2} - \frac{EI}{\rho A}\xi^4 - \frac{K}{\rho A} - \frac{N}{\rho A}\xi^2} \quad . \quad (40)$$

对应的速度  $v(x,t)$ 、加速度  $a(x,t)$ 、弯矩  $M(x,t)$  和剪力  $V(x,t)$  可类似求得。

### 3 算例验证

以下假设  $C=0$ , 即  $m=0$ , 此时  $EI\xi^4 + N\xi^2 + K - \frac{C^2}{4\rho A} = EI\xi^4 + N\xi^2 + K > 0$  恒成立, 梁的横向挠度响应表达式取式 (31)。

#### 3.1 行波荷载

考虑内径和外径分别为 10.5, 11.6 m 的无限长隧道, 假设隧道材料为线弹性均质各向同性材料, 密度和弹性模量分别为  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$  和  $E = 3.55 \times 10^{10} \text{ Pa}$ 。考虑轴向压力  $N=20 \text{ kN}$ 。不考虑地基刚度和黏性, 即  $K=0$  和  $C=0$ 。荷载取为从位置  $x=0$  处开始沿  $x$  轴正向传播的行波荷载, 表达式见式 (32), 其中荷载幅值、频率和波速分别取  $P=30 \text{ kN}$ ,  $\Omega=2 \text{ Hz}$  和  $V=200 \text{ m/s}$ 。观测点选在  $x=450 \text{ m}$  处。解析解和数值解对比如图 2 所示, 可以得出解析解和数值解完全一致, 验证了本文解析解推导的正确性。

#### 3.2 一致正弦荷载

一致正弦荷载可表示为

$$F(x,t) = P \sin 2\pi\Omega t \quad (0 \leq x \leq x_0) \quad , \quad (41)$$

式中,  $P$ ,  $\Omega$  和  $x_0$  分别为荷载幅值、频率和作用长度。

将式 (41) 代入式 (31) 则得一致正弦荷载作用下无限长梁的横向位移响应为

$$y(x,t) = \frac{P}{\pi\rho A} \cdot \int_0^{+\infty} \{2\pi\Omega \sin[b(\xi)t] - b(\xi) \sin(2\pi\Omega t)\} \cdot$$

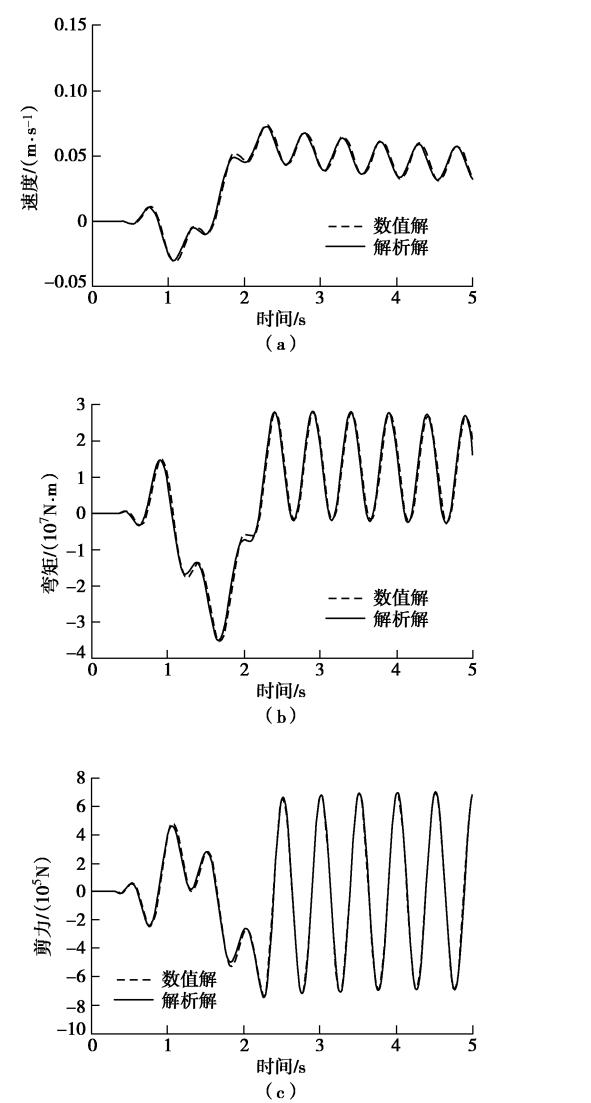


图 2 行波作用下解析解和数值解对比 ( $x=450 \text{ m}$ )

Fig. 2 Comparison between analytical and numerical solutions under action of traveling waves ( $x=450 \text{ m}$ )

速度、加速度、弯矩和剪力可类似求得。隧道模型同 3.1 节, 分别取  $P=30 \text{ kN}$ ,  $\Omega=2 \text{ Hz}$ ,  $x_0=1000 \text{ m}$ 。观测点选在  $x=450 \text{ m}$  处。解析解和数值解对比如图 3 所示, 解析解和数值解的一致再次验证了本文推导的正确性。对比图 2, 3, 可以明显看出, 行波作用下隧道内力响应明显大于一致正弦荷载作用。

### 4 分析与讨论

本节进一步分析行波频率、波速、轴向压力和地基刚度对隧道内力响应的影响。

#### 4.1 行波频率的影响

取不同行波频率  $\Omega=2, 4, 6, 8 \text{ Hz}$ , 模型其他参数同 3.1 节, 计算隧道受行波作用下的动力响应, 结

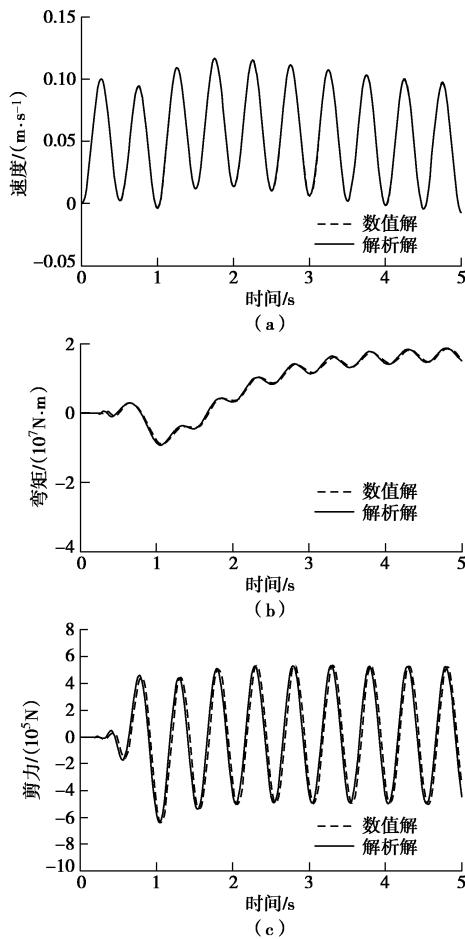


图 3 一致正弦荷载作用下解析解和数值解对比 ( $x=450$  m)

Fig. 3 Comparison between analytical and numerical solutions under uniform sinusoidal loading ( $x=450$  m)

果如图 4 所示。可以看出，频率对隧道内力响应有显著影响，频率为 2 Hz 时隧道内力响应最大，随着频率增大，隧道内力响应减小。

#### 4.2 行波波速的影响

取不同行波波速  $V=200, 400, 600, 800$  m/s，模型其他参数同 3.1 节，计算隧道受行波作用下的动力响应，结果如图 5 所示。由图 5 可知，隧道内力响应受行波波速影响，不同于行波频率的影响，当波速较大或较小时，隧道内力响应都较小。由图 5 可知，隧道响应随行波波速先增大后减小， $V=400$  m/s 时响应达最大值。当波速接近临界波速 ( $V=400$  m/s) 时，隧道内力响应最大。

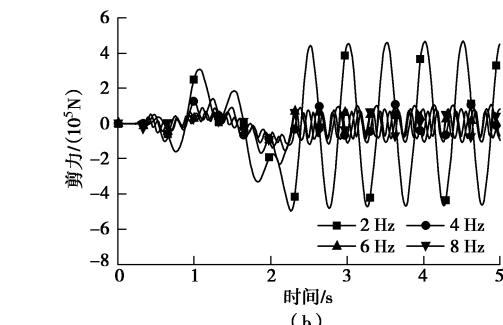
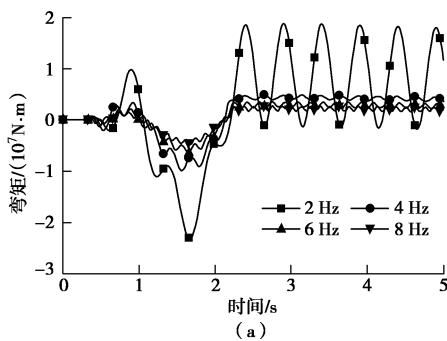


图 4 不同频率行波作用下隧道内力响应 ( $x=450$  m)

Fig. 4 Internal force responses of tunnel under action of traveling waves with different frequencies ( $x=450$  m)

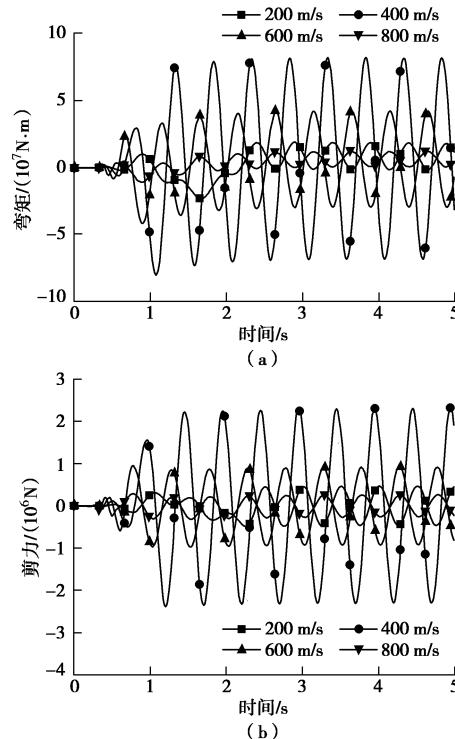


图 5 不同波速行波作用下隧道内力响应 ( $x=450$  m)

Fig. 5 Internal force responses of tunnel under action of traveling waves at different wave velocities ( $x=450$  m)

#### 4.3 轴向压力的影响

取混凝土屈服强度  $\sigma_s = 50$  MPa，则隧道轴向压力上限值取  $N_{max} = \sigma_s A = 9.5 \times 10^8$  N。分析取不同轴向压力  $N=0, 1 \times 10^7, 3 \times 10^8$  (N)，模型其他参数同 3.1 节，计算隧道受行波作用下的动力响应，结果如图 6 所示。

由图 6 可知，在行波作用下，当轴力小于  $1 \times 10^7$  N 时，隧道响应基本没有变化。当轴力大于  $1 \times 10^7$  N 时，随着轴力增大，隧道响应速度、弯矩均减小。原因在于，轴力提高了隧道整体性，降低了行波作用引起的相邻隧道区段响应的差异性，进而减小了行波作用下的隧道响应。实际工程中，盾构隧道受盾构机顶推力和螺栓预紧力，沉管隧道受水力压接产生的轴向压力，对隧道结构抗震是有利的，但轴力对隧道动力

响应影响并不明显, 隧道纵向抗震研究中可以不予考虑。

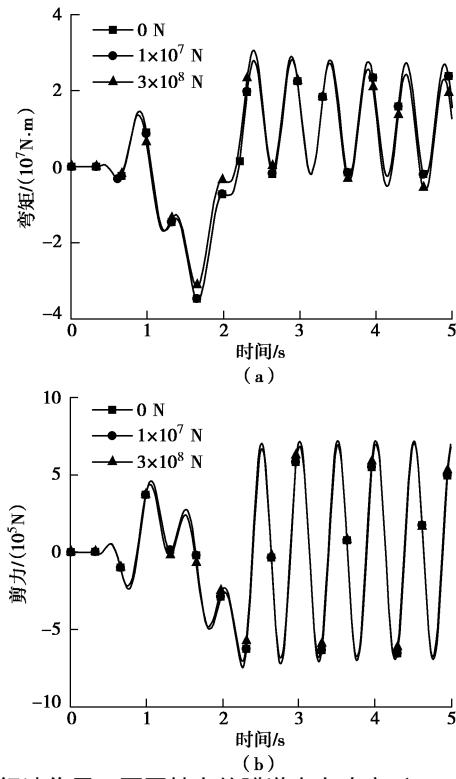


图 6 行波作用下不同轴力的隧道内力响应 ( $x=450$  m)

Fig. 6 Responses of different coaxial forces in tunnel under action of traveling waves ( $x=450$  m)

#### 4.4 地基刚度的影响

不同地层条件, 土的弹性模量分别取  $E=26.18, 57.68, 118.45, 326.74, 575.60 \text{ MPa}$ , 泊松比取  $\nu=0.3$ <sup>[14]</sup>。根据 Hashash 等<sup>[15]</sup>的计算得地基分布弹簧刚度  $K=12.60 \times 10^6, 27.75 \times 10^6, 57.00 \times 10^6, 157.22 \times 10^6, 276.96 \times 10^6 \text{ N/m}$ , 模型其他参数同 3.1 节, 计算隧道受行波作用下的动力响应, 结果如图 7 所示。

由图 7 可知, 随着地基刚度增大, 隧道响应速度和弯矩均明显减小, 说明隧道地震响应受地基刚度影响显著。结论与实际震害调查结果一致, 土体弹性模量越大, 地层条件越好, 隧道震害越轻。也验证了土结构相对刚度比对地下结构的地震响应起主要控制作用的结论<sup>[16]</sup>。

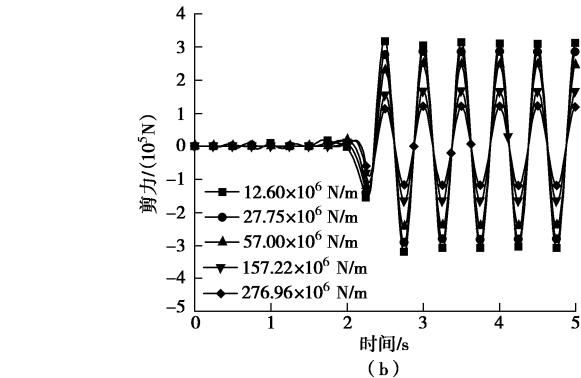
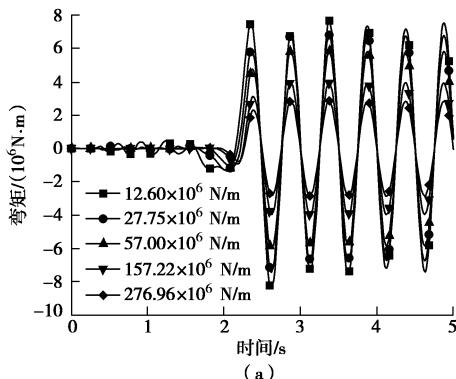


图 7 行波作用下不同地基刚度的隧道内力响应 ( $x=450$  m)

Fig. 7 Internal force responses of tunnel with different foundation stiffnesses under action of traveling waves ( $x=450$  m)

## 5 结 论

本文推导了黏弹性地基上受恒定轴向压力和横向行波作用的无限长 Euler-Bernoulli 梁解析解, 并分析了各种参数对长隧道动力响应的影响, 得到以下 5 点结论。

- (1) 解析解与数值解一致, 验证了本文解答的正确性。
- (2) 隧道内力响应受行波频率影响, 频率越低, 隧道内力响应越大。
- (3) 隧道内力响应受行波波速影响, 当行波波速接近临界波速时, 隧道内力响应明显增大。
- (4) 隧道受到的轴向压力对隧道抗震是有利的, 但轴力对隧道内力响应影响很小, 隧道纵向抗震研究中可以偏安全不予考虑。
- (5) 隧道内力响应受地基刚度影响, 随着地基刚度增大, 隧道内力响应显著减小, 验证了土结构相对刚度比对地下结构的地震响应起主要控制作用的结论。

## 参考文献:

- [1] JOHN C M S, ZAHRAH T F. Aseismic design of underground structures[J]. Tunnelling & Underground Space Technology Incorporating Trenchless Technology Research, 1987, 2(2): 165 – 197.
- [2] KENNEY J T. Steady-state vibrations of beam on elastic foundation for moving load[J]. Journal of Applied Mechanics -Transactions of the ASME, 1954, 21(4): 359 – 364.
- [3] MATHEWS P M. Vibrations of a beam on elastic foundation[J]. ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1958, 38(3/4): 105 – 115.
- [4] MATHEWS P M. Vibrations of a beam on elastic foundation

- [2] II[J]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1959, **39**(1/2): 13 - 19.
- [5] ACHENBACH J D, SUN C. Dynamic response of beam on viscoelastic subgrade[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1965, **91**(5): 61 - 76.
- [6] SUN L. A closed-form solution of a bernoulli-euler beam on a viscoelastic foundation under harmonic line loads[J]. Journal of Sound & Vibration, 2001, **242**(4): 619 - 627.
- [7] SUN L. An explicit representation of steady state response of a beam on an elastic foundation to moving harmonic line loads[J]. International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics, 2003, **27**(1): 69 - 84..
- [8] KIM S M, ROESSET J M. Dynamic response of a beam on a frequency-independent damped elastic foundation to moving load[J]. Canadian Journal of Civil Engineering, 2003, **30**(2): 460 - 467.
- [9] DIPANJAN B, KAMESWARA R N S V. Analytical solutions for Euler&ndash; Bernoulli beam on visco-elastic foundation subjected to moving load[J]. International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics, 2013, **37**(8): 945 - 960.
- [10] YU H. Analytical solution for an infinite euler-bernoulli beam on a viscoelastic foundation subjected to arbitrary dynamic loads[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2014, **140**(3): 542 - 551.
- [11] YU H, CAI C, YUAN Y, et al. Analytical solutions for Euler-Bernoulli Beam on Pasternak foundation subjected to arbitrary dynamic loads[J]. International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics, 2017.
- [12] YU H, YUAN Y, QIAO Z, et al. Seismic analysis of a long tunnel based on multi-scale method[J]. Engineering Structures, 2013, **49**: 572 - 587.
- [13] CLOUGH R W, PENZIEN J. Dynamics of Structures[M]. 3rd ed. Berkeley: Computers & Structures, Inc, 2003.
- [14] 禹海涛, 张正伟, 段科萍, 等. 反应位移法在圆形隧道抗震分析中的适用性评价[J]. 结构工程师, 2018, **34**(14): 211 - 218. (YU Hai-tao, ZHANG Zheng-wei, DUAN Ke-ping, et al. Adaptability evaluation of response displacement method in seismic analysis of circular tunnel[J]. Structural Engineers, 2018, **34**(14): 211 - 218. (in Chinese))
- [15] HASHASH Y M A, HOOK J J, SCHMIDT B, et al. Seismic design and analysis of underground structures[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2001, **16**(4): 247 - 293.
- [16] WANG J N. Seismic Design of Tunnels: A Simple State-of-the-art Design Approach[M]. New York: Parsons Brinckerhoff, 1993.

### 欢迎订阅《勘察科学技术》

《勘察科学技术》是由中勘冶金勘察设计研究院有限责任公司（原冶金勘察研究总院）主办的学术一技术类双月刊，是中国科技核心期刊、中国科学引文数据库来源期刊、中国核心期刊（遴选）数据库收录期刊、中国学术期刊综合评价数据库统计源期刊，多次被评为河北省优秀期刊。

《勘察科学技术》主要介绍岩土工程设计与施工、工程地质、环境地质、水文地质及地下水资源评价、工程测量及地理信息系统、工程物探、岩土测试、工程检测及地下管网探测等专业的科研成果、生产经验、工程实录以及新理论、新技术、新方法。

《勘察科学技术》内容丰富，理论结合实际，适于从事岩

土工程及勘察的广大科研、设计、施工、监理、教学的专业技术人员及高等院校学生阅读、收藏。

《勘察科学技术》国内外公开发行，双月刊，大16开本，双月20日出版。每期定价10.0元，全年60元。邮发代号18-153。全国各地邮局均可订阅，也可随时汇款到本编辑部订阅。

本刊兼营广告，价格适中，印制精良，注重实效。

欢迎广大读者投稿、订阅和广告惠顾。

地址：河北省保定市东风中路1285号《勘察科学技术》编辑部，邮编：071069。

Tel: 0312-3020887, 3094054; Fax: 0312-3034561。

E-mail: kckxjs@163.com。

（《勘察科学技术》编辑部 供稿）