DOI：10.11779/CJGE2019S1027

基于 Biot 理论多种简化模型的适用性研究

胡 丹[1]，李 芬[1, 2]，张开银[1]

（1. 武汉理工大学交通学院，湖北 武汉 430063；2. 大连理工大学海岸与近海工程国家重点实验室，辽宁 大连 116024）

摘 要：基于 Biot 理论提出的简化模型主要包括以下简化形式：忽略混合物动力平衡方程和广义达西定律中相对加速度项；忽略混合物动力平衡方程中相对加速度项以及广义达西定律中所有惯性项；忽略控制方程中所有惯性项。分析了多种简化模型在不同材料参数和不同激励频率作用下的适用性，基于不同简化模型得到了一维有限饱和土柱的位移和孔压的频域解析解，引入无量纲量综合考虑渗透系数、孔隙率和激励频率等参数的影响，并依据这些无量纲量分析各种简化模型的适用范围。

关键词：Biot 理论；简化模型；无量纲参数；适用范围

中图分类号：TU43 **文献标识码**：A **文章编号**：1000－4548(2019)S1－0105－04

作者简介：胡 丹(1989—)，女，博士研究生，主要从事桩－饱和土相互作用研究。E-mail: hudan1989.happy@163.com。

Applicability of simplified formulations based on Biot's theory

HU Dan[1], LI Fen[1, 2], ZHANG Kai-yin[1]

(1. School of Transportation, Wuhan University of Technology, Wuhan 430063, China; 2. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Based on the Biot's theory, three simplified formulations are proposed. The simplifications mainly include neglecting the relative acceleration terms in the dynamic mixture equilibrium equation and the generalized Darcy's law, neglecting the relative acceleration terms in the dynamic mixture equilibrium equation and all the inertial terms in the generalized Darcy's law, and neglecting all the inertial terms in the equations. The applicability of the simplifications are discussed with the help of analytical solutions for one-dimensional finite fully saturated poroelastic column. Two non-dimensional parameters are introduced to discuss the effects of permeability, excitation frequency and porosity.

Key words: Biot's theory; simplified formulation; non-dimensional parameter; applicability

0 引 言

多孔介质理论在石油工业、化学工程、土力学、生物力学和声学等多个工程领域有着广泛的应用。Biot[1-4]假设固体骨架为线弹性，通过热力学原理建立了固相与液相相互作用的力学模型，奠定了两相介质理论的基础。由于 Biot 理论较为复杂，限制了解析解的推导和数值方法的推广。早期学者们基于 Biot 理论提出了多种简化模型，并讨论了不同简化模型的适用性。Zienkiewicz[5]基于 Biot 理论提出了忽略混合物动力平衡方程和广义达西定律中相对加速度项的简化模型“SB”以及忽略控制方程中所有惯性项的简化模型“QS”，分别求解在一维土柱表面作用简谐荷载的频域解析解，讨论了简化模型“SB”和“QS”的适用范围。研究表明在低频激励下，由 Biot 理论和简化模型“SB”得到的位移和孔压响应差异不大。Schanz 基于 Biot 理论[6]和简化模型“SB”[7]分别讨论了饱和多孔介质中弹性波的传播特性。在低频范围内，他们的差异很小，然而随着土体渗透率的增加，只有 Biot 理论能够真实反映弹性波的传播。Zienkiewicz[8] 还提出了忽略混合物动力平衡方程中相对加速度项以及广义达西定律中所有惯性项的简化模型“SD”，并提出了用固相位移－液相位移和固相位移－孔压分别表示的有限元离散形式。文献[5]指出简化模型适用于低频激励，但现有的研究并未量化各种简化模型的适用范围，因此有必要讨论孔隙率、渗透系数、激励频率等参数对各种简化模型适用范围的影响，以便于各种简化模型能被合理地应用于实际工程中。本文基于不同的简化模型“SB”，“SD”和“QS”，分别求解了一维有限饱和土柱的频域解析解。通过与完整 Biot 理论的频域解析解比较，引入无量纲量明确量化了不同简化理论“SB”，“SD”和“QS”的适用范围。

基金项目：大连理工大学海岸与近海工程国家重点实验室开放课题基金项目（LP1717）

收稿日期：2019－04－28

1 Biot 理论基本方程

Biot[3]分别建立了固相和液相的动力平衡方程：

$$\sigma^{s}_{ij,j}+(1-\phi)f^{s}_{i}=(1-\phi)\rho_{s}\ddot{u}^{s}_{i}-\rho_{a}(\ddot{u}^{f}_{i}-\ddot{u}^{s}_{i})-\frac{\phi^{2}}{\kappa}(\dot{u}^{f}_{i}-\dot{u}^{s}_{i}) \quad , \tag{1a}$$

$$\sigma^{f}_{,i}+\phi f^{f}_{i}=\phi\rho_{f}\ddot{u}^{f}_{i}+\rho_{a}(\ddot{u}^{f}_{i}-\ddot{u}^{s}_{i})+\frac{\phi^{2}}{\kappa}(\dot{u}^{f}_{i}-\dot{u}^{s}_{i}) \quad 。 \tag{1b}$$

式中 ϕ 为孔隙率；σ^{s}，σ^{f} 为固相和液相的应力张量；f^{s}，f^{f} 表示固相和液相的体积力；u^{s}，u^{f} 为固相和液相的位移；ε^{s}，ε^{f} 为固相和液相的应变张量；ρ_{s}，ρ_{f} 表示固相和液相的密度；κ 为渗透系数。Biot[3]还引入了表观质量密度 ρ_{a}，用来描述固相和液相之间的相互作用。

结合方程式（1a）和（1b）得到混合物的动力平衡方程式：

$$\sigma_{ij,j}+F_{i}=\rho_{s}(1-\phi)\ddot{u}^{s}_{i}+\phi\rho_{f}\ddot{u}^{f}_{i} \quad , \tag{2}$$

式中，$F=(1-\phi)f^{s}+\phi f^{f}$，代表混合物的体积力，$\sigma=\sigma^{s}+\sigma^{f}$ 表示混合物的应力张量。

由动力平衡方程式（1b）可以得到广义达西定律：

$$q_{i}=-\kappa\left(p_{,i}+\frac{\rho_{a}}{\phi}(\ddot{u}^{f}_{i}-\ddot{u}^{s}_{i})+\rho_{f}\ddot{u}^{f}_{i}-f^{f}_{i}\right) \quad , \tag{3}$$

式中，q 为渗流速度。

2 简化模型基本方程

2.1 简化模型“SB”

Zienkiewicz 等[5]首先提出了忽略方程式(2)和(3)中相对加速度项的简化形式，简称为“SB”。

由 $u^{s}-p$ 变量表示的控制方程如下：

$$Gu^{s}_{i,jj}+\left(K+\frac{1}{3}G\right)u^{s}_{j,ij}-\alpha p_{,i}-\rho\ddot{u}^{s}_{i}=-F_{i} \quad , \tag{4}$$

$$\kappa p_{,ii}-\frac{\phi^{2}}{R}\dot{p}-\alpha\dot{u}^{s}_{i,i}+\kappa\rho_{f}\ddot{u}^{s}_{i,i}=\kappa f^{f}_{i,i} \quad 。 \tag{5}$$

2.2 简化模型“SD”

此后，Zienkiewicz 等[8]提出了进一步的简化形式，忽略方程式（2）中相对位移的二阶时间导数项，以及达西定律(3)中所有惯性项，该简化形式简称为“SD”。

由 $u^{s}-p$ 变量表示的控制方程如下：

$$Gu^{s}_{i,jj}+\left(K+\frac{1}{3}G\right)u^{s}_{j,ij}-\alpha p_{,i}-\rho\ddot{u}^{s}_{i}=-F_{i} \quad , \tag{6}$$

$$\kappa p_{,ii}-\frac{\phi^{2}}{R}\dot{p}-\alpha\dot{u}^{s}_{i,i}=\kappa f^{f}_{i,i} \quad 。 \tag{7}$$

2.3 简化形式“QS”

Zienkiewicz[5]提出忽略方程式中所有惯性项，能够近似模拟较缓慢的动力问题，该简化形式简称为“QS”。

由 $u^{s}-p$ 变量表示的控制方程为：

$$Gu^{s}_{i,jj}+\left(K+\frac{1}{3}G\right)u^{s}_{j,ij}-\alpha p_{,i}=-F_{i} \quad , \tag{8}$$

$$\kappa p_{,ii}-\frac{\phi^{2}}{R}\dot{p}-\alpha\dot{u}^{s}_{i,i}=\kappa f^{f}_{i,i} \quad 。 \tag{9}$$

3 简化模型的适用范围

建立一维饱和土柱模型，在表面施加均匀循环荷载，如图 1 所示。基于 Biot 理论和不同简化模型得到对应的位移和孔压解析解，比较分析不同简化模型的适用范围。

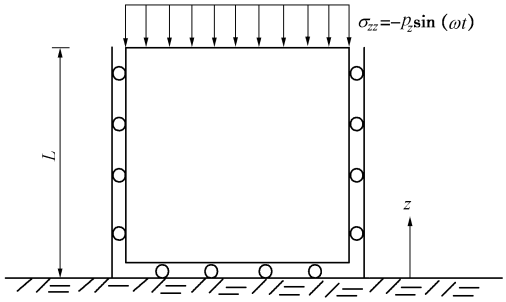

图 1 一维饱和土柱表面施加均匀简谐荷载

Fig. 1 Surface loads applied on top of one-dimensional saturated column

3.1 简化模型“SB”的解析解

忽略体积力，将由 $u^{s}-p$ 变量表示的控制方程式（4），（5）表示为 Laplace 域内的一维齐次常微分方程：

$$G\tilde{u}^{s}_{z,zz}+\left(K+\frac{1}{3}G\right)\tilde{u}^{s}_{z,zz}-\alpha\tilde{p}_{,z}-\rho s^{2}\tilde{u}^{s}_{z}=0 \quad , \tag{10}$$

$$\kappa\tilde{p}_{,zz}-\frac{\phi^{2}}{R}s\tilde{p}-\alpha s\tilde{u}^{s}_{z,z}+\kappa\rho_{f}s^{2}\tilde{u}^{s}_{z,z}=0 \quad 。 \tag{11}$$

式中，s 为 Laplace 算子。

方程式的解用指数形式表示为：$\tilde{u}_{z}(z)=U\mathrm{e}^{\lambda sz}$，$\tilde{p}(z)=P\mathrm{e}^{\lambda sz}$ 代入微分方程式（10），（11）可得：

$$E(\lambda s)^{2}U\mathrm{e}^{\lambda sz}-\alpha\lambda sP\mathrm{e}^{\lambda sz}-\rho s^{2}U\mathrm{e}^{\lambda sz}=0 \quad , \tag{12}$$

$$\kappa(\lambda s)^{2}P\mathrm{e}^{\lambda sz}-\frac{\phi^{2}}{R}sP\mathrm{e}^{\lambda sz}-\alpha s(\lambda s)U\mathrm{e}^{\lambda sz}+\kappa\rho_{f}s^{2}(\lambda s)U\mathrm{e}^{\lambda sz}=0 \quad , \tag{13}$$

式中 $E=K+\frac{4}{3}G$。

特征方程式的四个解分别如下：

$$\lambda_{1}=-\lambda_{3}=\sqrt{\frac{B+\sqrt{B^{2}-4AC}}{2A}} \quad , \tag{14}$$

$$\lambda_{2}=-\lambda_{4}=\sqrt{\frac{B-\sqrt{B^{2}-4AC}}{2A}} \quad 。 \tag{15}$$

该齐次微分方程的完整解表示如下：

$$\tilde{u}_z=\sum_{i=1}^{4}U_i\,\mathrm{e}^{\lambda_i sz}\quad,\quad \tilde{p}=\sum_{i=1}^{4}P_i\mathrm{e}^{\lambda_i sz}\quad,\qquad(16)$$

共有 8 个未知参数 U_i 和 P_i，i=1，2，3，4。

代入以下边界条件：

$\tilde{\sigma}_{zz}(z=L)=-p_z,\tilde{p}(z=L)=0,\tilde{u}_z(z=0)=0,\tilde{q}(z=0)=0$，

可解得

$$U_1=-U_3=\frac{P_0d_2}{E(d_1\lambda_2-d_2\lambda_1)}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_1 sL}}{s(1+\mathrm{e}^{-2\lambda_1 sL})}\quad,\qquad(17)$$

$$U_2=-U_4=\frac{P_0d_1}{E(d_1\lambda_2-d_2\lambda_1)}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_2 sL}}{s(1+\mathrm{e}^{-2\lambda_2 sL})}\quad。\qquad(18)$$

把式（17），（18）代入式（16）可以得到位移和孔压的频域解析解，采用同样的方法可以得到其他简化模型的解析解。

3.2　孔隙率的影响

孔隙率与混合物密度相关，会影响饱和多孔介质中波的传播特性。土体材料参数如表 1 所示，渗透系数为 κ=1.0×10^{-4} m/s。这里讨论孔隙率为 0.1，0.9 时，基于 Biot 理论和不同简化模型的孔压变化规律。

表 1　土体材料参数[Kim & Kingsbury (1979)]

Table 1 Material properties of soil

体积模量 K/Pa	剪切模量 G/Pa	Biot 系数	Biot 模量 M/Pa	干密度 /(kg·m^{-3})	液体密度 /(kg·m^{-3})	泊松比
2.1×10^8	9.8×10^7	1	4.0×10^{10}	2700	1000	0.3

如图 2，3 所示，各简化模型的适用频率区间有以下关系：“SB”＞“SD”＞“QS”。在孔隙率 ϕ=0.1 时，简化模型“SD”在频率 f<450 Hz 时和简化模型“SB”在 f<500 Hz 时与 Biot 理论的土柱底部孔压解析解基本一致；在孔隙率 ϕ=0.9 时，简化模型“SD”在频率 f <700 Hz、“SB”在取值频率范围内与 Biot 理论土柱底部孔压解析解基本一致；而静力简化模型“QS”只能在频率很小的范围内基本反映土柱的动力响应。

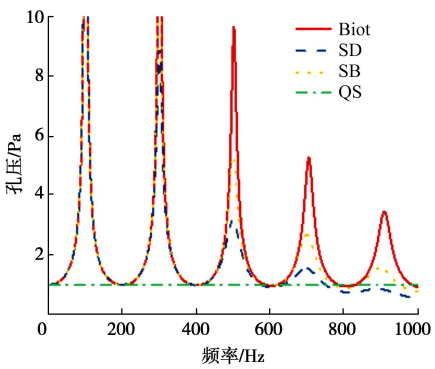

图 2　ϕ=0.1 时土柱底部的孔压

Fig. 2 Pore pressures on bottom of 1D column with ϕ=0.1

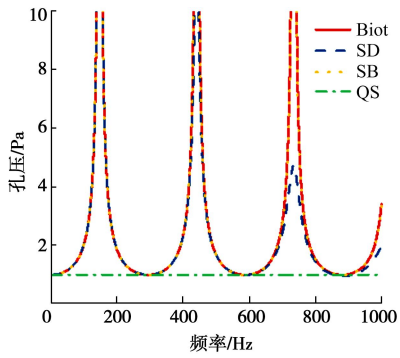

图 3　ϕ=0.9 时土柱底部的孔压

Fig. 3 Pore pressures on bottom of 1D column with ϕ=0.9

3.3　渗透系数的影响

在不同渗透率和激励频率作用下，简化模型和 Biot 理论的结果差异很大。如图 4，5 所示：在渗透系数 κ=3.55×10^{-5} m/s 时，简化模型“SB”和“SD”与 Biot 理论在取值频率范围内的结果接近；在渗透系数 κ=1×10^{-3} m/s 时，简化模型“SB”和“SD”与 Biot 理论在 f 大致小于 250 Hz 时的响应是接近的。而静力简化模型“QS”基本不能反映土柱的动力响应。

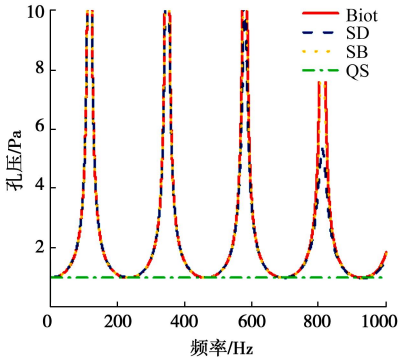

图 4　κ=3.55×10^{-5} m/s 时土柱底部的孔压

Fig. 4 Pore pressures on bottom of 1D column with κ=3.55×10^{-5} m/s

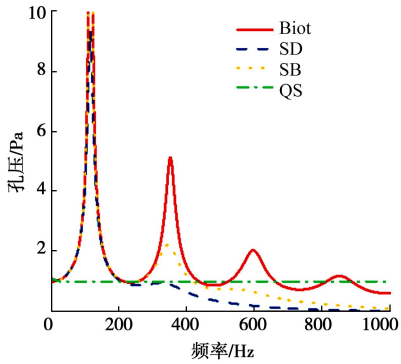

图 5　κ=1.0×10^{-3} m/s 时土柱底部的孔压

Fig. 5 Pore pressures on bottom of 1D column with κ=1.0×10^{-3} m/s

3.4　简化 Biot 理论的适用范围

以上研究表明孔隙率 n、渗透率 k、和激励频率 ω

都能影响简化模型的适用范围，定义以下无量纲量综合考虑这些参数的影响。定义无量纲量如下：

$\Omega=\dfrac{M}{E+\alpha^2 M}$，$\beta_1=\rho_f/\rho$，$\beta_2=\rho_a/\rho$，$\bar{z}=\dfrac{z}{L}$，$\mathrm{ND}_1=\dfrac{\rho}{n}\dfrac{kV_c^2}{\omega L^2}=\dfrac{2\rho k}{n\pi}\dfrac{T}{\hat{T}^2}$，$\mathrm{ND}_2=\dfrac{\omega^2 L^2}{V_c^2}=\pi^2\left(\dfrac{\hat{T}}{T}\right)^2$ 其中 L 为土层的厚度，z 为竖向坐标，$T=2\pi/\omega$ 表示激振周期，$\hat{T}=2L/V_c$ 代表系统固有周期，$V_c=\sqrt{(E+\alpha^2 M)/\rho}$ 为压缩波 P1 的波速。

不同的激励频率和渗透系数对应着不同的 ND_1 和 ND_2 值。在研究简化模型的适用范围时，通过将 Biot 理论和简化模型得到的响应差值控制在 3%范围内，可以在 $\mathrm{ND}_1/\mathrm{ND}_2$ 坐标系内对应得到三条曲线。这三条曲线将 $\mathrm{ND}_1/\mathrm{ND}_2$ 空间划分为 A、B、C、D 四部分，分别代表着不同简化模型的适用范围。

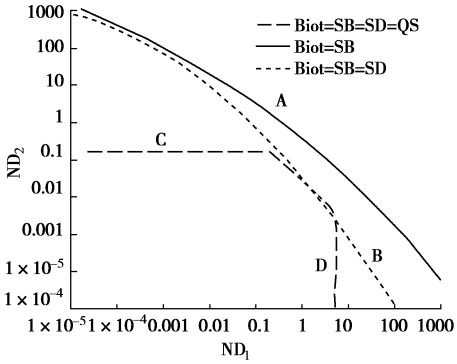

图 6 简化模型的适用范围

Fig. 6 Applicability of simplified formulations

在区间 A，代表着高频率的外部激励和渗透系数较大的多孔介质材料，只能通过 Biot 理论得到其实际响应；在区间 B，基于简化模型“SB”能得到与 Biot 理论相同的结果；在区间 C，简化模型“SD”也适用；在区间 D，对于低频外部激励和渗透系数较小的多孔介质材料，固结理论“QS”也能近似描述其实际响应。

4 结 论

简化模型“SB”、“SD”和“QS”的适用范围与土体材料参数（如孔隙率、激励频率等）和外部激励有关。本文引入了无量纲量 ND_1 和 ND_2 综合考虑这些影响因素对简化模型适用范围的影响。主要结论如下：

（1）简化模型“SB”比“SD”的适用范围更广，在区域 B 能通过简化模型“SB”得到与 Biot 理论相近的结果。即在频率较高和渗透系数较大时，可以采用忽略相对加速度项的简化模型。

（2）在区域 C，通过简化模型“SB”和“SD”都能得到与 Biot 理论相近的结果。即在一定范围内，可以采用忽略相对加速度项和线性达西定律的简化模型。

（3）在区域 D，外部激励频率较低，渗透系数较小时，近似于准静力模型，甚至可以通过省略所有惯性项的简化模型得到与 Biot 理论相同的结果。

参考文献：

[1] BIOT M A. General theory of three-dimensional consolidation[J]. Journal of Applied Physics, 1941, **12**(2): 155－164.

[2] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid: Ⅱ higher frequency range[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1956, **28**(2): 179－191.

[3] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid: Ⅰ low-frequency range[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1956, **28**(2): 168－179.

[4] BIOT M A. Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid[J]. Journal of Applied Physics, 1956, **27**(5): 459－467.

[5] ZIENKIEWICZ O C, CHANG C T, BETTESS P. Drained, undrained, consolidating and dynamic behaviour assumptions in soils[J]. Géotechnique, 1980, **30**(4): 385－395.

[6] SCHANZ M, CHENG H D. Transient wave propagation in a one-dimensional poroelastic column[J]. Acta Mechanica. 2000, **145**(1/2/3/4): 1－18.

[7] SCHANZ M, STRUCKMEIER V. Wave propagation in a simplified modelled poroelastic continuum: fundamental solutions and a time domain boundary element formulation[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, **64**(13): 1816－1839.

[8] ZIENKIEWICZ O C, SHIOMI T. Dynamic behaviour of saturated porous media: the generalized Biot formulation and its numerical solution[J]. International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics, 1984, **8**(1): 71－96.

（责编：明经平）