DOI：10.11779/CJGE201907009

# 基坑开挖引起邻近盾构隧道转动与错台变形计算

魏 纲[1]，洪文强[2]，魏新江[1]，张鑫海*[2]，罗经纬[1]

（1. 浙江大学城市学院土木工程系，浙江 杭州 310015；2. 浙江大学建筑工程学院，浙江 杭州 310058）

**摘 要**：基坑开挖会对邻近盾构隧道的变形产生显著影响。考虑基坑开挖时卸载在隧道轴线处产生的附加应力，建立了综合考虑剪切错台变形和刚体转动变形的隧道变形计算模型，结合最小势能原理推导出隧道的纵向变形量、环间错台量、环间转角和环间剪切力的计算公式。选取两组工程实例进行分析，将计算结果与实测数据进行比较。研究结果表明：邻近并平行于盾构隧道的基坑侧壁的卸荷效应对旁边隧道的影响最大；隧道水平位移最大值附近的管片基本不发生错台变形和刚体转动变形，环间剪切力值也很小；而在隧道水平位移曲线的反弯点处，隧道的剪切错台量、环间转角和环间剪切力值达到最大；在基坑开挖工况下，邻近隧道的水平位移变形模式以剪切错台为主，刚体转动为辅。

**关键词**：盾构隧道；刚体转动效应；剪切错台效应；基坑开挖；变形模式

**中图分类号**：TU433；U45 **文献标识码**：A **文章编号**：1000－4548(2019)07－1251－09

**作者简介**：魏 纲(1977— )，男，博士，教授，主要从事地下隧道与周边环境相互影响及风险评估与控制研究。E-mail: weig@zucc.edu.cn。

# Calculation of rigid body rotation and shearing dislocation deformation of adjacent shield tunnels due to excavation of foundation pits

WEI Gang[1], HONG Wen-qiang[2], WEI Xin-jiang[1], ZHANG Xin-hai[2], LUO Jing-wei[1]

(1. Department of Civil Engineering of City College, Zhejiang University, Hangzhou 310015, China; 2. College of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

**Abstract**: Excavation of foundation pits has a significant impact on the deformation of the adjacent shield tunnels. Considering the additional stress at the tunnel axis due to the soil unloading during excavation, a tunnel deformation model combining the shear-dislocation and rigid-body rotation is established. The formulas for the longitudinal deformation, segment-joint dislocation displacement, rotation angle and segment-joint shear force of the tunnel are deduced based on the principle of the minimum potential energy. Two engineering cases are selected for analysis, and the calculated results are compared with the measured data. The results show that: the soil unloading stress of the adjacent parallel surrounding wall has the largest effect on the tunnel when the foundation pit is beside the tunnels. On the location of the maximum tunnel horizontal deformation, the dislocation and rigid-body rotation of tunnel segments are close to zero, and the segment-joint shear force is also very small. At the inflection point of the horizontal displacement curve, the segment-joint rotation angle and segment-joint shear force of the tunnel both reach the maximum. Under the excavation of the foundation pit, the tunnel deformation model is mainly composed of shear dislocation and complemented by rigid body rotation.

**Key words**: shield tunnel; rigid body rotation; shearing dislocation platform; excavation of foundation pit; deformation model

## 0 引 言

随着城市轨道交通的发展，在运营地铁隧道附近进行基坑开挖的工况越来越多[1]。上海市地铁沿线建筑施工保护技术管理暂行规定[2]：地铁结构的最终绝对位移不能超过20 mm。当基坑开挖时，开挖面存在卸荷作用，会传递给周围土体，因此会对邻近地铁隧道产生附加应力，破坏盾构结构的平衡，引起隧道应力重分布，从而产生一定的变形。情况严重时会引发隧道接缝张开、螺栓失效和管片开裂等现象，对地铁安全产生严重影响。因此研究基坑开挖对邻近运营地铁隧道的影响具有重要意义。

针对该工程问题，目前国内外进行了一些研究。研究方法主要可归纳为：实测分析[3-4]、数值模拟[5-6]、理论计算[7-11]和离心模型试验[12]。对于理论分析法：王涛等[13]将隧道结构等效为处于土层中的弹性地基

基金项目：国家自然科学基金项目（51778576）

收稿日期：2018－04－18

*通讯作者（E-mail: 1437659927@qq.com）

梁，基于 Winkler 模型，假定地基中任一点所受的应力只与该点的地基变形成正比，但没有考虑隧道的管片结构，该假设过于简化；王如路[14]分析了隧道基于刚体转动方式时的纵向变形行为，提到完全的刚体转动变形模式的假定与隧道实际发生的纵向变形有较大的出入；周顺华等[15]将盾构隧道衬砌环视为由剪切弹簧连接的弹性地基短梁，隧道纵向变形视为以纯粹的剪切错台模式进行，建立隧道变形的计算模型，利用最小势能原理计算隧道在基坑开挖工况下的纵向位移。但是剪切错台变形无法解释环缝张开的情况。目前没有研究综合考虑剪切错台效应和刚体转动效应，因此现有隧道变形模式还存在不足，需作进一步研究。

本文采用笔者建立的综合考虑这两种效应的新隧道变形计算模型，采用 Mindlin 解计算基坑坑底和侧壁卸荷引起邻近地铁隧道的附加应力[16]，采用最小势能法建立隧道变形的变分控制方程，并利用 MATLAB 进行求解，推导出隧道的纵向变形量、环间剪切力、错台量和环间转角的计算公式。并选取适当的案例进行计算，将本文方法计算结果与实测数据进行比较，以验证该方法的正确性。

## 1 转动与错台协同作用下的隧道变形模式

### 1.1 现有变形模式的不足之处

在分析盾构隧道的纵向变形时，往往将隧道简化为等效刚度的弹性梁。即使考虑了隧道管片环的位移时，大多将隧道衬砌环理想化为单纯的刚体转动情况或单纯的剪切错台情况。

王如路[17]推导了在刚体转动情况下，隧道环宽、直径、环缝闭合和张开量与隧道纵向附加沉降（隆起）曲线半径之间的关系式。根据该关系式，当环宽为 1 m，隧道外径为 6.2 m，附加沉降（隆起）曲线半径达到 1033 m 时，环缝张开量就已达到 6 mm，此时隧道弹性防水应已经失效。但实际工程中该工况下防水系统并未失效，故单纯的刚体转动变形模式与实际情况不符。

林永国等[18]发现打浦路越江隧道在通风井以东约 160 m 范围内形成了明显的纵向变形曲线，并且造成了隧道环向裂缝。假设隧道完全以剪切错台模式变形，那么隧道发生沉降时不会发生环缝张开的情况。因此隧道完全以剪切错台模式变形的假设也与实际情况不符。

理论分析和现场实测表明隧道纵向变形是由剪切错台效应和刚体转动效应共同作用[14]。

### 1.2 针对不足之处建立新的变形模式

针对现有隧道变形模式的不足，魏新江等[19]在研究堆载对邻近盾构隧道影响过程中首次提出了一种能考虑管片环转动效应和错台效应的隧道变形模型。该种模型将衬砌环看作由剪切弹簧和抗拉弹簧连接的弹性地基短梁。在研究基坑开挖引起邻近盾构隧道的变形中为了综合考虑刚体转动效应和剪切错台效应，本文将隧道变形看成在剪切错台的基础上发生刚体转动，其中刚体转动效应和剪切错台效应对隧道位移量的影响大小，采用两者造成衬砌环的相对位移量大小表示，令相邻衬砌环总的相对位移量为 $\delta$，刚体转动导致的衬砌环相对位移量为 $\delta_1$，剪切错台导致的衬砌环相对位移量为 $\delta_2$，三者满足 $\delta=\delta_1+\delta_2$。假设 $\delta_1=j\delta$，其中 $j$ 为刚体转动效应比例系数，表示刚体转动效应造成的隧道纵向位移量占总的隧道纵向位移量的比例。当 $j$=0 时，该变形模式为纯粹的剪切错台模式；当 $j$=1 时，该变形模式为纯粹的刚体转动模式。

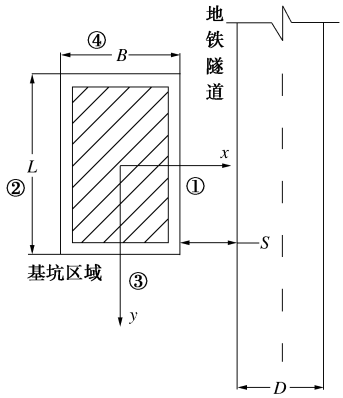
## 2 基坑引起的隧道附加应力计算

文献[15]在计算土体附加应力时采用的基坑力学模型存在缺陷，所以本文采用更为贴近工程实际的基坑简化力学模型[16]来计算隧道轴线处的土体附加应力。具体公式的推导过程及细节可参见文献[16]，下面笔者仅对必要的公式和解释进行说明。

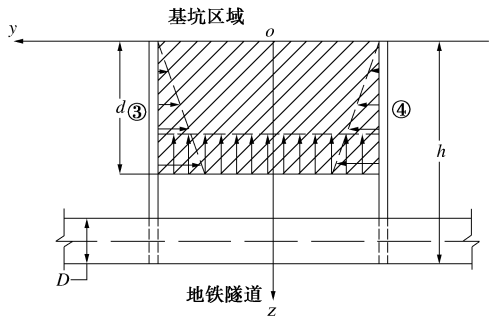
### 2.1 建立基坑开挖力学模型

作如下假设：①假定地基土是各向同性、均匀连续的半无限弹性体，而且在深度和水平方向上都无限延伸；②在计算基坑开挖对土体产生的附加应力时，不考虑隧道存在的影响。

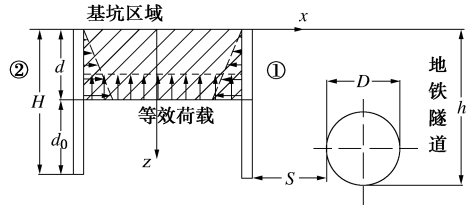
笔者引用文献[16]建立的基坑简化力学模型（见图 1），邻近地铁隧道有一矩形基坑，开挖长度为 $L$，开挖宽度为 $B$，开挖深度为 $d$，基坑 4 个侧壁的编号分别为①、②、③、④。在基坑中点 $o$ 处建立坐标系，以 $o$ 点到侧壁①作为 $x$ 轴正向；以 $o$ 点到侧壁③作为 $y$ 轴正向；$z$ 以地面向下为正。令基坑底部到基坑围护结构底部的垂直距离为 $d_0$，地面到隧道底部的垂直距离为 $h$，基坑围护结构的埋深为 $H(H=d+d_0)$，开挖面与隧道的最小净距为 $s$，盾构隧道外径为 $D$。




（a）俯视图




（b）右视图




（c）前视图

图 1 基坑开挖对旁边隧道影响的计算模型

Fig. 1 Model for effects on adjacent tunnel due to excavation of foundation pit

## 2.2 宏观弹性尺度一致性条件

对土体附加应力计算作如下说明：①只计算基坑坑底面和①、③、④侧壁的应力作用，不计算②侧壁的应力作用；②考虑基坑底部围护结构的遮拦效应和围护结构侧壁的侧摩阻力；③考虑到土体开挖、围护体系和支撑结构对侧壁应力释放的影响，令基坑开挖产生的侧壁等效附加应力为 $\beta K_0\gamma z$（$\beta$ 为折减系数，$K_0$ 为静止土压力系数，$\gamma$ 为土体重度，$z$ 为计算点离地面的竖向距离）。下面分别给出坑底和基坑侧壁卸载在隧道轴线处产生的土体附加应力计算公式。

（1）基坑坑底卸荷应力计算

考虑基坑底部围护结构的遮拦效应和坑底以下侧壁的侧摩阻力，基坑围护结构底面水平平面处土体受到的荷载如图 2 所示，其等效荷载为

$$\sigma=\frac{\gamma d(1-\alpha)BL-q_{s1}d_0(2B+2L)}{BL}\quad,\qquad(1)$$

式中，$q_{s1}$ 为平均侧摩阻力，$q_{s1}=c+1/2(\gamma d+\gamma H)K_0\tan\varphi$；$c$ 为土的黏聚力；$\varphi$ 为土体内摩擦角；$\alpha$ 为残余应力系数[20]：

$$\alpha=\begin{cases}\alpha_0+\dfrac{0.95-\alpha_0}{h_r^{\,2}}\cdot h_0^2 & (0<h_0<h_r)\\ 1.0 & (h_0>h_r)\end{cases}\quad,\qquad(2)$$

式中，$h_r$ 为残余应力影响深度，$h_r=\dfrac{d}{0.612d+0.19}$，$h_0$ 为计算点到基坑开挖面的距离，$\alpha_0$ 为初始残余应力系数，取 0.3。

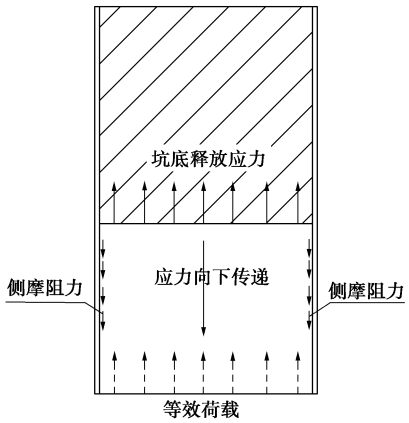



图 2 围护结构底面处的荷载

Fig. 2 Loads on bottom of retaining structures

在围护结构底面处水平面上取一个微单元，其单位力为 $\sigma\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$；采用 Mindlin 竖向荷载的基本应力解，计算得到围护结构底面处等效荷载引起的隧道轴线上某点($x_1$，$y_1$，$z_1$)的水平附加应力 $\sigma_x^{\mathrm{d}}$ 为

$$\sigma_x^{\mathrm{d}}=-\frac{\sigma}{8\pi(1-\mu)}\int_{-L/2}^{L/2}\int_{-B/2}^{B/2}\left\{-\frac{(1-2\mu)(z_1-H)}{T_1^3}+\frac{30(x_1-\xi)^2z_1H(z_1+H)}{T_2^7}-\right.$$
$$\frac{(1-2\mu)(3(z_1-H)-4\mu(z_1+H))}{T_2^3}+\frac{3(x_1-\xi)^2(z_1-H)}{T_1^5}+$$
$$\frac{3(3-4\mu)(x_1-\xi)^2(z_1-H)-6H(z_1+H)((1-2\mu)z_1-2\mu H)}{T_2^5}+$$
$$\left.\frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{T_2(T_2+z_1+H)}\left[1-\frac{(x_1-\xi)^2}{T_2(T_2+z_1+H)}-\frac{(x_1-\xi)^2}{T_2^2}\right]\right\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\quad,\qquad(3)$$

式中，$T_1=\sqrt{(x_1-\xi)^2+(y_1-\eta)^2+(z_1-H)^2}$，$T_2=\sqrt{(x_1-\xi)^2+(y_1-\eta)^2+(z_1+H)^2}$。

（2）基坑侧壁卸荷应力计算

在编号为①的基坑侧壁三角形分布荷载中取一个微单元，其单位力为 $\beta K_0\gamma\tau\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau$；采用 Mindlin 水平荷载的基本应力解，计算得到侧壁①卸载引起的隧道轴线上某点($x_1$，$y_1$，$z_1$)的水平附加应力 $\sigma_x^{\mathrm{c1}}$ 为

$$\sigma_x^{\mathrm{c1}}=-\frac{\beta K_0\gamma(x_1-B/2)}{8\pi(1-\mu)}\int_0^d\int_{-L/2}^{L/2}\left\{\frac{1-2\mu}{R_1^3}-\frac{(1-2\mu)(5-4\mu)}{R_2^3}+\right.$$
$$\frac{3(x_1-B/2)^2}{R_1^5}+\frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{R_2(R_2+z_1+\tau)^2}\left[3-\frac{(x_1-B/2)^2(3R_2+z_1+\tau)}{R_2^2(R_2+z_1+\tau)}\right]+$$
$$\frac{3(3-4\mu)(x_1-B/2)^2}{R_2^5}-\frac{6\tau}{R_2^5}\cdot$$
$$\left.\left[3\tau-(3-2\mu)(z_1+\tau)+\frac{5(x_1-B/2)^2z_1}{R_2^2}\right]\right\}\tau\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau\,,\qquad(4)$$

式中，$R_1=\sqrt{(x_1-B/2)^2+(y_1-\eta)^2+(z_1-\tau)^2}$，$R_2=\sqrt{(x_1-B/2)^2+(y_1-\eta)^2+(z_1+\tau)^2}$。

同理，在编号为③的基坑侧壁卸载作用下，引起隧道轴线上某点($x_1$，$y_1$，$z_1$)的水平附加应力 $\sigma_x^{\mathrm{c3}}$ 为

$$\sigma_x^{c3}=-\frac{\beta K_0\gamma(y_1-L/2)}{8\pi(1-\mu)}\int_0^d\int_{-L/2}^{L/2}\left\{\frac{-1+2\mu}{R_5^3}-\frac{(1-2\mu)(3-4\mu)}{R_6^3}+\frac{3(y_1-L/2)^2}{R_5^5}+\frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{R_6(R_6+z_1+\tau)^2}\left[1-\frac{(y_1-L/2)^2(3R_6+z_1+\tau)}{R_6^2(R_6+z_1+\tau)}\right]+\frac{3(3-4\mu)(y_1-L/2)^2}{R_6^5}-\frac{6\tau}{R_6^5}\cdot\left[\tau-(1-2\mu)(z_1+\tau)+\frac{5(y_1-L/2)^2z_1}{R_6^2}\right]\right\}\tau\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau \quad , \tag{5}$$

式中，$R_5=\sqrt{(x_1-\xi)^2+(y_1-L/2)^2+(z_1-\tau)^2}$，$R_6=\sqrt{(x_1-\xi)^2+(y_1-L/2)^2+(z_1+\tau)^2}$。

在编号为④的基坑侧壁卸载作用下，引起隧道轴线上某点($x_1$，$y_1$，$z_1$)的水平附加应力 $\sigma_x^{c4}$ 为

$$\sigma_x^{c4}=\frac{\beta K_0\gamma(y_1+L/2)}{8\pi(1-\mu)}\int_0^d\int_{-L/2}^{L/2}\left\{\frac{-1+2\mu}{R_7^3}-\frac{(1-2\mu)(3-4\mu)}{R_8^3}+\frac{3(y_1+L/2)^2}{R_7^5}+\frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{R_8(R_8+z_1+\tau)^2}\left[1-\frac{(y_1+L/2)^2(3R_8+z_1+\tau)}{R_8^2(R_8+z_1+\tau)}\right]+\frac{3(3-4\mu)(y_1+L/2)^2}{R_8^5}-\frac{6\tau}{R_8^5}\left[\tau-(1-2\mu)(z_1+\tau)+\frac{5(y_1+L/2)^2z_1}{R_8^2}\right]\right\}\tau\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau \quad , \tag{6}$$

式中，$R_7=\sqrt{(x_1-\xi)^2+(y_1+L/2)^2+(z_1-\tau)^2}$，$R_8=\sqrt{(x_1-\xi)^2+(y_1+L/2)^2+(z_1+\tau)^2}$，

（3）土体总的附加应力

将基坑坑底和 3 个侧壁卸荷效应进行叠加，得到隧道轴线上某点($x_1$，$y_1$，$z_1$)土体的水平附加应力 $\sigma_x$ 为

$$\sigma_x=\sigma_x^{d}+\sigma_x^{c1}+\sigma_x^{c3}+\sigma_x^{c4} \quad 。 \tag{7}$$

## 3 本文方法

### 3.1 盾构隧道的总势能

刘晓强等[21]在计算隧道开挖引起的地下管线响应时运用了基于最小势能原理的能量变分法。该种方法借助 MATLAB 计算较为方便，也容易达到精度要求。因此本文将利用该方法来计算基坑开挖对邻近地铁盾构隧道产生的水平位移。

如图 3 所示，编号为 $m$ 和 $m$+1 的相邻衬砌环相对位移量为 $\delta_m$，这组相邻管片环之间的相对位移量可视为由刚体转动引起的位移量 $\delta_{m1}$ 和剪切错台引起的位移量 $\delta_{m2}$ 组成，即 $\delta_m=\delta_{m1}+\delta_{m2}$。其中，

$$\delta_{m1}=D_t\sin\theta_m \tag{8}$$

式中，$D_t$ 为管片环的环宽。

由于 $\theta_m$ 无限小，$\delta_{m1}=D_t\theta_m$，且 $\delta_{m1}=j\delta_m$，可得

$$\theta_m=\frac{j\delta_m}{D_t} \quad , \tag{9}$$

式中，$j$ 为刚体转动效应比例系数。

令盾构隧道位移 $\omega(x)$；隧道处地层位移为 $S(x)$，根据位移协调条件 $S(x)=\omega(x)$。根据隧道变形和环间剪切刚度及环间抗拉刚度，可以得到环间剪切力与环间拉力的表达式。

环间剪切力为

$$F_t=(1-j)k_t\left[\omega((m+1)D_t)-\omega(mD_t)\right] \quad ; \tag{10}$$

环间最大拉力为

$$F_T=k_T\theta_m D \quad ; \tag{11}$$

地层抗力为

$$F_k=kD\omega(x) \quad 。 \tag{12}$$

式（10）～（12）中，$k_t$ 和 $k_T$ 分别为隧道的环间剪切刚度和环间抗拉刚度，取值方法可参考文献[22]；$k$ 为土的基床系数，采用 Vesic 公式[23]计算，$k=\frac{0.65E_0}{(1-\mu^2)D}\sqrt[12]{\frac{E_0D^4}{E_tI_t}}$，其中 $\mu$ 为土的泊松比，$E_0$ 为地基土的变形模量，$E_0=\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{(1-\mu)}E_s$，$E_s$ 为土的压缩模量；$E_tI_t$ 为隧道的等效抗弯刚度，根据叶飞等[24]的研究，盾构隧道等效刚度可以根据以下公式计算得到：

$$E_tI_t=E_c\lambda_1+\frac{nD_tK_b\lambda_2}{A_s} \quad 。 \tag{13}$$

式中 $E_c$ 为管片弹性模量；$n$ 为纵向螺栓个数；$D_t$ 为管片环的环宽；$K_b$ 为接头螺栓的平均线刚度；$A_s$ 为隧道横截面面积；不考虑隧道水平直径和竖直直径发生变化时，$\lambda_1=tD(A_1+A_2-A_3-A_4-A_5)$；$\lambda_2=tD(A_1+A_2+A_3+A_4+A_5)$；$A_1=\pi D^2/16$；$A_2=\pi D^2\sin^2\psi/8$；$A_3=D^2\psi/8$；$A_4=D^2\psi\sin^2\psi/4$；$A_5=3D^2\sin\psi\cos\psi/8$；其中 $\psi$ 为管片环中心轴位置参数，取值方法可参考文献[24]；$t$ 为管片厚度；$D$ 为隧道外径。

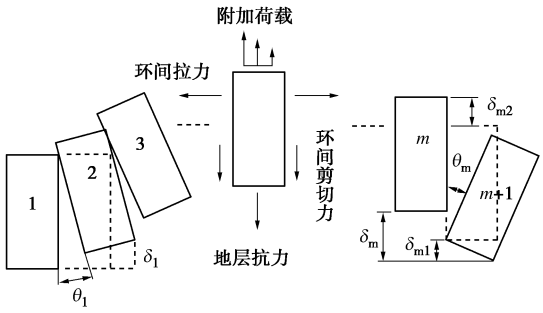



**图 3 考虑刚体转动和剪切错台效应的隧道变形计算模型**

Fig. 3 Model for tunnel deformation considering effects of rigid body rotation and shear dislocation platform

分析得到基坑开挖卸载引起盾构隧道变形过程中总势能具体由以下 4 部分组成：

（1）基坑开挖引起的附加荷载做功

$$W^{\mathrm{P}}=\sum_{m=-N}^{N-1}\int_{mD_{\mathrm{t}}}^{(m+1)D_{\mathrm{t}}}\omega_x P_x\mathrm{d}x=\int_{-ND_{\mathrm{t}}}^{ND_{\mathrm{t}}}\omega_x P_x\mathrm{d}x \quad , \tag{14}$$

式中，$2N$ 为受基坑开挖影响的隧道衬砌计算环数，取值与基坑开挖的影响范围有关，理论上 $N$ 取值越大，计算精度越高。但是相应计算量增大，计算效率受影响。

（2）克服地层抗力做功

$$W^{\mathrm{k}}=-\sum_{m=-N}^{N-1}\int_{mD_{\mathrm{t}}}^{(m+1)D_{\mathrm{t}}}\frac{1}{2}\omega_x kD\omega_x\mathrm{d}x=-\int_{-ND_{\mathrm{t}}}^{ND_{\mathrm{t}}}\frac{1}{2}kD\omega_x{}^2\mathrm{d}x \text{ 。} \tag{15}$$

（3）克服环间剪切力做功

$$W^{\mathrm{S}}=-\sum_{m=-N}^{N-1}\frac{1}{2}k_{\mathrm{t}}(1-j)^2\left[\omega_{(m+1)D_{\mathrm{t}}}-\omega_{mD_{\mathrm{t}}}\right]^2 \text{ 。} \tag{16}$$

（4）克服环间拉力做功

$$W^{\mathrm{T}}=-\sum_{m=-N}^{N-1}\left[\int_{r=0}^{r=D}\frac{1}{2}\frac{k_{\mathrm{T}}}{D}\theta_m r\frac{\theta_m r}{2}\mathrm{d}r+\int_{r=0}^{r=D}\frac{1}{2}\frac{k_{\mathrm{T}}}{D}\theta_{m+1}r\frac{\theta_{m+1}r}{2}\mathrm{d}r\right]$$

$$=-\sum_{m=-N}^{N-1}\int_{r=0}^{r=D}\frac{1}{2}\frac{k_{\mathrm{T}}}{D}\theta_m{}^2r^2\mathrm{d}r=-\sum_{m=-N}^{N-1}\frac{k_{\mathrm{T}}\theta_m{}^2D^2}{6} \quad , \tag{17}$$

式中，$\theta_m=\dfrac{j\delta_m}{D_{\mathrm{t}}}=\dfrac{j(\omega_{(m+1)D_{\mathrm{t}}}-\omega_{mD_{\mathrm{t}}})}{D_{\mathrm{t}}}$ 。

得到

$$W^{\mathrm{T}}=-\sum_{m=-N}^{N-1}\frac{j^2k_{\mathrm{T}}D^2}{6D_{\mathrm{t}}^2}\left[\omega_{(m+1)D_{\mathrm{t}}}-\omega_{mD_{\mathrm{t}}}\right]^2 \text{ 。} \tag{18}$$

根据最小势能原理，隧道的应变能和外力势能之和既为基坑开挖引起邻近地铁盾构隧道的总势能：

$$E^{\mathrm{P}}=W^{\mathrm{P}}+W^{\mathrm{k}}+W^{\mathrm{S}}+W^{\mathrm{T}} \text{ 。} \tag{19}$$

### 3.2　盾构衬砌环的位移函数傅里叶展开

盾构隧道位移左右对称，本文令隧道位移试函数如下，并按傅里叶级数展开：

$$\omega_{(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{ND_{\mathrm{t}}}=T_n(x)\times A^{\mathrm{T}} \quad , \tag{20}$$

式中，$T_n(x)=\left(1,\cos\dfrac{\pi x}{ND_{\mathrm{t}}},\cos\dfrac{2\pi x}{ND_{\mathrm{t}}},\cdots,\ \cos\dfrac{n\pi x}{ND_{\mathrm{t}}}\right)$，$A=(a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots,\ a_n)^{\mathrm{T}}$，$n$ 为傅里叶的展开级数。

### 3.3　变分控制方程

将总势能 $E^{\mathrm{P}}$ 对各待定系数取极值，即

$$\frac{\partial E^{\mathrm{P}}}{\partial\xi_i}=0\ \ (\xi_i=a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots,\ a_n) \quad , \tag{21}$$

式中，$\xi_i$ 为矩阵 $A$ 中的各个元素，也即隧道纵向位移函数多项式的系数。

对上式求解可得控制方程：

$$\left\{\sum_{m=-N}^{N-1}\left[k_{\mathrm{t}}(1-j)^2+\frac{j^2k_{\mathrm{T}}D^2}{3D_{\mathrm{t}}^2}\right]\frac{\partial\{\omega[(m+1)D_{\mathrm{t}}]-\omega(mD_{\mathrm{t}})\}}{\partial\xi_i}\cdot\{T_n[(m+1)D_{\mathrm{t}}]-T_n(mD_{\mathrm{t}})\}+\int_{-ND_{\mathrm{t}}}^{ND_{\mathrm{t}}}kD\frac{\partial\omega_{(x)}}{\partial\xi_i}T_n(x)\mathrm{d}x\right\}\times A^{\mathrm{T}}$$

$$=\int_{-ND_{\mathrm{t}}}^{ND_{\mathrm{t}}}P(x)\{T_n(x)\}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}x \text{ 。} \tag{22}$$

将式（22）表达为矩阵形式：

$$\left([K_{\mathrm{t}}]+[K_{\mathrm{s}}]\right)\{A\}^{\mathrm{T}}=\{P_n\}^{\mathrm{T}} \quad , \tag{23}$$

式中，$[K_{\mathrm{t}}]$ 为隧道环间刚度矩阵。

$$[K_{\mathrm{t}}]=\sum_{m=-N}^{N-1}\left[k_{\mathrm{t}}(1-j)^2+\frac{j^2k_{\mathrm{T}}D^2}{3D_{\mathrm{t}}^2}\right]\{T_n[(m+1)D_{\mathrm{t}}]^{\mathrm{T}}-T_n(mD_{\mathrm{t}})^{\mathrm{T}}\}\{T_n[(m+1)D_{\mathrm{t}}]-T_n(mD_{\mathrm{t}})\} \text{ 。}$$

$[K_{\mathrm{S}}]$ 为土体刚度矩阵。

$$[K_{\mathrm{s}}]=kDND_{\mathrm{t}}\begin{bmatrix}2&&&&\\&1&&&\\&&1&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{bmatrix} \text{ 。}$$

其中，$\{P_n\}^{\mathrm{T}}$ 表示自由土体位移和隧道衬砌环的相作用效应：

$$\{P_n\}^{\mathrm{T}}=\int_{-ND_{\mathrm{t}}}^{ND_{\mathrm{t}}}P(x)\{T_n(x)\}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}x \text{ 。} \tag{24}$$

由式（23）计算可得到待定系数矩阵 $A$，相邻盾构管片之间位移差值即错台量 $\Delta\omega$ 为

$$\Delta\omega=(1-j)\{\omega[(m+1)D_{\mathrm{t}}]-\omega(mD_{\mathrm{t}})\} \text{ 。} \tag{25}$$

相邻盾构管片之间的剪切力 $Q$ 为

$$Q=(1-j)\{\omega[(m+1)D_{\mathrm{t}}]-\omega(mD_{\mathrm{t}})\}\times k_{\mathrm{t}} \text{ 。} \tag{26}$$

上述计算方法可通过 Matlab 编程实现数值运算。其中积分运算步骤中利用复合辛普森求积公式，采用满足精度要求的积分步长进行数值积分。矩阵$[K_{\mathrm{T}}]$和$[K_{\mathrm{S}}]$取 10 阶方阵即可满足实际工程的精度要求。

## 4　工程实例分析

由于基坑开挖对旁边既有隧道的影响主要产生水平向卸载，竖向力较小[16]，所以本文选取 2 个基坑工程实例，采用本文方法计算基坑开挖引起邻近地铁隧道水平位移的曲线，并与其实测曲线进行对比，以验证本文方法的正确性。

### 4.1　基坑工程案例 1

杭州市萧山区市心中路与金城路交叉口位于已投入运营的地铁 2 号线盾构隧道旁侧需进行深基坑施工，隧道旁侧基坑平面开挖尺寸 $L$=68 m，$B$=72 m，开挖深度 $d$=16.4 m，地下连续墙深入地面以下 37.2 m。基坑围护结构边线距离隧道最小净距 $s$=9.5 m[25]。盾构隧道衬砌外径 $D$=6.2 m，采用 C50 混凝土管片，厚度 $t$=0.35 m，环宽 $D_{\mathrm{t}}$=1.2 m；管片环之间由 16 根 M30 纵向螺栓连接[26]。根据计算得到 $k_{\mathrm{t}}$=7.45×10$^5$ kN/m，

$k_T$=1.94×10$^6$ kN/m，$E_tI_t$=1.1×10$^8$ kN·m$^2$。隧道埋深 14.3 m，根据实际工程地质情况，土体重度取加权平均值 $\gamma$ =18.4 kN/m$^3$，土的泊松比 $\mu$=0.4。土体压缩模量 $E_s$=6.4 MPa。

基坑侧壁的卸载可以认为是开挖之后围护结构所受的侧向荷载和初始状态的水平静止土压力之差。姜兆华等[8]曾采用有限元方法进行研究，得到该卸载分布可近似为初始静止土压力的 25%。虽然实际工程中该卸载大小受地质条件、围护结构、施工技术水平等多种因素的影响，但在预测基坑开挖对旁侧隧道影响的计算中可暂定 $\beta$=25%进行预测。

根据前文中基坑坑底卸载应力计算表明：只有当基坑坑底以下围护结构的深度较小时，等效荷载不为零，基坑坑底竖向卸荷才会对旁边隧道产生的较大影响。周顺华等[15]研究中仅考虑了坑底卸载的作用，没有考虑坑底以下围护结构的“遮拦效应”，也没有考虑侧壁卸载对隧道的影响，显然存在不合理之处。而本文选取的案例中，基坑坑底以下维护结构深度较大，此时的“遮拦效应”明显，基坑维护结构底部的等效荷载为零，因此基坑底部竖向卸荷对旁边隧道产生影响很小且易受到降水等复杂因素的影响[16]，而侧壁卸载对旁侧隧道的影响较大，所以本文将重点分析侧壁卸荷效应对旁侧隧道的影响。

图 4 为本文方法计算的隧道水平位移与实测数据的对比，由图 4 可知，本文计算结果与实测结果吻合，此时的刚体转动效应比例系数 $j$=0.1，即盾构隧道管片环刚体转动引起的水平位移变形占 10%，管片环错台引起的隧道水平位移占 90%。由图 4 可知，最大水平位移计算值为 11.58 mm，实测的最大水平位移为 11.90 mm。隧道水平位移呈现正态分布，隧道中心处的水平位移较大，两边依次递减。

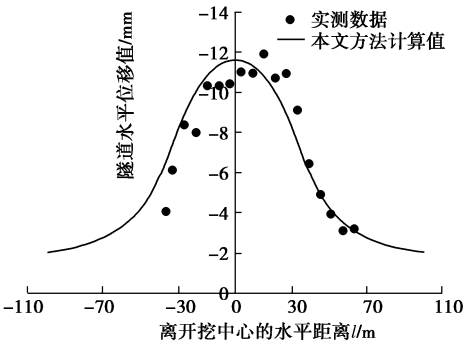



图 4 工程实例1隧道水平向位移对比

Fig. 4 Comparison of horizontal displacements of shield tunnel in engineering case 1

图 5 是用本文方法计算的各个侧壁卸载引起的旁侧隧道水平位移曲线。由于基坑坑内土体的开挖，侧壁 2 卸荷的效果无法传递给基坑，所以不考虑侧壁 2 卸荷效果的影响。由图可知，隧道总的水平位移主要是由侧壁 1 的卸载效应产生。侧壁 3，4 卸载效应对旁侧隧道的影响较小，侧壁 3，4 卸载主要引起的基坑开挖范围外（开挖中心两侧 34 m 以外）的隧道水平位移。

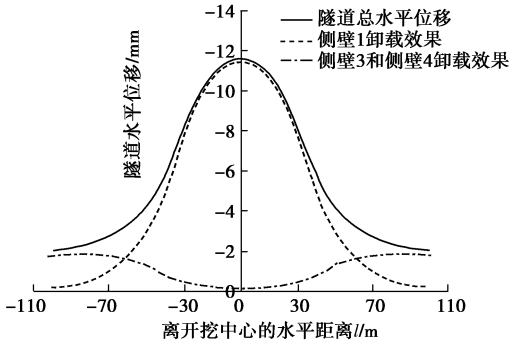



图 5 基坑侧壁卸荷引起隧道水平位移曲线

Fig. 5 Curves of tunnel horizontal displacement caused by soil unloading of surrounding walls

盾构隧道错台量和环间转角的大小关系到隧道结构和防水体系的安全。环间错台量越大，隧道发生渗漏水的概率越大，因此对隧道错台量的估算非常有必要。图 6 为本文方法计算得到盾构隧道管片错台量和环间转角。如图所示：在隧道水平位移最大值处的管片错台量和环间转角接近于 0，即在隧道最大水平位移值附近的盾构环之间几乎不发生错台变形和刚体转动变形；管片最大错台量为 1.07 mm，最大环间转角为 0.099°，发生在隧道水平位移曲线的两个反弯点附近。

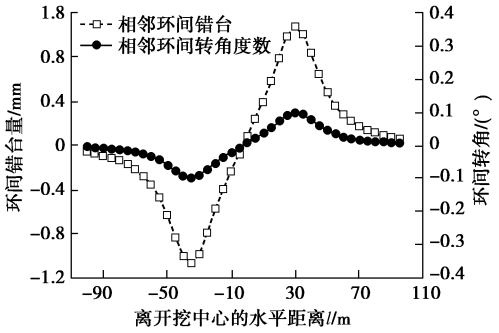



图 6 工程实例1的隧道环间错台量和环间转角

Fig. 6 Dislocation platform and corner of shield tunnel in engineering case 1

图 7 为本文方法计算得到的盾构隧道环间剪切力值。如图所示：盾构隧道环间剪切力值的变化规律和隧道错台量的变化规律一致。剪切力最大值为 795.34 kN，发生在隧道错台量最大的位置。

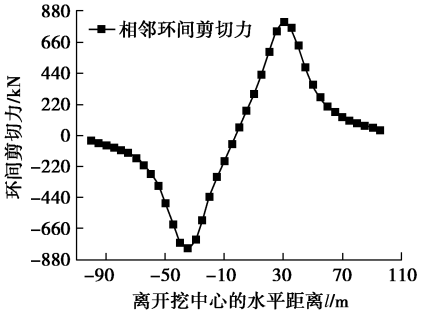



图 7 工程实例1中的隧道环间剪切力

Fig. 7 Shearing forces between shield tunnel rings in engineering case 1

### 4.2 基坑工程案例 2

邻近上海地铁 1 号线某基坑[27]平面开挖尺寸 $L$=70 m，$B$=42 m。开挖深度 $d$=10 m，地铁 1 号线位于该基坑旁侧，与基坑围护结构的净距 $s$=7.2 m，可简化为隧道与基坑东北侧围护结构平行。盾构隧道衬砌：$D$=6.2 m，$D_t$=1.2 m，$k_t$=7.45×10$^5$ kN/m，$k_T$=1.94×10$^6$ kN/m，$E_tI_t$=1.1×10$^8$ kN·m$^2$。隧道埋深为 10.1 m，根据工程地质情况，土体重度取加权平均值 $\gamma$ =18.2 kN/m$^3$，土的泊松比 $\mu$=0.35。土体压缩模量 $E_s$=7.35 MPa。与案例 1 相同，预测过程中取 $\beta$ =25%。

图 8 为本文方法计算的隧道水平位移与实测数据的对比曲线，如图，本文计算结果与实测结果吻合，此时的刚体转动效应比例系数 $j$=0.1，即盾构隧道管片环刚体转动引起的水平位移变形占 10%，管片环错台引起的隧道水平位移占 90%，这与案例 1 隧道的水平位移模式相同，都是以错台变形为主，转动变形为辅。由图可知，计算的最大水平位移为 3.90 mm，实测的最大水平位移为 3.66 mm。隧道水平位移呈现正态分布，隧道中心处的水平位移较大，两边依次递减。

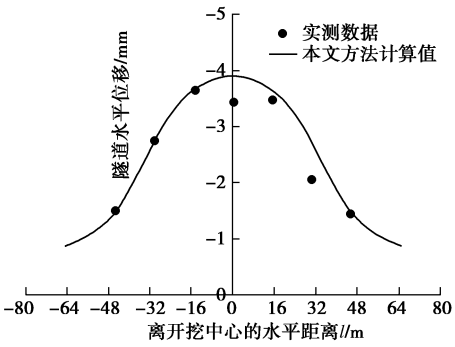



图 8 工程实例2隧道水平位移对比

Fig. 8 Comparison of horizontal displacements of shield tunnel in engineering case 2

图 9 为本文方法计算的盾构管片错台量和环间转角。如图所示，水平位移最大处的管片错台量和环间转角基本等于零，最大管片错台量和环间转角发生在水平位移曲线的反弯点处，最大值分别为 0.413 mm 和 0.0382°。图 10 为本文方法计算的环间剪切力值，最大值为 307.56 kN。管片错台量、环间转角和环间剪切力值的变化规律同案例 1，这里不再赘述。

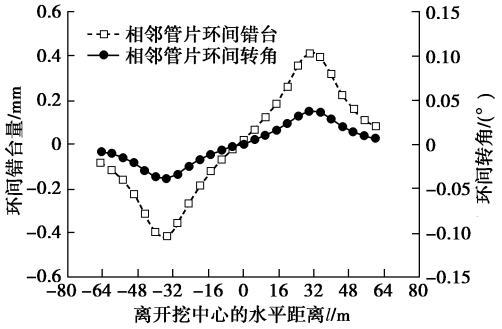



图 9 工程实例2的隧道环间错台量和环间转角

Fig. 9 Dislocation platform and corner of shield tunnel in engineering case 2

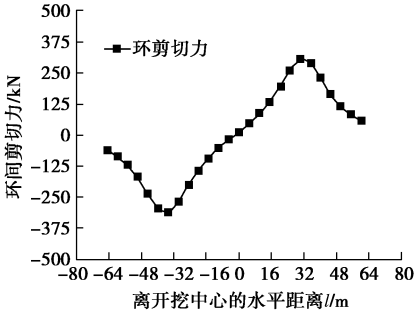



图 10 工程实例2中的隧道环间剪切力

Fig. 10 Shearing forces between shield tunnel rings in engineering case 2

## 5 结　　论

（1）本文建立了一种综合考虑刚体转动效应和剪切错台效应的隧道变形模式，将隧道纵向变形看作是在剪切错台变形的基础上发生刚体转动。通过对两个工程实例的计算并与实测数据进行对比，验证了本文方法的正确性。

（2）两个案例中基坑底部卸荷效应对旁边隧道水平位移的影响非常小；邻近并平行于盾构隧道的基坑侧壁的卸荷效应对旁边隧道的影响最大，并且占有极大的比重；隧道水平位移最大值附近的管片基本不发生错台变形和刚体转动变形，环间剪切力值也很小；而在隧道水平位移的反弯点处，隧道的剪切错台量、环间转角和环间剪切力值达到最大。

（3）通过对案例的分析发现：在计算基坑开挖引起旁侧的隧道水平位移时，刚体转动效应比例系数 $j$ 的取值为 0.1 左右。这表示基坑开挖引起旁侧隧道的水平位移变形模式以为管片环间错台变形为主，约占隧道水平位移的 90%，管片环转动变形为辅，仅占总

水平位移的 10%左右。

本文在计算坑底卸荷与侧壁卸荷对邻近地铁隧道的影响时，采用了平均侧摩阻力和应力线性分布的简化，与实际情况有一定差距；侧壁卸载的大小和分布形式与较多因素有关，侧壁卸载系数$\beta$的取值需作进一步研究；本文在考虑剪切错台效应和刚体转动效应对隧道纵向变形影响时，简单的将两者视为线性叠加关系，进一步研究中可以考虑两种变形的耦合作用。

## 参考文献：


[1] 杭州杭港地铁有限公司. 杭州地铁 1 号线地铁保护区巡查月度报告[R]. 杭州: 杭州杭港地铁有限公司, 2014. (Hangzhou Hangzhou-Hong Kong MTR Corporation. Limited monthly report of Metro Line 1 inspection of Hangzhou Metro Line[R]. Hangzhou: Hangzhou Hangzhou-Hong Kong MTR Corporation, 2014. (in Chinese))

[2] 上海市市政工程管理局. 上海市政法(94)第 854 号上海市地铁沿线建筑施工保护地铁技术管理暂行规定[S]. 上海: 上海市市政管理局, 1994. (Shanghai Municipal Engineering Administration. Interim provisions of Shanghai Municipality on the administration of the technical management of subway construction and protection of Shanghai Metro Line 854th(94)[S]. Shanghai: Shanghai Municipal Engineering Administration (notice), 1994. (in Chinese))

[3] 刘庭金. 基坑施工对盾构隧道变形影响的实测研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, **27**(增刊 2): 3393－3400. (LIU Ting-jin. Study on shield tunnel deformation due to foundation pit construction[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, **27**(S2): 3393－3400. (in Chinese))

[4] 魏 纲, 李 钢, 苏勤卫. 基坑工程对运营地铁隧道影响的实测分析[J]. 现代隧道技术, 2014, **51**(1): 179－185. (WEI Gang, LI Gang, SU Qin-wei. Analysis of the influence of foundation pit construction on an operating metro tunnel based on field measurement[J]. Modern Tunnelling Technology, 2014, **51**(1): 179－185. (in Chinese))

[5] 王卫东, 吴江斌, 翁其平. 基坑开挖卸载对地铁区间隧道影响的数值模拟[J]. 岩土力学, 2004, **25**(增刊 2): 251－255. (WANG Wei-dong, WU Jiang-bing, WEN Qi-ping, et al. The impact of excavation unloading on metro tunnel numerical simulation[J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, **25**(S2): 251－255. (in Chinese))

[6] CHEN R P, MENG F Y, LI Z C, et al. Investigation of response of metro tunnels due to adjacent large excavation and protective measures in soft soils[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2016(58): 224－235.

[7] 张治国, 张孟喜, 王卫东. 基坑开挖对临近地铁隧道影响的两阶段分析方法[J]. 岩土力学, 2011, **32**(7): 2085－2092. (ZHANG Zhi-guo, ZHANG Meng-xi, WANG Wei-dong. Two-stage analysis method of foundation pit excavation on adjacent metro tunnel[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, **32**(7): 2085－2092. (in Chinese))

[8] 姜兆华, 张永兴. 基坑开挖对邻近隧道纵向位移影响的计算方法[J]. 土木建筑与环境工程, 2013, **35**(1): 7－11, 39. (JIANG Zhao-hua, ZHANG Yong-xing. Calculation method of the influence of excavation on the longitudinal displacement of adjacent tunnel[J]. Journal of Civil, Architectrual & Environment Engineering, 2013, **35**(1): 7－11, 39. (in Chinese))

[9] 陈 郁, 李永盛. 基坑开挖卸荷引起下卧隧道隆起的计算方法[J]. 地下空间与工程学报, 2005, **1**(1): 91－94. (CHEN Yu, LI Yong-sheng. Calculation of tunnel heaving due to unloading of pit excavation[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2005, **1**(1): 91－94. (in Chinese))

[10] 黄 栩, 黄宏伟, 张冬梅. 开挖卸荷引起下卧已建盾构隧道的纵向变形研究[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(7): 1241－1249. (HUANG Xu, HUANG Hong-wei, ZHANG Dong-mei. Longitudinal deflection of existing shield tunnels due to deep excavation[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(7): 1241－1249. (in Chinese))

[11] ZHANG J F, CHEN J J, WANG J H, et al. Prediction of tunnel displacement induced by adjacent excavation in soft soil[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2013(36): 24－33.

[12] 梁发云, 褚 峰, 宋 著, 等. 紧邻地铁枢纽深基坑变形特性离心模型试验研究[J]. 岩土力学, 2012, **33**(3): 657－664. (LIANG Fa-yun, CHU Feng, SONG Zhu, et al. Centrifugal model test research on deformation behaviors of deep foundation pit adjacent to metro stations[J]. Rock and Soil Mechanics, 2012, **33**(3): 657－664. (in Chinese))

[13] 王 涛, 李 浩, 徐日庆. 上方大面积加(卸)载引起盾构隧道的变形分析[J]. 现代交通技术, 2008, **5**(3): 29－31, 57. (WANG Tao, LI Hao, XU Ri-qing. Analysis of deformation of shield tunnel when vertical loading and unloading[J]. Modern Transportation Technology, 2008, **5**(3): 29－31, 57. (in Chinese))

[14] 王如路. 上海地铁盾构隧道纵向变形分析[J]. 地下工程与隧道, 2009(4): 1－6. (WANG Ru-lu. Longitudinal

deformation analysis for Shanghai subway tunnel constructed by shield method[J]. Underground Engineering and Tunnels, 2009(4): 1－6. (in Chinese))

[15] 周顺华, 何　超, 肖军华. 环间错台效应下基坑开挖引起临近地铁盾构隧道变形的能量计算法[J]. 中国铁道科学, 2016, **37**(3): 53－60. (ZHOU Shun-hua, HE Chao, XIAO Jun-hua. Energy method for calculating deformation of adjacent shield tunnels due to foundation pit excavation considering step between rings[J]. China Railway Science, 2016, **37**(3): 53－60. (in Chinese))

[16] 魏　纲, 赵城丽. 基坑开挖引起临近地铁隧道的附加荷载计算方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2016, **35**(增刊 1): 3408－3417. (WEI Gang, ZHAO Cheng-li. Calculation method of additional load caused by excavation of foundation pit adjacent to metro tunnel[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2016, **35**(S1): 3408－3417. (in Chinese))

[17] 王如路. 上海软土地铁隧道变形影响因素及变形特征研究[J]. 地下工程与隧道, 2009(1): 1－6. (WANG Ru-lu. Longitudinal deformation and deformation influenencing factors analysis for Shanghai subway tunnel constructed by shield method[J]. Underground Engineering and Tunnels, 2009(1): 1－6. (in Chinese))

[18] 林永国, 廖少明, 刘国彬. 地铁隧道纵向变形影响因素的探讨[J]. 地下空间, 2000, **20**(4): 264－267. (LIN Yong-guo, LIAO Shao-ming, LIU Guo-bin. Investgation on micro-mechanism for damage of contaminated soil by landslide[J]. Underground Space, 2000, **20**(4): 264－267. (in Chinese))

[19] 魏新江, 洪文强, 魏　纲, 等. 堆载引起临近地铁隧道的转动与错台变形计算[J]. 岩石力学与工程学报, 2018, **37**(5): 1281－1289. (WEI Xin-jiang, HONG Wen-qiang, WEI Gang, et al. Rotation and shearing dislocation deformation of subway tunnels due to adjacent ground stack load[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2018, **37**(5): 1281－1289. (in Chinese))

[20] 刘国彬, 侯学渊. 软土基坑隆起变形的残余应力分析法[J]. 地下工程与隧道, 1996(2): 1－7. (LIU Guo-bin, HOU Xue-yuan. Residual stress analysis method of foundation pit in soft soil foundation pit[J]. Underground Engineering and Tunnels, 1996(2): 1－7. (in Chinese))

[21] 刘晓强, 梁发云, 张　浩, 等. 隧道穿越引起地下管线竖向位移的能量变分分析方法[J]. 岩土力学, 2014, **35**(增刊 2): 217－222, 231. (LIU Xiao-qiang, LIANG Fa-yun, ZHANG Hao. Energy variation analysis method for vertical displacement of underground pipeline caused by tunnel crossing[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, **35**(S2): 217－222, 231. (in Chinese))

[22] 郭　乐, 杨新安, 邱　龑. 盾构管片衬砌纵向非均质等效连续模型[J]. 城市轨道交通研究, 2017, **20**(4): 17－22. (GUO Le, YANG Xin-an, QIU Yan. Longitudinal heterogeneous equivalent continuous model for stagger joint segmental lining[J]. Urban Mass Transit, 2017, **20**(4): 17－22. (in Chinese))

[23] VESIC A B. Bending of beams resting on isotropic elastic solids[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1961, **87**(2): 35－53.

[24] 叶　飞, 何　川, 朱合华, 等. 考虑横向性能的盾构隧道纵向等效刚度分析[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(12): 1870－1876. (YE Fei, HE Chuan, ZHU He-hua, et al. Longitudinal equivalent rigidity analysis of shield tunnel considering transverse characteristics[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(12): 1870－1876. (in Chinese))

[25] 魏　纲, 厉　京, 宣海力, 等. 大型深基坑开挖对旁边地铁盾构隧道影响的实测分析[J]. 铁道科学与工程学报, 2018, **15**(3): 718－726. (WEI Gang, LI Jing, XUAN Hai-li, et al. Monitoring data analysis on the influence of large deep foundation pit excavation on nearby metro shield tunnel[J]. Journal of Railway Science and Engineering, 2018, **15**(3): 718－726. (in Chinese))

[26] 孙廉威, 秦建设, 洪　义, 等. 地面堆载下盾构隧道管片与环缝接头的性状分析[J]. 浙江大学学报（工学版）, 2017, **51**(8): 1509－1518. (SUN Lian-wei, QIN Jian-she, HONG Yi, et al. Shield tunnel segment and circumferential joint performance under surface surcharge[J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2017, **51**(8): 1509－1518. (in Chinese))

[27] 邵　华, 王　蓉. 基坑开挖施工对邻近地铁影响的实测分析[J]. 地下空间与工程学报, 2011, **7**(增刊 1): 1403－1408. (SHAO Hua, WANG Rong. Monitoring data analysis on influence of operating metro tunnel by nearly excavation construction[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2011, **7**(S1): 1403－1408. (in Chinese))