

DOI: 10.11779/CJGE2016S1009

基于最大熵原理的土工膜与垫层颗粒间接触力 随机状态分析

姜晓桢¹, 束一鸣²

(1. 南京水利科学研究院岩土工程研究所, 江苏 南京 210024; 2. 河海大学水利水电学院, 江苏 南京 210098)

摘要: 土石坝坝面防渗土工膜与其下的垫层颗粒间接触状态存在较大的随机性和无序性, 一直是定量分析土石坝面防渗结构可靠性的难点。基于最大熵原理对土工膜与垫层颗粒之间接触力随机状态进行了分析演绎, 提出了一种研究不同垫层颗粒状态(粒径级配、尖锐程度等)、不同压力条件下土工膜与垫层颗粒间接触力大小分布的数学方法, 利用该方法分别从理论上推导出了土工膜与均一圆球颗粒垫层之间接触力大小概率密度分布函数以及土工膜与级配圆球颗粒垫层之间的接触力大小概率密度分布函数, 理论推导表明在垫层颗粒随机排布的条件下, 土工膜与垫层颗粒间接触力大小分布满足以压力和单位面积接触点数为参数的指数分布规律, 最后通过室内试验, 利用压敏纸测量了上述两种垫层颗粒与土工膜之间的接触力大小, 统计每个接触点上接触力后发现与理论推导的结果基本一致。

关键词: 土工膜; 垫层颗粒; 接触力; 随机分析

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2016)S1-0049-07

作者简介: 姜晓桢(1985-), 男, 博士, 主要从事土工合成材料工程应用等方面的工作。E-mail: xzjiang@nhri.cn。

Stochastic analysis of contact force between geomembrane and particle underlayer based on principle of maximum entropy

JIANG Xiao-zhen¹, SHU Yi-ming²

(1. Department of Geotechnical Engineering, Nanjing Hydraulic Research Institute, Nanjing 210024, China; 2. College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: In order to quantitatively analyze the reliability of geomembrane surface barrier on rockfill dam, a stochastic method based on the principle of the maximum entropy is employed to analyze the random contact between geomembrane and particle underlayer. The distribution of contact force between geomembrane and particle underlayers with different particle sizes and sharpnesses under different pressures can be obtained theoretically using this method. Two simple cases are also given to show the detailed process of mathematical derivation of this method. The distribution of contact force is exponential according to the proposed method, and the particle size and pressure are the most two important factors to affect the distribution of contact force. The proposed method is then verified by a series of laboratory experiments using the pressure-sensitive film, and it is a reliable tool to measure the contact force at each contact point. The results show that the distribution of contact force from the proposed method is in good agreement with the test data.

Key words: geomembrane; particle underlayer; contact force; stochastic analysis

0 引言

以高分子聚合物制成的土工膜(geomembrane)作为土石坝的防渗材料较传统的混凝土和黏土材料来说具有防渗性能优越、适应坝体变形能力强、造价低廉、施工简捷等优点, 已经逐渐被工程界所认可和采用^[1-4]。由于其属于柔性材料, 通常情况下必须与其他工程材料一起组成一定的防渗结构体来发挥作用, 其中土工膜下部铺设的垫层最为关键。垫层除了起到传递水压力荷载的作用外, 还必须具有良好的渗透性,

以便能在水位骤降等条件下及时有效地排出坝体内渗透水, 提高防渗结构的稳定性。颗粒材料或颗粒聚合物由于孔隙大具有良好的渗透性能非常适合用来作为土石坝面防渗结构的垫层^[5], 但是由于颗粒体材料或颗粒体聚合物表面并不平整, 在水压力作用下, 土工膜会顺着垫层中某些突出颗粒或颗粒间隙发生局部

基金项目: 国家自然科学基金项目(51379069); 中央级公益性科研院所基本科研业务费专项资金项目(15Y315014)

收稿日期: 2015-11-30

的变形, 当水压力过大或垫层表面较粗糙(局部凹凸度较大)时, 土工膜就容易在颗粒间隙内发生水力顶破或被突出颗粒刺破, 从而导致防渗结构安全性降低甚至失去防渗功能。

围绕土工膜在工程应用中所存在顶破和刺破的破坏形式, 目前使用的《土工合成材料测试规程》SL/T235—1999 提出了 3 种标准试验来定性地衡量土工膜抵抗顶破和刺破破坏的能力, 即胀破试验、CBR 顶破试验、刺破试验^[6]。这 3 种试验由于是标准试验, 所以试验中采用的试样、夹具以及顶杆的尺寸是一定的, 而实际上垫层表面的颗粒堆积排布以及颗粒的粒径、尖锐程度等是无序和随机的, 即当防渗结构承受一定的水压力时, 土工膜与垫层颗粒间的接触力大小是不确定的。因此, 规范中的试验中所得出的土工膜抵抗顶破和刺破的能力实际上只能用来定性地比较不同土工膜产品之间的抗顶破和刺破的性能优劣, 而无法对实际工程中该类问题的进行定量的可靠性分析。

1 土工膜与垫层颗粒接触随机状态理论分析

1.1 理论分析背景

图 1 显示了 3 种土工膜与散粒体颗粒相接触的情形, 图中颗粒体的颗粒均为圆形颗粒, 当然实际情况下, 颗粒体颗粒的形状往往并不都是圆形, 本文在此处为了分析和说明的方便做了一定的简化处理。从图 1 中可以观察到, 无论颗粒是紧密排列还是松散排列, 只要是按一定规则进行堆积和排布的, 其与土工膜的接触点的间距都是一样的。当颗粒紧密排列时, 由于单位面积上分担压力 P 的接触点较多, 所以每个接触点上的接触力必然小; 当颗粒排列较松散时, 单位面积上分担压力的接触点变少, 所以每个接触点上的接触力也变大, 而且只要颗粒是规则排列的, 当压力一定时, 土工膜与散粒体颗粒间的接触力就是一个唯一确定的量。当颗粒排列不规则时, 由于接触点的分布变得不均匀, 有的区域接触点较多, 接触力自然就小, 而有的区域接触点少, 接触力就较大, 因此当颗粒排列不规则时, 土工膜与散粒体颗粒之间的接触力就不再是一个唯一确定的量, 而是变成了一个不确定的随机变量。既然土工膜与散粒体颗粒之间的接触力是一个随机变量, 则分析问题的方法就不能用传统的确定性问题中的分析方法来分析, 而是应该采用不确定性问题的分析眼光来看待问题。

对于颗粒与土工膜接触问题的随机分析, 已有一些颗粒材料的细观研究成果为本文的理论研究提供了思路和方向。WANG 等对紧密的颗粒材料所形成的

力链进行了试验研究发现颗粒体间的接触力大小分布近似符合指数分布^[7]。Chan 等通过离散元方法模拟了二维的低密度的颗粒体材料的受压情况, 分析了其中随机的细观结构的分布情况^[8]。Rothenburg 等从细观力学的角度对颗粒材料准静态变形的熵进行了定义^[9]。Ngan 等还分析了静态颗粒材料的力学统计与热力学第二定律之间的相关性, 给出了从熵的角度来研究颗粒材料颗粒间随机接触状态的分析思路^[10]。为了定量描述一个随机过程的不确定性, 信息论之父 Shannon 在 1948 年发表的论文《通信的数学理论》^[11]一文中, 借鉴了热力学的概念, 把随机过程的不确定性也定义为“熵”, 称作“信息熵”, 并给出了计算随机变量信息熵的数学表达式, 对于离散型随机过程变量 X 的不同取值, 如果其概率密度分布函数为 $p(x)$, 那么其熵 H 的计算公式如下:

$$H = -\sum_r^n p(x_r) \ln(p(x_r)) \quad , \quad (1)$$

如果随机变量 X 为连续型变量, 则其熵的计算公式如下:

$$H = -\int p(x) \ln(p(x)) dx \quad . \quad (2)$$

根据式 (1) 和式 (2) 可定义土工膜与垫层颗粒之间的接触力随机变量为 f_c , 其概率密度分布函数为 $p(f_c)$, 则其熵的计算公式如下:

$$H = -\int_0^{+\infty} p(f_c) \ln(p(f_c)) df_c \quad . \quad (3)$$

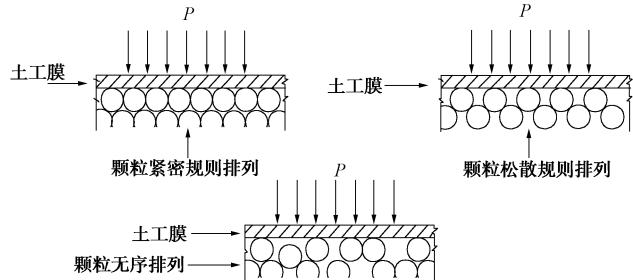


图 1 土工膜与垫层颗粒接触特点分析

Fig. 1 Illustrations of contacts between geomembrane and particle underlayer

通过分析式 (3) 可以发现接触力随机变量 f_c 的取值可以是 0 到 $+\infty$ 之间任意的数值, 且其取某一个特定值的可能性大小由其概率密度函数 $p(f_c)$ 来确定, 而 $p(f_c)$ 的取值范围为 0 到 1 之间, 所以 H 的取值势必大于或等于 0, 而且仅当 $p(f_c)$ 恒等于 1 时, 即 f_c 只有一种可能的取值时, 该随机变量的熵才为 0。此时就如图 1 中所示, 颗粒按序排布, 每个颗粒与土工膜的接触力都相同, 接触力这个随机变量成为一个确定的量。而实际上垫层颗粒的排布是无序随机的, 说明其熵一定是大于 0 的, 而且随着无序的程度越大,

熵也就越大。上述观点可反过来推论, 如果颗粒体垫层在施工过程中只要遵循了随机的原则, 未对垫层颗粒进行特定的人工排布和筛选, 那么接触力的熵值势必取为最大值。根据上述分析, 可将垫层颗粒与土工膜接触力随机状态的分析转化为一个求取最大熵值的数学问题, 即在某些特定条件下, 概率分布函数 $p(f_c)$ 为取为何种函数时, 熵值 H 取得最大值。

1.2 接触力随机变量概率分布函数推导

(1) 均一圆球颗粒条件下接触力随机变量概率分布

土工膜与均一圆球颗粒接触的情形与图 1 中所描述的相同, 由于圆球颗粒的粒径相同, 造成接触力大小不一的原因就只是颗粒排布和堆积的无序性和随机性。根据力平衡原理可知, 接触力之和需与土工膜上施加的均布压力 P 相等, 在单位面积上即可按下式表达:

$$\int_0^{+\infty} f_c N_c p(f_c) df_c = P \quad , \quad (4)$$

其中, N_c 为单位面积上的接触点个数, 同时由于概率密度函数的定义, 其自身还需满足如下条件:

$$\int_0^{+\infty} p(f_c) df_c = 1 \quad , \quad (5)$$

即概率分布函数在其取值范围内积分等于 1。

通过上文的叙述, 均一圆球颗粒条件下, 接触力随机变量概率分布函数 $p(f_c)$ 须满足式 (4) 和 (5) 的约束条件要求, 同时还需令式 (3) 取到最大值。通过拉格朗日乘子法^[12]进行泛函的极值分析可得到 $p(f_c)$ 的具体表达式, 过程如下:

a) 构造泛函 F , 如下式

$$F = - \int_0^{+\infty} p(f_c) \ln(p(f_c)) df_c + A_1 \left[\int_0^{+\infty} p(f_c) df_c - 1 \right] + A_2 \left[\int_0^{+\infty} f_c N_c p(f_c) df_c - P \right] \quad . \quad (6)$$

通过观察 F 的表达式可知, F 的首项为随机变量的熵, 后两项为式 (4) 和式 (5) 所代表的约束条件, A_1 和 A_2 为待定参数, F 的后两项始终等于 0, 即 F 取到极值时, 随机变量的熵 H 也取到极值。

b) 求泛函 F 对函数 $p(f_c)$ 的变分, 并根据极值原理, 当变分值为 0 时, 泛函 F 取到最大值, 具体如下式:

$$\delta p(f_c) \left[\int_0^{+\infty} -(\ln(p(f_c)) + 1) df_c + \int_0^{+\infty} A_1 df_c + \int_0^{+\infty} A_2 N_c f_c df_c \right] = 0 \quad , \quad (7)$$

由于 $\delta p(f_c)$ 的任意性, 要是式 (7) 恒等于 0, 则需令式 (7) 中 $\delta p(f_c)$ 后括号内部分恒等于 0 由此可得

$$A_1 + A_2 N_c f_c - \ln(p(f_c)) - 1 = 0 \quad , \quad (8)$$

由此可得出 $p(f_c)$ 的表达式如下:

$$p(f_c) = e^{A_1 - 1 + A_2 N_c f_c} \quad . \quad (9)$$

c) 将式 (9) 回代入式 (4) 和 (5) 中求得待定系数 A_1 和 A_2 的具体数值如下:

$$A_1 = \ln \left(\frac{N_c}{P} \right) + 1 \quad , \quad (10)$$

$$A_2 = -\frac{1}{P} \quad . \quad (11)$$

最终得出 $p(f_c)$ 的表达式为

$$p(f_c) = \frac{N_c}{P} e^{-\frac{N_c}{P} f_c} \quad . \quad (12)$$

根据式 (12) 可知, 均一圆球颗粒条件下土工膜与垫层颗粒之间的接触力分布理论上应该符合指数分布, 其中单位面积上的接触点个数 N_c 与土工膜上压力 P 为分布函数的两个参数。

(2) 级配圆球颗粒条件下接触力随机变量概率分布

上文中对均一圆球颗粒的情况下土工膜与散粒体颗粒接触力大小分布进行了分析, 事实上由均一粒径颗粒组成的散粒体比较少见, 比较多见的是由多种不同粒径颗粒组成的具有一定级配的颗粒垫层。所以有必要在均一圆球颗粒的基础上, 对具有一定级配的圆球颗粒垫层进行分析, 以讨论颗粒粒径对接触力大小概率分布的影响。

当需要考虑颗粒粒径的影响时, 接触力大小的概率密度函数就不再是简单的单随机变量函数, 而是一个考虑颗粒粒径和接触力大小的双随机变量函数, 即 $p(r, f_c)$, 其中 r 为圆球颗粒粒径。假设垫层颗粒圆球半径大小从 R_{\min} 到 R_{\max} 连续分布依然根据上文中采用拉格朗日乘子法求取概率分布函数, 级配圆球颗粒条件下双随机变量函数所需满足的约束条件也较均一圆球颗粒条件下的要复杂, 具体如下:

$$\int_0^{+\infty} \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} p(r, f_c) dr df_c = 1 \quad , \quad (13)$$

$$\int_0^{+\infty} \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} N_c f_c p(r, f_c) dr df_c = P \quad , \quad (14)$$

$$\int_0^{+\infty} \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} N_c \pi r^2 p(r, f_c) dr df_c = 1 - \nu_{2d} \quad , \quad (15)$$

$$\int_0^{+\infty} \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \left(\pi r^2 - \frac{1 - \nu_{2d}}{N_c} \right) \left(f_c - \frac{P}{N_c} \right) p(r, f_c) dr df_c = \varepsilon \quad . \quad (16)$$

式 (13) 和 (14) 与式 (4) 和式 (5) 所代表的约束条件相同, 即概率密度函数在取值范围内积分等于 1 以及单位面积上接触力之和等于膜上压力。式 (15) 代表了单位面积上接触颗粒所占的面积之和恒定, 其中 ν_{2d} 为单位面积上垫层与膜接触面上空隙率。

式(16)中 ε 为随机变量 r 和 f_c 的协方差,它代表了颗粒粒径与接触力大小两个随机变量之间的相关关系。由于在级配圆球颗粒组成的散粒体中,粒径大的颗粒所占的空间也大,这势必造成大颗粒周围的间隙较大,而小颗粒周围的间隙较小,所以在大颗粒与土工膜接触的区域,就会更容易出现较大的接触力,而小颗粒与土工膜接触的区域,更多地出现的是小接触力,换句话来说,颗粒粒径与接触力大小具有某种天然的特定相关性,这其实也是一种约束条件,而且往往容易被人们所忽略。根据概率论和数理统计中关于随机变量之间相关性的定义,用于描述两个随机变量之间相关性的量可由两者的协方差来表示^[13],所以式(16)采用颗粒所占的面积与接触力大小之间的协方差为一个常量来表示颗粒粒径对接触力大小分布的约束作用。

在式(13)~(16)这4个约束条件下,随机变量又自然满足最大熵原理,同样可以建立熵的泛函,并利用拉格朗日乘子法添加待定参数,并求解出如下的双随机变量概率密度函数:

$$p(r, f_c) = e^{B_1 - 1 + B_2 f_c + B_3 \pi r^2 + B_4 \left(\pi r^2 - \frac{1 - \nu_{2d}}{N_c} \right) \left(f_c - \frac{P}{N_c} \right)}, \quad (17)$$

式中, B_i ($i=1, 2, 3, 4$) 为 4 个待定参数, 可通过将式(17)回代入式(13)~(16)中, 建立 4 个方程联立求解。根据式(17)可以进一步推求出级配颗粒体中任意某一个粒径的颗粒与土工膜接触时其接触力大小的概率分布情况,比如,当 $r=R$ 时,根据条件概率密度函数的公式可得

$$p(f_c)_{r=R} = \frac{p(r, f_c)_{r=R}}{\int_0^{+\infty} p(r, f_c)_{r=R} df_c} = t e^{-tf_c}, \quad (18)$$

其中, t 为与 B_i ($i=1, 2, 3, 4$) 有关的表达式, 其完整形式如下:

$$t = B_4 \frac{1 - \nu_{2d}}{N_c} - B_3 \pi R^2 - B_2, \quad (19)$$

根据式(18)和(19)所示,可知级配颗粒与土工膜之间接触力中某一粒径的颗粒接触力依然满足指数分布的规律。

(3) 任意颗粒条件下接触力随机变量概率分布

根据上文中的推导过程,可以看出,级配圆球颗粒条件下的土工膜与颗粒接触力概率分布情况要比均一圆球颗粒情况复杂得多,虽然式(17)中的4个参数 B_i ($i=1, 2, 3, 4$) 可以通过回代到式(13)~(16)中联立方程求解,但是由于方程组求解过于复杂,所以本文未能从理论上得出完整的解析解。级配圆球颗粒条件下接触力大小概率分布函数的求取方法可以进

一步推广到考虑多种因素共同影响下的接触力大小概率分布情况。假设接触力大小除了与颗粒粒径有关外还与其他 n 个因素有关,其接触力大小的概率分布函数就为多随机变量概率密度函数 $p(x_1, x_2, \dots, x_n, r, f_c)$,由于接触力大小与 n 个因素之间都有一定的相关性,根据两者协方差为常量的条件可以给出 n 个约束条件,同时配合式(13)~(16)的约束条件,并根据最大熵原理可得 n 个因素影响下的接触力多变量概率分布函数为

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n, r, f_c) = e^{B_1 - 1 + B_2 f_c + B_3 + B_4 \left(\pi r^2 - \frac{1 - \nu_{2d}}{N_c} \right) \left(f_c - \frac{P}{N_c} \right) + D^*}, \quad (20)$$

式中, D^* 为考虑其他 n 个因素影响下概率密度分布函数中所增加的部分,其表达式的通式为

$$D^* = \sum_{i=1}^n B_{4+i} (g(x_i) - E(g(x_i))) \left(f_c - \frac{P}{N_c} \right), \quad (21)$$

式中, $g(x_i)$ 为因素 x_i 的某个函数,它代表了该因素是通过某种抽象的物理作用对接触力大小的概率分布产生直接的影响,例如,本文中考虑颗粒粒径因素影响时,是通过颗粒所占面积与接触力产生影响,所以此时 $g(x_i) = \pi x_i^2$ 。 $E(g(x_i))$ 为该因素函数的平均值,它代表了这种抽象物理作用的平均值。同样,所有的 $4+n$ 个待定参数在理论上都可以通过将式(20)回代到 $4+n$ 个约束条件方程中进行联立求解而得,从而使得工程中的所有因素均能得到全面地考量。但是毫无疑问,这个求解待定参数过程是相当复杂的,甚至存在无法求解的情况。所以必须结合实际的工程情况,对相关因素进行取舍。比如,当颗粒体材料中光滑卵石为主要组成部分时,可仅考虑颗粒排布的随机性或者在有条件时额外考虑颗粒粒径的影响,而当颗粒材料中尖锐碎石为主要成分时,则将颗粒尖锐程度,即颗粒形状作为主要的考虑因素来处理。

2 土工膜与垫层颗粒接触力模拟试验

2.1 试验装置和材料

为了验证上述理论推导的准确性,本文对膜与垫层颗粒之间实际的接触力进行了测量和统计。试验装置示意图如图 2 所示,本次试验采用两种玻璃圆球来模拟实际的垫层颗粒,玻璃圆球的粒径分别为 10 mm 和 15 mm,见图 3 所示。本次试验采用具有压敏特性的感压纸(prescale)对颗粒与膜之间的接触力进行测量,其基本的测量原理是通过将接触力转化为不同灰度的压痕,并通过压痕灰度与接触力大小之间的关系,确定每个接触点上的接触力大小。根据本文前期的预试验已先期获得了感压纸压痕灰度与接触力大

小之间的关系^[15], 如图 4 所示。

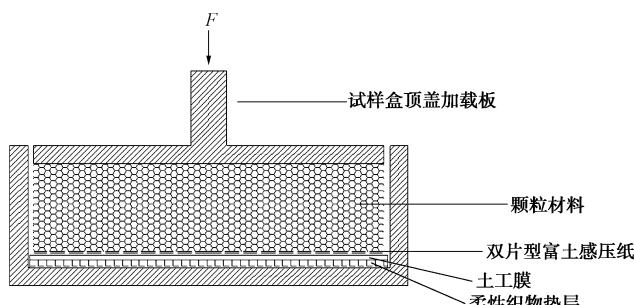


图 2 土工膜与垫层颗粒接触力模拟试验示意图

Fig. 2 Simulation test of contacts between geomembrane and granular materials

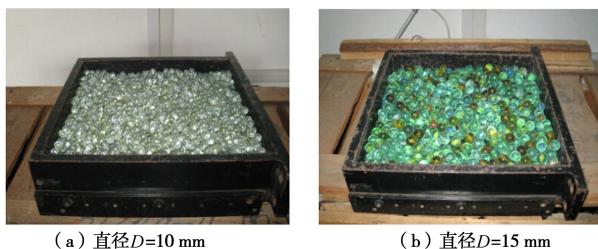


图 3 试验采用的垫层颗粒

Fig. 3 Glass beads used as particle underlayer

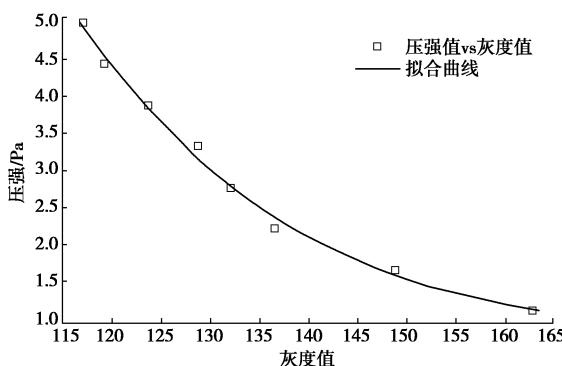


图 4 感压纸压痕灰度与接触力大小之间的关系

Fig. 4 Relationship between gray level and pressure of pressure-sensitive film

本次试验中, 采用直径 10 mm 与 15 mm 的玻璃珠组成的颗粒材料在不同的荷载下进行多组试验, 表 1 中详细列出了这些试验的条件和组别。本次试验中第 1 至 7 组, 均是采用均一颗粒圆球颗粒进行的试验, 但是其所受压力和颗粒半径都不同, 而且感压纸的尺寸也不同, 第 1 至 4 组中感压纸被裁剪成条带状, 并沿着正方形试验盒底部的对角线布置, 第 5 至 7 组感压纸长宽较接近, 布置在试验盒中央, 两种不同的感压纸尺寸和布置方式主要目的是检验试验盒中玻璃珠的散布是否均匀, 同时也可以对试验结果中对接触点位置的随机分布是否具有均匀性进行分析。第 8 组采用了两种粒径混合 (1:1) 的组合圆球颗粒进行试验。

表 1 试验条件和组别编号

Table 1 Summary of simulation test

试验编号	荷载大小/kN	颗粒类型	感压纸区域/(mm×mm)
Test 1	1.5	100% 10 mm	56×214
Test 2	2.5	100% 10 mm	56×214
Test 3	3.5	100% 10 mm	56×214
Test 4	5.5	100% 10 mm	56×214
Test 5	1.5	100% 15 mm	214×270
Test 6	3.5	100% 15 mm	214×270
Test 7	5.5	100% 15 mm	214×270
Test 8	3.5	50% 10mm 50% 15mm	214×270

2.2 接触力的统计与分析

图 5 中左右两幅图分别为试验编号 Test 6 和 Test 7 试验结束后感压纸上接触点的分布情况, 通过观察可以发现图中有红色斑点处即为接触点, 其中接触点位置的分布虽然具有一定的随机性, 但并未出现在某一个区域集中分布或在某一区域特别稀疏的现象, 说明试验中颗粒材料在试验盒中分布较均匀, 同时接触点的大小和颜色深浅具有较明显的无序性和随机性。其余几组试验的感压纸与这两幅图大同小异, 光靠肉眼不能准确识别它们之间的差异, 通过笔者自编的 MATLAB 图像识别程序, 对 8 组试验的接触点个数, 以及每个接触点的接触力进行分析和统计, 接触力的统计累计分布如图 6~8 所示。

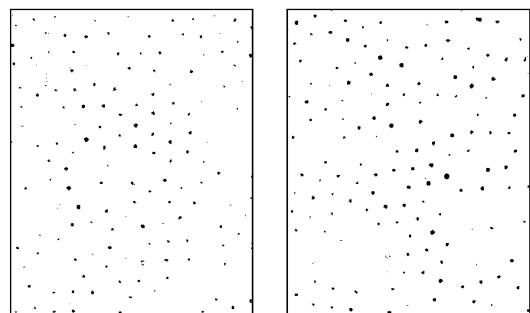


图 5 试验结束后感压纸上接触点的典型分布情况(感压纸尺寸 214 mm×270 mm)

Fig. 5 Distribution of typical contact points of pressure-sensitive film after tests

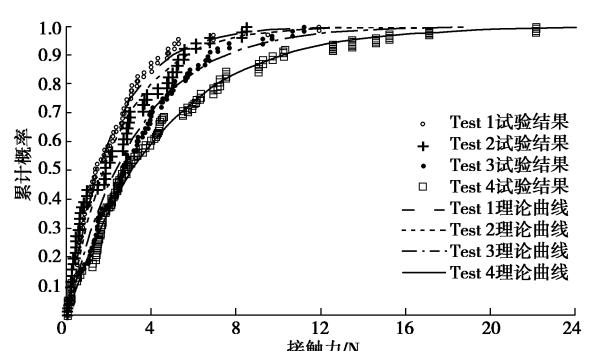


图 6 均一圆球颗粒接触模拟试验结果 (Test 1~4)

Fig. 6 Test results and theoretical curves of contracts using uniform sphere particles (Test 1~4)

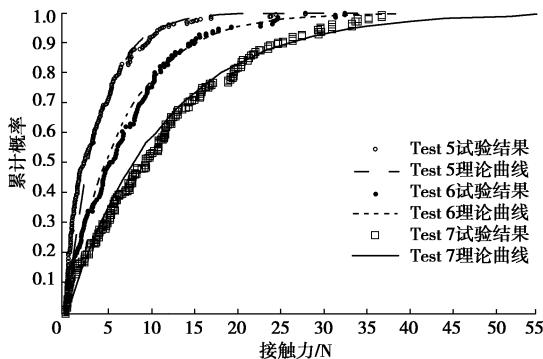


图 7 均一圆球颗粒接触模拟试验结果与理论曲线 (Test 5~7)

Fig. 7 Test results and theoretical curves of contracts using uniform sphere particles (Test 5~7)

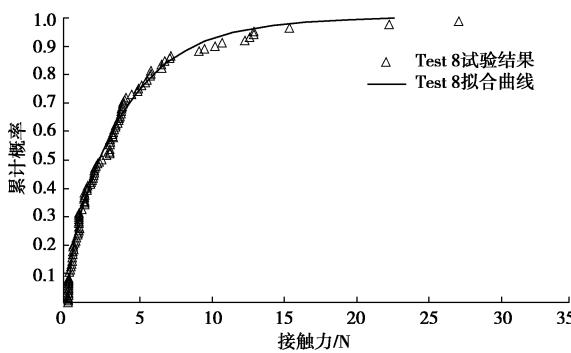


图 8 级配圆球颗粒试验结果及数据拟合结果 (Test 8)

Fig. 8 Test results with grading granular materials of glass beads and curve fitting (Test 8)

表2中详细列出了第1至7组试验中接触点个数, 总接触力和理论模型参数, 并给出了概率累计函数的表达式。由于采用概率密度函数进行验证时, 根据试验结果绘制的频率直方图受其横轴分区大小的影响很大, 所以本文中通过理论模型的概率累计函数与试验结果进行验证, 概率累计函数形式上为概率密度函数的不定积分, 其曲线上一点纵坐标值为随机变量小于该点横坐标值的概率, 同时图6~8中也绘制了理论模型的概率累计函数曲线, 从图6和图7中可以看出无论是直径10 mm的圆球还是直径15 mm的圆球, 本文提出的理论模型都与试验结果比较吻合, 而且当接触点样本容量较大时, 试验结果与理论曲线的吻合程度也越高。

Test 8中散粒体采用的是两种直径的玻璃珠按质量比1:1混合的级配圆球颗粒散粒体, 由于其级配并不是连续的, 所以根据式(18)可求得Test 8的接触力大小概率累计函数形式为

$$F(f_c) = \int_0^{f_c} (p(R_1, f) + p(R_2, f)) df = m_1(e^{n_1 f_c} - 1) + m_2(e^{n_2 f_c} - 1) \quad (22)$$

式中, $F(f_c)$ 为累计概率, R_1 , R_2 分别为Test 8中采用的两种玻璃圆球的半径, m_1 , m_2 , n_1 , n_2 均为对 $p(R_1, f)$, $p(R_2, f)$ 进行不定积分后的参数。从式(22)中可以发现Test 8的试验结果应该符合的概率累计函数的形式为两个指数函数的和, 这可以视为Test 8中两种颗粒各自概率累计函数的和, 而且根据概率累计函数的定义, 当式(22)中随机变量 f_c 取到正无穷时, $F(f_c)$ 应该等于1, 反映到式(22)中, 即参数 m_1 和 m_2 的和应该为-1。

利用曲线拟合方法可以对Test 8中的试验结果按式(22)的函数表达式进行拟合, 同时求出 m_1 , m_2 , n_1 , n_2 这4个参数的值。如图8所示, 根据曲线拟合计算的结果可以发现 m_1 和 m_2 的和为-0.991, 非常接近理论值-1。这也从一定程度上验证了本文中所推导级配圆球颗粒情况下接触力大小概率分布的理论模型。

表2 土工膜与均一圆球颗粒散粒体接触模拟试验结果和理论曲线

Table 2 Test results of contracts using uniform sphere particles

试验 编号	接触 点数	总接触 力/N	N_c/P	理论概率累计函数
Test 1	63	136.2	0.463	$P(f_c) = 1 - e^{-0.463 f_c}$
Test 2	51	124.2	0.411	$P(f_c) = 1 - e^{-0.411 f_c}$
Test 3	68	222.1	0.306	$P(f_c) = 1 - e^{-0.306 f_c}$
Test 4	78	343.1	0.227	$P(f_c) = 1 - e^{-0.227 f_c}$
Test 5	209	769.7	0.272	$P(f_c) = 1 - e^{-0.272 f_c}$
Test 6	135	894.4	0.151	$P(f_c) = 1 - e^{-0.151 f_c}$
Test 7	138	1553.0	0.089	$P(f_c) = 1 - e^{-0.089 f_c}$

3 结 论

(1) 土工膜与垫层颗粒间的接触力由于垫层颗粒分布的不均匀性, 具有很强的随机性, 传统的确定性方法难以对接触力的大小进行科学全面的分析, 对接触力的随机状态进行分析, 为下一步土工膜的抗颗粒顶破刺破安全性的定量分析打下了基础。

(2) 利用最大熵原理并对垫层颗粒的形状进行了假设的基础上, 对接触力大小的随机概率分布情况进行了理论分析, 得出了接触力大小概率随机分布满足指数分布, 较大的接触力出现的概率较低, 同时也推导了级配颗粒以及考虑颗粒形状等其他因素影响下接触力大小概率分布的理论形式, 给出了具体的推导过程。

(3) 通过土工膜垫层与颗粒接触的试验, 利用感压纸测量了接触力的大小, 通过统计分析可知, 试验结果基本与理论模型一致, 验证了理论模型的准确性。

参考文献:

- [1] 束一鸣, 张利新, 袁全文, 等. 西霞院反调节水库土石坝膜防渗工艺[J]. 水利水电科技进展, 2009, 29(6): 70 - 73. (SHU Yi-ming, ZHANG Li-xin, YUAN Quan-yi, et al. Geomembrane seepage control techniques of Xixiayuan earth-rock dam[J]. Advances in Science and Technology of water resources, 2009, 29(6): 70 - 73. (in Chinese))
- [2] DANIEL P, LAURENT P, PATRICE M. Feedback and guidelines for geomembrane lining systems of mountain reservoirs in France[J]. Geotextiles and Geomembranes, 2011, 29(5): 415 - 424.
- [3] CAZZUFFI D. The use of geomembranes in Italian dams[J]. International Water Power & Dam Construction, 1987, 39(6): 17 - 21.
- [4] 李岳军, 周建平, 何世海, 等. 抽水蓄能电站水库土工膜防渗技术的研究和应用[J]. 水力发电, 2006, 32(3): 67 - 69, 80. (LI Yue-jun, ZHOU Jian-ping, HE Shi-hai, et al. Study on and application of geotech-membrane in the leakage prevention works of reservoirs of the pumped storage power station[J]. Water Power, 2006, 32(3): 67 - 69, 80. (in Chinese))
- [5] 滕兆明, 束一鸣, 吴海民, 等. 无沙混凝土垫层配合比及力学性能试验研究[J]. 人民黄河, 2012, 34(10): 139 - 141. (TENG Zhao-ming, SHU Yi-ming, WU Hai-min, et al. Study of test on mixed proportions design and mechanical properties of no fines concrete cushion layer[J]. Yellow River, 2012, 34(10): 139 - 141. (in Chinese))
- [6] 土工合成材料测试规程[S]. 北京: 中国水利水电出版社, 1999: 29 - 33. (Code for test and measurement of geosynthetics[S]. Beijing: China Water&Power Press, 1999: 29 - 33. (in Chinese))
- [7] WANG Deng-ming, ZHOU You-he. Statistics of contract force network in dense granular matter[J]. Particuology, 2010, 8(3): 133 - 140.
- [8] CHAN S H, NGAN A H W. Statistical distribution of forces in stressed 2-D low-density materials with random microstructures[J]. Mechanics of Materials, 2006, 38(8): 1199 - 1212.
- [9] ROTHENBURG L, KRUYT N P. Micromechanical definition of an entropy for quasi-static deformation of granular materials [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2009, 57(12): 634 - 655.
- [10] NGAN A H W. Mechanical analog of temperature for the description of force distribution in static granular packings[J]. Phys Rev E, 2003, 68(20): 1 - 10.
- [11] SHANNON C E. A mathematical theory of communication[J]. Bell System Technical, 1948: 379 - 423.
- [12] BERTSEKAS D P. Nonlinear programming[M]. 2nd ed. Cambridge, MA: Athena Scientific, 1999.
- [13] 刘国祥, 何志芳, 杨纪龙. 概率论与数理统计[M]. 兰州: 甘肃教育出版社, 2002. (LIU Guo-xiang, HE Zhi-fang, YANG Ji-long. Probability theory and mathematical statistics[M]. Lanzhou: Gansu Education Press, 2002. (in Chinese))

(本文责编 黄贤沙)