

DOI: 10.11779/CJGE201510005

考虑细观单粒强度的堆石料破碎特性研究

迟世春, 王 峰, 贾宇峰, 李士杰

(大连理工大学海岸与近海国家重点试验室, 辽宁 大连 116024)

摘 要: 颗粒破碎是影响堆石料力学性质的主要因素之一, 但由于测试手段的限制, 荷载作用过程中堆石的颗粒破碎难以实时度量, 因而影响堆石料力学特性的深入研究。通过单粒强度试验, 发现同一粒组的堆石料单粒强度较好地服从 Weibull 分布, 而破碎后颗粒的粒径级配曲线基本服从分形分布。在此基础上, 推求了堆石料三轴试验过程中级配的演化过程, 给出了颗粒破碎的实时预测方法, 与三轴试验结果比较, 验证了本文方法的有效性。

关键词: 堆石料; Weibull 分布; 分形破碎; 单粒强度

中图分类号: TU44

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2015)10-1780-06

作者简介: 迟世春(1964-), 男, 山东高密人, 教授, 博士生导师, 从事土石坝工程研究工作。E-mail: schchi@dlut.edu.cn。

Modeling particle breakage of rockfill materials based on single particle strength

CHI Shi-chun, WANG Feng, JIA Yu-feng, LI Shi-jie

(State Key Lab of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The existing researches indicate that the mechanical properties of rockfill materials are significantly affected by the particle crushing. In order to reproduce the fundamental features of particle breakage, the changes of the particle size distribution (PSD) have to be described in mathematical form, i.e., to track the evolution of the PSD. This is difficult for the triaxial test processes due to the measurability limit of particle breakage. The single particle strength of the rockfill is measured and the crushing sample is sieved. The results show that the strengths of particles obey the Weibull statistics, and that the fractal distribution is found for PSD of crushed aggregates. Based on those findings, the changes of PSD can be described during the triaxial test process, the breakage of the triaxial tests is simulated, and the results reveal that the breakage process well agrees with the experimental data.

Key words: rockfill material; Weibull distribution; fractal crushing; single-particle strength

0 引 言

近年来, 中国西南地区兴建了一批高土石坝。随着土石坝坝高的增加, 堆石颗粒受力不断增大, 超过颗粒自身强度之后, 就会发生颗粒破碎和重组, 在宏观上表现为大坝的沉降与体积变形。堆石变形使坝体堆石料与面板或心墙的变形协调性变差, 恶化了面板或心墙的应力变形性状, 导致面板发生脱空、裂缝、挤碎以及止水破坏, 黏土心墙发生水力劈裂等, 严重影响大坝防渗安全^[1]。

Lee 等^[2]在研究堆石料破碎时, 提出用试验前后特征粒径 d_{15} 的比值来度量破碎; Lade 等^[3]研究了特征粒径 d_{10} 对于沙土渗透系数的影响; Hardin^[4]在总结前人工作的基础上提出用试验前后粒径级配曲线的面积变化来度量破碎。以上研究都是以试验前后粒径级配曲线为依据, 对于试验过程中的堆石料的破碎难以实时度量。

研究堆石料的力学特性, 一般采用室内大三轴试

验和一维固结试验。但由于测试手段的限制, 无法对试验过程中堆石颗粒的破碎情况进行直接与适时地量测, 导致颗粒破碎引起堆石体变形机理的研究难以深入。

本文首先测定堆石料单粒强度, 发现其服从 Weibull 分布。然后筛分并分析颗粒破碎后的粒径分布曲线, 可以看出破碎后颗粒的级配曲线服从分形分布。根据上述试验发现, 可以推求在三轴试验过程中的颗粒级配演化, 从而实现了颗粒破碎的实时预测。

1 堆石料单粒强度试验

1.1 试验材料及过程

试验材料为大连地区某石料厂爆破料, 岩性为石灰岩, 棱角分明。取 40~60 mm、20~40 mm、10~

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51179024, 51379029)

收稿日期: 2015-01-19

20 mm、5~10 mm, 4 组粒径石灰岩, 每组 30 颗。

图 1 为堆石料单粒强度试验系统, 颗粒顶、底面采用刚度很大的厚钢板。试验过程相当于上、下平行的刚性平面挤压堆石颗粒, 直至颗粒破碎。参考岩石点荷载试验^[5], 加载时间控制在 60 s 内。

颗粒破碎的判定标准是单粒试验中首先遇到的问题。由于堆石料颗粒棱角分明, 形状不规则, 加载过程中往往伴随着棱角被不断研磨而去掉, 致使测量的力与竖向位移曲线呈逐渐增大的锯齿状, 见图 2。Lee^[6]对不同粒径的 Leighton Buzzard sand 做单粒强度试验, 取力和位移曲线峰值点为颗粒破碎点。Mcdowell 等^[7]测试 16 mm 以下的 Quiou sand 单粒强度, 发现有约 10% 的颗粒的没有明显的主体破坏, 这种情况只能主观判定。主体破坏是指堆石颗粒有贯穿型裂缝或颗粒一分为几块的破坏。

对试验中有明显峰值点的, 取峰值点为颗粒破碎点, 如图 2。对于没有明显峰值点的, 取石块发生主体破坏时所对应的最近折线点为颗粒破碎点。

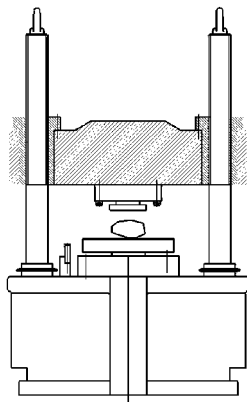


图 1 单粒岩块瞬时强度测试仪器

Fig. 1 Schematic diagram of particle-crushing apparatus

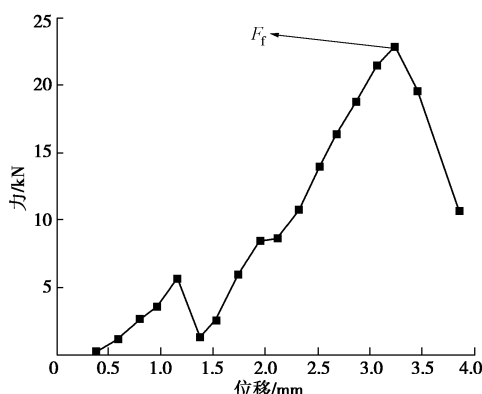


图 2 力和位移曲线

Fig. 2 Particle-crushing load-displacement relationship

1.2 堆石料单粒强度的 Weibull 分布

Jaeger^[8]做沿直径方向岩块压缩破坏试验, 提出颗

粒所受的劈裂应力, 可以由下式表示

$$\sigma_c = \frac{F}{d_0^2} \quad (1)$$

式中 F 为轴向荷载; d_0 为初始粒径, 即上、下挤压钢板的初始距离; σ_c 为颗粒破碎时所受的劈裂应力。Darvell^[9]研究两板压缩试验的圆球颗粒强度时, 发现颗粒是由于圆球中心拉应力而产生破坏, 并且此时用 $\sigma_c = 0.7F/d_0^2$ 劈裂应力计算更合适。这些工作均表明对于两板挤压单个颗粒确定颗粒强度, 采用 F/d^2 来表示颗粒的应力状态是合适的。

Weibull^[10]对多种无机非金属脆性材料的抗拉强度研究后, 提出对于给定体积的材料, 在拉应力作用下, 未被破坏的概率为

$$P_s = \exp \left[- \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_0} \right)^m \right] \quad (2)$$

式中, σ_c 为材料所受拉应力, P_s 为材料未破坏的概率, σ_0 为材料未破坏概率为 37% 时的应力, m 值为 Weibull 模量。

将这一理论应用于颗粒破碎试验, 则 σ_c 为颗粒所受劈裂应力; P_s 为在某一劈裂应力下, 颗粒未破坏的概率; σ_0 为 P_s 取 $1/e$ ($1/e \approx 0.37$) 时对应的颗粒劈裂应力, 也就是颗粒未破碎概率为 37% 时的劈裂应力; m 越大, 颗粒强度的离散程度越小。如图 3 所示, 图中水平轴为当前颗粒劈裂应力与 σ_0 之比, 竖轴为未破碎概率。

对于同一粒组, 这里认为颗粒粒径相同, 对于式 (2) 两边取两次对数, 得

$$\ln \left[\ln \left(\frac{1}{P_s} \right) \right] = m \ln(\sigma_c) - m \ln(\sigma_0) \quad (3)$$

绘制 $\ln(\ln(1/P_s)) - \ln \sigma_c$ 图, 见图 4。由图可以看出, 对于每组石块, 30 个试验数据基本成线性关系, 这说明 4 组试样的单粒强度基本服从 Weibull 分布。

直线斜率的大小, 表示 Weibull 模量 m 值, 如表 1 所示, 4 组试样 m 值的范围为 2~3 之间, 说明颗粒强度的离散程度接近。Nakata 等^[11]测 1.18~1.4 mm 的 Aio Quartz sand 和 Aio Feldspar sand 的 m 值分别为 4.2 和 1.8; Mcdowell^[7]测得的 1, 2, 4, 8, 16 mm 粒径的 Quiou sand 的 m 值为 1.32~1.65 之间。可见 m 值对于不同种岩性的颗粒材料差别较大。而对于一种岩石颗粒的不同尺寸颗粒而言则差别较小。这是因为岩石的破碎主要是由于内部的裂缝发展所致^[7]。从试验结果推断, 大连石灰石颗粒中初始裂缝分布是相似的, 颗粒的粒径大小对裂缝的分布影响较小。对于 4 组粒径测得 σ_0 值, 如表 1 所示。随着粒径的减小, σ_0 在

不断的增大，表明颗粒的强度会随着粒径的减小而变大。即颗粒粒径较小时，裂缝的数目少、长度短，颗粒就相对难以破碎。

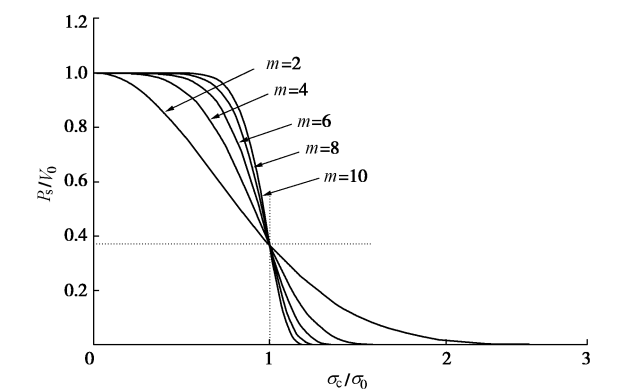


图 3 Weibull 分布曲线图
Fig. 3 Weibull distribution of strength

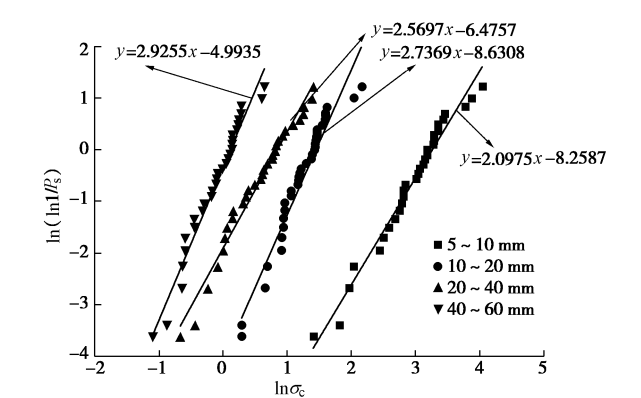


图 4 各组粒径单粒强度的 Weibull 分布图
Fig. 4 Weibull plots for each set of grains

表 1 单粒强度试验的基本参数

Table 1 Parameters of single-particle strength in tests				
粒组/mm	<i>d</i>	<i>m</i> (斜率)	截距	σ_0 /MPa
40~60	50	2.93	0.29	5.50
20~40	30	2.57	6.48	12.43
10~20	15	2.74	8.63	23.33
5~10	7.5	2.10	8.26	51.05

1.3 破碎颗粒的级配曲线

自 Mandelbrot^[12] 20 世纪 70 年代提出分形理论以来，分形数学被广泛用来描述自然界中存在的不规则而外形又自相似的事物，如海岸线、树叶、不规则石块等。Mcdowell^[13]发现均一级配的砂子在一维固结压缩之后，粒径级配曲线服从分形分布，关系如下

$$N(d > d_i) \propto d_i^{-D} \quad (4)$$

式中，*D* 为分形维数，*d* 为颗粒直径，*d_i* 为筛子孔径，*N* 为颗粒个数，对于脆性材料来说，*D* 一般为 2.5^[14]。

Tyler 等^[15]、黄冠华等^[16]提出三维空间中确定土壤

颗粒的分布模型。土体粒组的质量含量百分比和粒径的关系如下

$$P_{d < d_i} = \left(\frac{d_i}{d_{\max}} \right)^{3-D} \quad (5)$$

式中，*d_{max}* 为最大筛子孔径，*P_{d < d_i}* 为粒径小于 *d_i* 的颗粒质量含量百分比。

堆石颗粒的单粒强度试验后，对各粒组进行筛分，其粒径分布曲线如图 5 所示。可以看出在双对数坐标下，粒径粒径分布曲线近似为一直线，且基本平行。但各组试验点在粒径为 1 mm 和 2 mm 之间与直线的拟合稍差，这是因为 2 mm 为圆孔筛，1 mm 为方孔筛，筛孔变化所致。分析 4 个粒组的粒径级配曲线，得到它们均服从分形分布，其分形维数在 2.4~2.5 之间，比较接近。

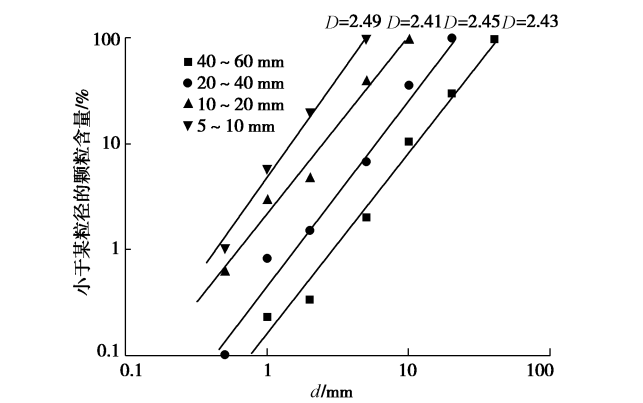


图 5 各组粒径单粒强度试验后的粒径级配曲线
Fig. 5 Particle-size grading curves for each set of grains

2 堆石料大三轴试验

为验证三轴试验过程中颗粒破碎的实时度量效果，需要进行一定的三轴压缩试验。试验仪器为大连理工大学研制的粗粒土大型三轴仪，试样大小为 600 mm×300 mm。试验材料选 20~40 mm 均一粒径的大连石灰石，制样干密度为 1.65 g/cm³。依次通二氧化碳和无气水后，试验前试样饱和度在 95%以上。

每组试样分别在 200，400，600，800 kPa 围压下固结，然后以 2 mm/min 的速率进行轴向剪切，剪切至轴向应变为 15%为止。其中 800 kPa 围压下，进行 4 组试验，分别加载至应力水平达 0.25，0.5，0.75，1.0 为止，试验后烘干试样并进行颗粒筛分。

试验得到的应力应变曲线如图 6 所示，应变体变曲线如图 7 所示。在围压为 200 kPa 时，出现了明显的剪胀，而随着围压的增加，剪胀消失。这是因为围压越大，颗粒破碎越严重，颗粒破碎抑制了剪胀，试样体积变形就由剪胀变为剪缩。

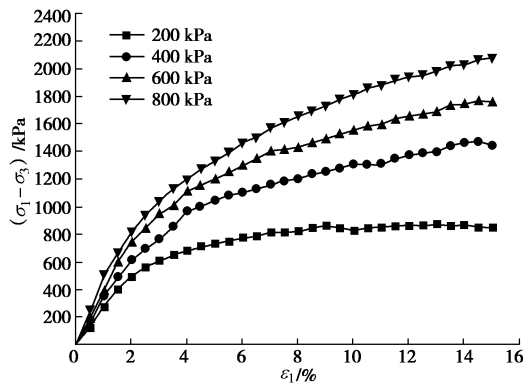


图 6 三轴试验应力应变关系图

Fig. 6 Stress-strain curves of triaxial shear tests

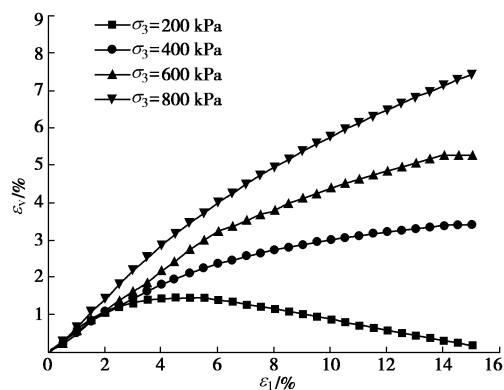


图 7 三轴试验轴向应变体变关系图

Fig. 7 Axial strain-volume strain curves of triaxial shear tests

3 三轴试验粒径级配变化的推求

3.1 三轴试验中颗粒所受的劈裂应力

2013 年, McDowell 等^[17]研究 2 mm silica sand 在一维固结试验过程中的破碎情况时发现, 随着颗粒粒径的减小, 颗粒周围的接触点数也在减少。但对任意颗粒而言, 在与周围颗粒的接触中大于等于该颗粒粒径的接触点数始终在 2 左右。也就是说颗粒的接触点会有多个, 但只有与较大粒径颗粒接触的两个接触点为主力链提供支撑。Barreto^[18]采用离散元对颗粒材料集合体模拟了最终压力为 400 kPa 的各向同性压缩试验, 得到的结论是 80% 的颗粒接触力小于 0.1 N, 只有主力链上的颗粒接触力较大。也正是在主力链上的一对接触力不断增大才使颗粒发生了破碎。因此可以认为堆石料在受力变形的过程中, 颗粒破碎是被周围两个较大的颗粒挤压所致。这个破坏过程与单粒强度试验的破坏机制基本接近。

Nakata^[11]在 1999 年, 提出对于三轴试验中颗粒所受的劈裂应力和试样所受应力的关系为

$$\sigma_c = \sigma_1 \left(\sqrt[3]{\frac{(1+e)\pi}{6}} \right)^2, \quad (6)$$

式中, σ_c 为颗粒所受劈裂应力, σ_1 为三轴试样所受的轴向应力, e 为孔隙比。

式 (6) 将颗粒视作理想的球形, 由于实际颗粒的外形不规则, 需要加一个形状修正系数 η 。三轴试验中常用广义剪应力 q 来替代 σ_1 , 式 (6) 可写为

$$\sigma_c = q\eta \left(\sqrt[3]{\frac{(1+e)\pi}{6}} \right)^2. \quad (7)$$

3.2 堆石料三轴试验粒径分布曲线变化的推求过程

当试验加载前 $q = 0$ 时, 第 i 组的初始粒组质量为 M_{0i} 。

当施加轴向荷载至竖向应力 $q = q_1$, 第 i 组颗粒未发生破碎的堆石质量由式 (7) 代入式 (2) 得

$$M_{li} = \exp \left[- \left(\eta \cdot \frac{q_1}{\sigma_0} \left(\sqrt[3]{\frac{(1+e)\pi}{6}} \right)^2 \right)^m \right] \cdot M_{0i}. \quad (8)$$

M_{li} 为试验至轴向应力 q_1 时, 第 i 组颗粒未发生破碎的堆石质量。发生颗粒破碎的堆石质量为 $M_{0i} - M_{li}$ 。对于这些发生破碎的粒组质量, 按分形分布计入各组。因为第 i 粒组的颗粒破碎后其破碎颗粒的粒径小于第 i 粒组, 因此对于大于等于第 i 粒组的质量贡献为零。对小于第 i 粒组的各粒组分布则服从分形分布, 即

第 $i+1$ 粒组新增的破碎颗粒质量为

$$M_{2(i+1)} = P_{(i+1)i} (M_{0i} - M_{li}). \quad (9)$$

第 $i+2$ 粒组新增的破碎颗粒质量为

$$M_{2(i+2)} = P_{(i+2)i} (M_{0i} - M_{li}). \quad (10)$$

.....

直至最小粒组, 均可计算新增质量。

M_{2i} : 2 表示顺序号, i 表示粒组, 下同。 $P_{(i+1)i}$, $P_{(i+2)i}$... 分别为第 i 粒组的破碎颗粒中, 分配到第 $i+1$, $i+2$ 粒组的颗粒占待分配颗粒的质量含量百分比, 可由式 (5) 求出。表达式如下:

$$P_{(i+1)i} = P_{(d_{i+2} < d < d_{i+1})} = \left(\frac{d_{i+1}}{d_i} \right)^{3-D} - \left(\frac{d_{i+2}}{d_i} \right)^{3-D}, \quad (11)$$

$$P_{(i+2)i} = P_{(d_{i+3} < d < d_{i+2})} = \left(\frac{d_{i+2}}{d_i} \right)^{3-D} - \left(\frac{d_{i+3}}{d_i} \right)^{3-D}. \quad (12)$$

d_i 为筛孔孔径, 取值依次为 60, 40, 20, 10, 5, 2 mm, 这里为表示 0~2 mm 粒组, 取 $d_7 = 0$ 。

根据水利水电工程粗粒土试验规程^[19]将室内试验级配曲线的粒径划分为 6 组, 即 60~40、40~20、20~10、10~5、5~2、2 mm 以下。则试验过程中至轴向应力 q_1 时, 各粒组新增质量可采用如下矩阵式计算得到。

$$\begin{bmatrix} M_{31} \\ M_{32} \\ M_{33} \\ M_{34} \\ M_{35} \\ M_{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{31} & P_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & 0 & 0 & 0 \\ P_{51} & P_{52} & P_{53} & P_{54} & 0 & 0 \\ P_{61} & P_{62} & P_{63} & P_{64} & P_{65} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{01} - M_{11} \\ M_{02} - M_{12} \\ M_{03} - M_{13} \\ M_{04} - M_{14} \\ M_{05} - M_{15} \\ M_{06} - M_{16} \end{bmatrix} \quad (13)$$

这样, 试验至轴向应力 q_1 时, 各粒组的总质量 M_{4i} 为

$$M_{4i} = M_{li} + M_{3i} \quad (i=1, \dots, 6) \quad (14)$$

上式中 M_{3i} 为试验至轴向应力 q_1 时, 第 i 粒组新增加的堆石总质量。

继续进行试验, 至轴向应力 $q = q_2$, 第 i 粒组颗粒未发生破碎的堆石质量 M_{5i} 由下式可得

$$M_{5i} = \exp \left[- \left(\eta \cdot \frac{q_2}{\sigma_0} \left(\sqrt[3]{\frac{(1+e)\pi}{6}} \right)^2 \right)^m \right] \cdot M_{0i} \quad (15)$$

第 i 粒组颗粒发生破碎的堆石质量为 $M_{0i} - M_{5i}$, 破碎颗粒亦按分形分布分配粒组, 可得

$$\begin{bmatrix} M_{61} \\ M_{62} \\ M_{63} \\ M_{64} \\ M_{65} \\ M_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{31} & P_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & 0 & 0 & 0 \\ P_{51} & P_{52} & P_{53} & P_{54} & 0 & 0 \\ P_{61} & P_{62} & P_{63} & P_{64} & P_{65} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{01} - M_{51} \\ M_{02} - M_{52} \\ M_{03} - M_{53} \\ M_{04} - M_{54} \\ M_{05} - M_{55} \\ M_{06} - M_{56} \end{bmatrix} \quad (16)$$

将第 i 粒组未破碎颗粒与新生成颗粒相加, 得试验至应力水平 q_2 时, 各粒组的总质量 M_{7i} 为

$$M_{7i} = M_{5i} + M_{6i} \quad (i=1, \dots, 6) \quad (17)$$

重复上面的步骤即可求得轴向应力为 q_3 时各粒组的颗粒质量。

3.3 推求结果

试验所求参数的结果如表 2 所示, 分形维数和 Weibull 模量取 4 个粒组的试验平均值, 颗粒形状修正系数取 3.0, 试验初始状态时, 孔隙比为 $e = e_0$, 当轴向应力为 q_1 时, 由应变体变曲线求得此时的孔隙比 $e = e_1$, 带入式 (8), 即可求出最大粒组未破碎的堆石质量, 对于破碎的堆石质量通过式 (13) 即可分配到各组, 这样就求得了对应的粒径级配曲线。

对于均一粒径堆石料大三轴试验, 由于颗粒间的孔隙较大, 橡皮膜很容易破裂, 试验用两层橡皮膜, 试验围压最高为 1000 kPa。经过筛分, 并对比固结前后堆石粒径级配曲线后发现, 在 1000 kPa 围压以内, 固结过程中堆石破碎量很小, 因此, 可不考虑低围压固结过程中的颗粒破碎。

图 8 示出了围压为 800 kPa 三轴试验过程中, 应力水平 s 分别为 0.25, 0.5, 0.75 及 1.0 时停止试验, 对试样的颗粒级配曲线进行筛分, 得到的级配试验点, 各曲线则是根据上述的理论推求得到的理论级配曲线。可以看出, 试验点与理论推求的级配曲线吻合较好。在三轴试验的级配曲线演化过程中, 随着应力水平的增加, 粒径级配曲线向左侧移动。说明在这一加载过程中大颗粒减少, 小颗粒则逐渐增加。因为颗粒所受的接触力随着外荷的增加而不断增大, 超过颗粒自身强度后, 大颗粒不断破碎成更小颗粒导致。

表 2 试验的基本参数

Table 2 Parameters of tests

粒组/mm	d/mm	m	e_0	37%强度/MPa	D
40~60	50	2.93	0.60	5.50	2.43
20~40	30	2.57	0.60	12.43	2.45
10~20	15	2.74	0.60	23.33	2.41
5~10	7.5	2.10	0.60	51.05	2.49

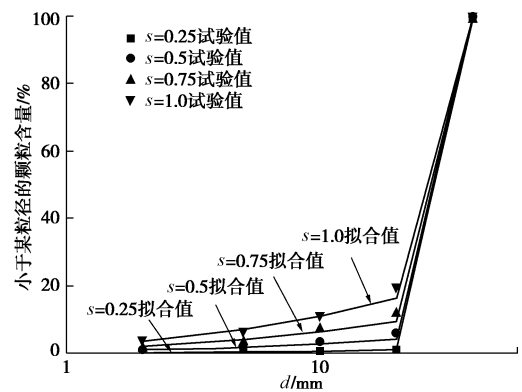


图 8 800 kPa 围压时不同应力水平下颗粒级配曲线试验值和推求值

Fig. 8 Particle-size grading curves for different stress levels under $\sigma_3 = 800 \text{ kPa}$

不同围压下, 试验至应变 15% 停止试验, 卸样、烘干、筛分试样并称重, 得到的粒径级配曲线见图 9。

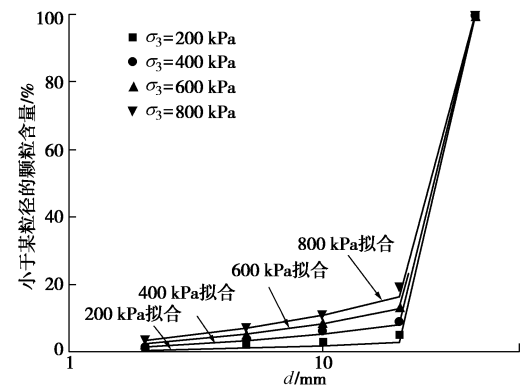


图 9 不同围压下三轴试验后颗粒级配曲线试验值和推求值

Fig. 9 Particle-size grading curves under different confining pressures

可以看出, 随着围压的增大, 试验至试样破坏时细颗粒逐渐增多, 大颗粒逐渐减少。这是因为围压增加, 抗剪应力就会增大, 试样颗粒承受的接触力大, 破碎会自然增多。图 9 中也可以看出, 试验值与理论计算得到的级配曲线也较为接近。

4 结 论

本文基于堆石料单粒强度服从 Weibull 分布以及破碎颗粒的粒径服从分形分布的理论, 提出了三轴试验加载过程中任意应力状态的粒径级配曲线的推求方法, 从而实现了三轴试验加载过程中颗粒破碎的实时度量。论文的主要结论如下:

(1) 大连石灰石单粒强度试验表明, 岩块颗粒的抗挤压强度基本服从 Weibull 分布, 且不同粒组的颗粒强度离散程度接近。

(2) 大连石灰石破碎颗粒的筛分试验表明, 破碎后的粒径分布具有分形特征, 且各个粒组的分形维数接近。

(3) 基于上述试验发现, 可直接推求三轴加载试验过程中的颗粒级配曲线, 从而使颗粒破碎可以实时度量。计算得到的粒径级配曲线和真实三轴试验的实测结果吻合较好。验证了本文给出算法的正确性和颗粒强度服从 Weibull 分布以及破碎颗粒的级配服从分形分布的结论可行。

参考文献:

- [1] NIETO GAMBOA C J. Mechanical behavior of rockfill materials-Application to concrete face rockfill dams[D]. Châtenay-Malabry, Ecole Centrale De Paris, 2011.
- [2] LEE K L, FARHOOMAND I. Compressibility and crushing of granular soil in anisotropic triaxial compression[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1967, **4**(1): 68 - 86.
- [3] LADE P V, YAMAMURO J A, BOPP P A. Significance of particle crushing in granular materials[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1996, **122**(4): 309 - 316.
- [4] HARDIN B O. Crushing of soil particles[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1985, **111**(10): 1177 - 1192.
- [5] 水利水电工程岩石试验规程[S]. 2001. (Specifications for rock tests in water conservancy and hydroelectric engineering[S]. 2001. (in Chinese))
- [6] LEE D. The angles of friction of granular fills[D]. Cambridge: University of Cambridge, 1992.
- [7] MCDOWELL G R, AMON A. The application of Weibull statistics to the fracture of soil particles[J]. Soils and Foundations, 2000, **40**(5): 133 - 141.
- [8] JAEGER J C. Failure of rocks under tensile conditions[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, 1967, **4**(2): 219 - 227.
- [9] DARVELL B W. Uniaxial compression tests and the validity of indirect tensile strength[J]. Journal of Materials Science, 1990, **25**: 757 - 780.
- [10] WEIBULL W. A statistical distribution function of wide applicability[J]. Journal of Applied Mechanics, 1951, **18**(3): 293 - 297.
- [11] NAKATA Y, HYDE A, HYODO M, et al. A probabilistic approach to sand particle crushing in the triaxial test[J]. Géotechnique, 1999, **49**(5): 567 - 583.
- [12] MANDELBROT B B. The fractal geometry of nature[M]. New York: Freeman, 1983.
- [13] MCDOWELL G R. On the yielding and plastic compression of sand[J]. Soils and Foundations, 2002, **42**(1): 139 - 145.
- [14] TURCOTTE D L. Fractals and fragmentation[J]. Journal of Geophysical Research: Solid Earth (1978 - 2012), 1986, **91**(B2): 1921 - 1926.
- [15] TYLER S W, WHEATCRAFT S W. Fractal processes in soil water retention[J]. Water Resources Research, 1990, **26**(5): 1047 - 1054.
- [16] 黄冠华, 詹卫华. 土壤颗粒的分形特征及其应用[J]. 土壤学报, 2002, **39**(4): 490 - 497. (HUANG Guan-hua, ZHAN Wei-hua. The factual character and application of the soils[J]. Acta Pedologica Sinica, 2002, **39**(4): 490 - 497. (in Chinese))
- [17] MCDOWELL G, DE BONO J P. On the micro mechanics of one-dimensional normal compression[J]. Géotechnique, 2013, **63**(11): 895 - 908.
- [18] BARRETO D. Numerical and experimental investigation into the behaviour of granular materials under generalised stress states[D]. London: Imperial College London, 2009.
- [19] 水电水利工程粗粒土试验规程[S]. 2006. (Code for coarse-grained soil tests for hydropower and water conservancy engineering[S]. 2006. (in Chinese))