DOI：10.11779/CJGE201505014

考虑桩底土层波动效应的饱和黏弹性半空间中摩擦桩竖向振动

崔春义[1, 2]，张石平[1]，杨 刚[1]，李晓飞[1]

（1. 大连海事大学土木工程系，辽宁 大连 116026；2. 北京工业大学建筑工程学院，北京 100022）

摘 要：为深化对饱和黏弹性半空间地基中摩擦桩竖向振动特性的认识，基于Boer多孔介质动力控制方程组，考虑桩底土层波动效应，采用Hankel积分变换和微分算子分解理论求解相关方程得到桩底、桩侧反力，进而建立饱和土中桩基竖向振动偏微分方程，结合桩土接触面混合边值条件推导得出了饱和黏弹性半空间地基中摩擦桩桩顶竖向动力阻抗解析表达式。并在此基础上进一步通过数值算例对比分析探讨了液固耦合系数、桩长径比、桩土模量比、地基土黏滞阻尼系数这些重要因素对所得桩顶动力阻抗的影响规律，得到了一些对工程实践有意义的结论。

关键词：摩擦桩；竖向振动；饱和黏弹性半空间；Boer多孔介质动力控制方程；Hankel积分变换；微分算子分解理论

中图分类号：TU435 **文献标识码**：A **文章编号**：1000－4548(2015)05－0878－15

作者简介：崔春义(1978－)，男，副教授，博士后，主要从事结构–地基动力相互作用、岩土力学数值方法研究。E-mail: cuichunyi@dlmu.edu.cn.

Vertical vibration of floating piles in saturated viscoelastic half-space considering wave effect of subsoil under pile bottom

CUI Chun-yi[1, 2], ZHANG Shi-ping[1], YANG Gang[1], LI Xiao-fei[1]

(1. Institute of Road and Bridge Engineering, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China; 2. School of Civil Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China)

Abstract: Considering the waves effect of soil under pile bottom, an axisymmetrical analytical solution is presented to investigate the vertical vibration of a floating pile embedded in a saturated viscoelastic half-space. By employing the Hankel's integral transformation and the decomposition theory of differential operator and considering the mixed boundary condition of pile-soil interfaces to solve the Boer's dynamic governing equations for the soil, the dynamic impedance of the pile head is obtained. Furthermore, the effects of liquid-solid coupled coefficient, length-radius ratio of piles, modulus ratio of pile-soil and viscous damping coefficient of soil on the obtained impedance are discussed through parametric comparative analyses. Some significant conclusions are drawn. This study may provide technical reference and theoretical support for the related engineering practices to some extent.

Key words: floating pile; vertical vibration; saturated viscoelastic half-space; Boer's dynamic governing equation; Hankel's integral transformation; decomposition theory of differential operator

0 引 言

饱和土中桩基动力阻抗的确定是基础半空间理论以及土–结构动力相互作用问题的基本课题，研究饱和土–桩动力相互作用问题是研究单、群桩振动特性及桩–土–结构动力相互作用的关键和基础，近年来这一问题得到了国内外诸多学者越来越多的重视，业已成为学术界和工程界的研究热点。纵观饱和土桩动力相互作用问题的研究发展历程，可以发现，在桩与桩侧土的动力相互作用方面，已有的理论研究已相当广泛而深入，采用的模型及所考虑的桩侧土各种参数因素也比较全面[1-24]。相比之下，由于对桩–桩端土动力相互作用问题建立严格耦合模型的难度较大，关于桩端土对桩振动特性的影响研究显得非常薄弱，且现有研究均视桩底条件为弹性支承（支承刚度为常数，与激振频率无关），并未考虑桩底土层波动效应的影响[25-30]。研究表明[31-33]，桩的振动特性由桩自身、桩侧土和桩

基金项目：国家自然科学基金项目（50809009）；辽宁省教育厅一般项目（L2013305）；中央高校基本科研业务费专项资金项目（3132014326，3132014072）；北京市博士后基金项目A类（2014ZZ-49）

收稿日期：2014－08－04

端土体共同控制，且端承比例越高，桩端土的影响程度越大；很多情况下，桩端土会成为桩振动特性的主要控制因素，桩底土层波动效应对饱和土中桩基振动特性具有较大影响。研究并准确反映其影响，对正确、深入了解桩的动、静态特性均非常重要，也只有这样才能进一步提高桩基振动理论的实用价值。无疑，若考虑桩端土的波动效应来研究饱和地基与桩基础的动力相互作用问题，无论在理论角度还是工程实际角度，都具有十分重要的意义。

目前，用来描述饱和土宏观力学行为的理论主要有基于现象学方法提出的Biot理论和基于混合物理论提出的多孔介质理论。尽管 Biot 理论已成功应用于诸多工程领域中，但 Edelman 等[34-42]通过对比分析指出了Biot动力控制方程中质量守恒方程和动量守恒方程存在一定局限性和不足，认为 Biot 理论本质上是一种工程描述方法。而基于连续介质混合物公理和体积分数概念的多孔介质理论，同时满足质量守恒定律和热动力学定律等物理公理，相较于 Biot 理论其推导更加严密，且合理性和准确性已在相关研究中得到验证[34-46]。此外，由于多孔介质理论还具有能将微观性质直接通过宏观性质来描述，同时避免杂交混合物理论中的繁杂公式及在不需要额外假定的条件下，诸如动力、材料和几何非线性等一些效应可以很容易地反映在其数学模型中等优点，近年来引起了众多关注。如今，多孔介质理论已发展到一个比较高的水平，无论在数学逻辑上还是物理本质上都具有较好的一致性，并能满足理论上的严格性和工程实践上的应用性两方面的各种要求。基于多孔介质理论，Boer 等[35-42]、Liu 等[39-43]、杨骁等[44]、张燕等[45]、郑云英等[46]研究了饱和多孔介质中波的传播问题，刘林超等[12-14]、杨骁等[15-17]、闫启方等[19-20]、秦世伟等[21]研究了饱和土中端承桩的振动问题。

综上所述，本文将基于 Boer 建立的多孔介质动力控制方程组，考虑桩底土层波动效应，采用 Hankel 积分变换和微分算子分解理论求解相关方程得到桩底、桩侧反力，进而建立饱和土中桩基竖向振动偏微分方程，结合桩土接触面混合边值条件推导得出饱和黏弹性半空间地基中摩擦桩桩顶竖向动力阻抗解析表达式。在此基础上进一步通过数值算例对比分析探讨液固耦合系数、桩长径比、桩土模量比、地基土黏滞阻尼系数对所得桩顶动力阻抗的影响规律。

1　饱和黏弹性半空间地基中摩擦单桩竖向动力阻抗推导与求解

所建立饱和黏弹性半空间地基与摩擦桩动力相互作用体系计算模型如图 1 所示。基于 Boer 多孔介质理论[35-42]，饱和黏弹性半空间地基土体动力控制方程组为

$$(\lambda^{\mathrm{S}}+\mu^{\mathrm{S}})\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{U}_{\mathrm{S}}+\mu^{\mathrm{S}}\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\boldsymbol{U}_{\mathrm{S}}-n^{\mathrm{S}}\,\mathrm{grad}\,p-\rho^{\mathrm{S}}\ddot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{S}}+S_{\mathrm{v}}(\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{L}}-\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{S}})=0\quad,\tag{1}$$

$$-n^{\mathrm{L}}\,\mathrm{grad}\,p-\rho^{\mathrm{L}}\ddot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{L}}-S_{\mathrm{v}}(\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{L}}-\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{S}})=0\quad,\tag{2}$$

$$\mathrm{div}(n^{\mathrm{S}}\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{S}}+n^{\mathrm{L}}\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{L}})=0\quad。\tag{3}$$

式中　λ^{S}，μ^{S} 为土骨架复 Lame 常数；n^{S} 为土骨架体积率，n^{L} 为孔液体积率，且 $n^{\mathrm{S}}+n^{\mathrm{L}}=1$；$\rho^{\mathrm{S}}$，$\rho^{\mathrm{L}}$ 分别为土骨架和孔液密度；S_{v} 为液固耦合系数；$\boldsymbol{U}_{\mathrm{S}}$，$\boldsymbol{U}_{\mathrm{L}}$ 分别为土骨架和孔液位移向量；$\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{S}}$，$\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{L}}$ 分别为土骨架和孔液速度向量；$\ddot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{S}}$，$\ddot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{L}}$ 分别为土骨架和孔液加速度向量；p 为孔隙液相压力。并 $G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$，$\mu^{\mathrm{S}}=G(1+\mathrm{i}\,\xi)$，$\lambda^{\mathrm{S}}=\dfrac{2\nu}{1-2\nu}\mu^{\mathrm{S}}$，$S_{\mathrm{v}}=\dfrac{(n^{\mathrm{L}})^2\gamma^{\mathrm{LR}}}{k^{\mathrm{L}}}$，$\mathrm{grad}=(\dfrac{\partial}{\partial r},\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta},\dfrac{\partial}{\partial z})$，$\boldsymbol{U}=(u,v,w)$，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{U}=\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\theta}+\dfrac{\partial w}{\partial z}+\dfrac{u}{r}$。其中，$\xi$ 为土体黏滞阻尼系数，ν 为土体泊松比，E 为土体弹性模量，γ^{LR} 为液体真实比重，k^{L} 为土体 Darcy 渗透系数。

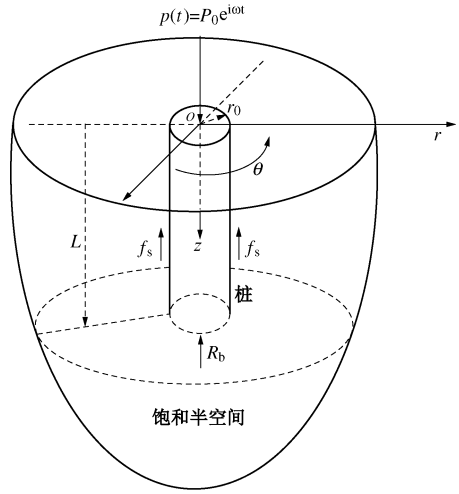


图 1　力学模型与坐标系统

Fig. 1 Mechanical model and coordinate system

定义 u_{s}，u_{L} 分别表示土骨架和孔液径向位移，w_{s}，w_{L} 分别表示土骨架和孔液竖向位移，w_{p} 表示桩基竖向位移。在竖向谐和激振力 $p(t)=P_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 作用下饱和土桩系统将做谐和振动，故有 $u_{\mathrm{s}}=U_{\mathrm{s}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，$u_{\mathrm{L}}=U_{\mathrm{L}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，$w_{\mathrm{s}}=W_{\mathrm{s}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，$w_{\mathrm{L}}=W_{\mathrm{L}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，$w_{\mathrm{p}}=W_{\mathrm{P}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，$p=P\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$（i 为虚数单位，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$）。则 $\dfrac{\partial u_{\mathrm{s}}}{\partial t}=\mathrm{i}\omega U_{\mathrm{s}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，$\dfrac{\partial^2 u_{\mathrm{s}}}{\partial t^2}=-\omega^2 U_{\mathrm{s}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，其余位移量相应变化同上。考虑饱

和黏弹性半空间地基的轴对称条件，将上述条件代入式（1）～（3）中整理可推得

$$(\lambda^{\mathrm{S}}+\mu^{\mathrm{S}})\frac{\partial\Theta}{\partial r}+\mu^{\mathrm{S}}\left(\nabla^2-\frac{1}{r^2}\right)U_{\mathrm{S}}-\frac{\partial P}{\partial r}+\rho^{\mathrm{S}}\omega^2U_{\mathrm{S}}+\rho^{\mathrm{L}}\omega^2U_{\mathrm{L}}=0 \quad , \tag{4}$$

$$(\lambda^{\mathrm{S}}+\mu^{\mathrm{S}})\frac{\partial\Theta}{\partial z}+\mu^{\mathrm{S}}\nabla^2W_{\mathrm{S}}-\frac{\partial P}{\partial z}+\rho^{\mathrm{S}}\omega^2W_{\mathrm{S}}+\rho^{\mathrm{L}}\omega^2W_{\mathrm{L}}=0 , \tag{5}$$

$$n^{\mathrm{L}}\frac{\partial P}{\partial r}+\rho^{\mathrm{L}}(-\omega^2U_{\mathrm{L}})+S_{\mathrm{v}}\cdot \mathrm{i}\omega(U_{\mathrm{L}}-U_{\mathrm{S}})=0 \quad , \tag{6}$$

$$n^{\mathrm{L}}\frac{\partial P}{\partial z}+\rho^{\mathrm{L}}(-\omega^2W_{\mathrm{L}})+S_{\mathrm{v}}\cdot \mathrm{i}\omega(W_{\mathrm{L}}-W_{\mathrm{S}})=0 \quad , \tag{7}$$

$$n^{\mathrm{S}}\frac{\partial U_{\mathrm{S}}}{\partial r}+n^{\mathrm{L}}\frac{\partial U_{\mathrm{L}}}{\partial r}+\frac{1}{r}(n^{\mathrm{S}}U_{\mathrm{S}}+n^{\mathrm{L}}U_{\mathrm{L}})+n^{\mathrm{S}}\frac{\partial W_{\mathrm{S}}}{\partial z}+n^{\mathrm{L}}\frac{\partial W_{\mathrm{L}}}{\partial z}=0 \quad , \tag{8}$$

其中，$\Theta=\frac{\partial U_{\mathrm{S}}}{\partial r}+\frac{U_{\mathrm{S}}}{r}+\frac{\partial W_{\mathrm{S}}}{\partial z}$，$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$。

为便于后文分析，引入无量纲参数 $\bar{\lambda}^{\mathrm{S}}=\frac{\lambda^{\mathrm{S}}}{G}$，$\bar{\mu}^{\mathrm{S}}=\frac{\mu^{\mathrm{S}}}{G}$，$\bar{E}=\frac{E}{G}$，$\bar{\rho}^{\mathrm{S}}=\frac{\rho^{\mathrm{S}}}{\rho}$，$\bar{\rho}^{\mathrm{L}}=\frac{\rho^{\mathrm{L}}}{\rho}$，$\bar{S}_{\mathrm{v}}=\frac{r_0S_{\mathrm{v}}}{\sqrt{\rho G}}$ 以及无量纲变量 $\bar{r}=\frac{r}{r_0}$，$\bar{z}=\frac{z}{r_0}$，$\bar{U}_{\mathrm{S}}=\frac{U_{\mathrm{S}}}{r_0}$，$\bar{U}_{\mathrm{L}}=\frac{U_{\mathrm{L}}}{r_0}$，$\bar{W}_{\mathrm{S}}=\frac{W_{\mathrm{S}}}{r_0}$，$\bar{W}_{\mathrm{L}}=\frac{W_{\mathrm{L}}}{r_0}$，$\bar{W}_{\mathrm{P}}=\frac{W_{\mathrm{P}}}{r_0}$，$\bar{P}=\frac{P}{G}$，$\bar{\sigma}_z=\frac{\sigma_z}{G}$，$\bar{\tau}_{rz}=\frac{\tau_{rz}}{G}$，$\bar{F}_{\mathrm{s}}=\frac{F_{\mathrm{s}}}{Gr_0}$，$a_0=\sqrt{\frac{\rho}{G}}r_0\omega$。其中，$\rho=n^{\mathrm{S}}\rho^{\mathrm{S}}+n^{\mathrm{L}}\rho^{\mathrm{L}}$，$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial\bar{r}^2}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}+\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^2}$，$\Theta=\frac{\partial\bar{U}_{\mathrm{S}}}{\partial\bar{r}}+\frac{\bar{U}_{\mathrm{S}}}{\bar{r}}+\frac{\partial\bar{W}_{\mathrm{S}}}{\partial\bar{z}}=\frac{\partial U_{\mathrm{S}}}{\partial r}+\frac{U_{\mathrm{S}}}{r}+\frac{\partial W_{\mathrm{S}}}{\partial z}$。

将上述相应无量纲量代入式（4）～（8）后整理可得

$$(\bar{\lambda}^{\mathrm{S}}+\bar{\mu}^{\mathrm{S}})\frac{\partial\Theta}{\partial\bar{r}}+\bar{\mu}^{\mathrm{S}}\left(\nabla^2-\frac{1}{\bar{r}^2}\right)\bar{U}_{\mathrm{S}}-\frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{r}}+\bar{\rho}^{\mathrm{S}}a_0^2\bar{U}_{\mathrm{S}}+\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0^2\bar{U}_{\mathrm{L}}=0 \quad , \tag{9}$$

$$(\bar{\lambda}^{\mathrm{S}}+\bar{\mu}^{\mathrm{S}})\frac{\partial\Theta}{\partial\bar{z}}+\bar{\mu}^{\mathrm{S}}\nabla^2\bar{W}_{\mathrm{S}}-\frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{z}}+\bar{\rho}^{\mathrm{S}}a_0^2\bar{W}_{\mathrm{S}}+\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0^2\bar{W}_{\mathrm{L}}=0, \tag{10}$$

$$n^{\mathrm{L}}\frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{r}}+\bar{\rho}^{\mathrm{L}}(-a_0^2\bar{U}_{\mathrm{L}})+\bar{S}_{\mathrm{v}}\cdot \mathrm{i}a_0(\bar{U}_{\mathrm{L}}-\bar{U}_{\mathrm{S}})=0 \quad , \tag{11}$$

$$n^{\mathrm{L}}\frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{z}}+\bar{\rho}^{\mathrm{L}}(-a_0^2\bar{W}_{\mathrm{L}})+\bar{S}_{\mathrm{v}}\cdot \mathrm{i}a_0(\bar{W}_{\mathrm{L}}-\bar{W}_{\mathrm{S}})=0 \quad , \tag{12}$$

$$n^{\mathrm{S}}\frac{\partial\bar{U}_{\mathrm{S}}}{\partial\bar{r}}+n^{\mathrm{L}}\frac{\partial\bar{U}_{\mathrm{L}}}{\partial\bar{r}}+\frac{1}{\bar{r}}(n^{\mathrm{S}}\bar{U}_{\mathrm{S}}+n^{\mathrm{L}}\bar{U}_{\mathrm{L}})+n^{\mathrm{S}}\frac{\partial\bar{W}_{\mathrm{S}}}{\partial\bar{z}}+n^{\mathrm{L}}\frac{\partial\bar{W}_{\mathrm{L}}}{\partial\bar{z}}=0 \quad 。 \tag{13}$$

由于建立基础与基底土之间的严格耦合模型难度较大，自 Novak 等[47]在研究埋置于弹性地基中的基础动力响应问题时采用 Baranov[48]提出的假设（以基底为分界线将地基分成上、下独立土层）后，众多学者先后基于此假设研究了包括桩基、刚性基础等不同形式基础在土中的各类振动问题，通过其所得解的比较验证结果可知此假设具有较强的实用性。故本文在后续分析中亦采用类似的假设：①地基土为各向同性饱和黏弹性介质，基础为密度 ρ_{p}、弹性模量 E_{p} 的等截面圆柱体，土与桩基在接触面处紧密相连，相互之间无滑移；②基底以下的土视为饱和黏弹性半空间，且不计上覆土层的覆盖效应。

1.1 摩擦桩桩底反力推导求解

由式（11）、（12）可推得

$$\bar{U}_{\mathrm{L}}=D_1(\bar{U}_{\mathrm{S}}-\frac{n^{\mathrm{L}}}{\mathrm{i}a_0\bar{S}_v}\frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{r}}) \quad , \tag{14}$$

$$\bar{W}_{\mathrm{L}}=D_1(\bar{W}_{\mathrm{S}}-\frac{n^{\mathrm{L}}}{\mathrm{i}a_0\bar{S}_v}\frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{z}}) \quad , \tag{15}$$

式中，$D_1=\frac{\mathrm{i}a_0\bar{S}_{\mathrm{v}}}{\mathrm{i}a_0\bar{S}_{\mathrm{v}}-a_0^2\bar{\rho}^{\mathrm{L}}}$。

为方便描述，将式（9）、（10）之间的联立过程简写为 $\frac{\partial}{\partial\bar{r}}(9)+\frac{1}{\bar{r}}(9)+\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(10)$，同时把式（14）、（15）代入其中可推得

$$(\bar{\lambda}^{\mathrm{S}}+2\bar{\mu}^{\mathrm{S}})\nabla^2\Theta-\left(1+\frac{D_1\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0n^{\mathrm{L}}}{\mathrm{i}\bar{S}_{\mathrm{v}}}\right)\nabla^2\bar{P}+(\bar{\rho}^{\mathrm{S}}a_0^2+\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0^2D_1)\Theta=0 \quad 。 \tag{16}$$

同理，将式（14）、（15）之间的联立过程简写为 $\frac{\partial}{\partial\bar{r}}(14)+\frac{1}{\bar{r}}(14)+\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(15)$，并将式（13）代入其中可推得

$$\nabla^2\bar{P}=D_2\Theta \quad , \tag{17}$$

式中，$D_2=\frac{(n^{\mathrm{S}}+n^{\mathrm{L}}D_1)\mathrm{i}a_0\bar{S}_{\mathrm{v}}}{(n^{\mathrm{L}})^2D_1}$。

联立式（16）、（17）可得

$$\nabla^2\Theta=D_3\Theta \quad , \tag{18}$$

式中，$D_3=\frac{D_2+\frac{n^{\mathrm{S}}\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0^2}{n^{\mathrm{L}}}-\bar{\rho}^{\mathrm{S}}a_0^2}{\bar{\lambda}^{\mathrm{S}}+2\bar{\mu}^{\mathrm{S}}}$。

黏弹性土骨架应力与位移之间的关系方程为

$$\bar{\tau}_{zr}=\bar{\tau}_{rz}=\bar{\mu}^{\mathrm{S}}\left(\frac{\partial\bar{U}_{\mathrm{S}}}{\partial\bar{z}}+\frac{\partial\bar{W}_{\mathrm{S}}}{\partial\bar{r}}\right) \quad , \tag{19}$$

$$\bar{\sigma}_z=\bar{\lambda}^{\mathrm{S}}\Theta+2\bar{\mu}^{\mathrm{S}}\frac{\partial\bar{W}_{\mathrm{S}}}{\partial\bar{z}} \quad 。 \tag{20}$$

记函数 $f(r)$ 的 v 阶 Hankel 变换为 $\tilde{f}^{v}(\xi)$，其变换 $H_v(f(r))$ 及逆变换 $H_v^{-1}(\tilde{f}^{v}(\xi))$ 公式[49]为

$$\tilde{f}^{\nu}(\xi)=H_{\nu}[f(r)]=\int_0^{\infty} rf(r)\mathrm{J}_{\nu}(\xi r)\,\mathrm{d}r \quad , \tag{21}$$

$$f(r)=H_{\nu}^{-1}[\tilde{f}^{\nu}(\xi)]=\int_0^{\infty} \xi\tilde{f}^{\nu}(\xi)\mathrm{J}_{\nu}(\xi r)\,\mathrm{d}\xi \quad , \tag{22}$$

其中 $\mathrm{J}_{\nu}(\xi r)$ 为第一类 ν 阶 Bessel 函数。

对式（9）、（19）进行一阶 Hankel 变换，式（10）、（17）、（18）、（20）以及土骨架体积应变公式进行零阶 Hankel 变换，求解方程并考虑半空间地基中波的辐射条件后可推得

$$\tilde{\Theta}^0=A_1\mathrm{e}^{-q\bar{z}} \quad , \tag{23}$$

$$\tilde{\bar{P}}^0=C_{21}A_1\mathrm{e}^{-q\bar{z}}+A_2\mathrm{e}^{-\xi\bar{z}} \quad , \tag{24}$$

$$\tilde{\bar{U}}_{\mathrm{S}}^1=C_{31}A_1\mathrm{e}^{-q\bar{z}}+C_{32}A_2\mathrm{e}^{-\xi\bar{z}}+A_3\mathrm{e}^{-s\bar{z}} \quad , \tag{25}$$

$$\tilde{\bar{W}}_{\mathrm{S}}^0=C_{41}A_1\mathrm{e}^{-q\bar{z}}+C_{32}A_2\mathrm{e}^{-\xi\bar{z}}+\frac{\xi}{s}A_3\mathrm{e}^{-s\bar{z}} \quad , \tag{26}$$

$$\tilde{\bar{W}}_{\mathrm{L}}^0=D_1[\tilde{\bar{W}}_{\mathrm{S}}^0-\frac{n^{\mathrm{L}}}{\mathrm{i}a_0\bar{S}_{\mathrm{v}}}(-qC_{21}A_1\mathrm{e}^{-q\bar{z}}-\xi A_2\mathrm{e}^{-\xi\bar{z}})] \, , \tag{27}$$

$$\tilde{\bar{\tau}}_{zr}^1=-\bar{\mu}^{\mathrm{S}}[(qC_{31}+\xi C_{41})A_1\mathrm{e}^{-q\bar{z}}+2\xi C_{32}A_2\mathrm{e}^{-\xi\bar{z}}+\frac{s^2+\xi^2}{s}A_3\mathrm{e}^{-s\bar{z}}] \quad , \tag{28}$$

$$\tilde{\bar{\sigma}}_z^0=(\bar{\lambda}^{\mathrm{S}}-2\bar{\mu}^{\mathrm{S}}qC_{41})A_1\mathrm{e}^{-q\bar{z}}-2\bar{\mu}^{S}\xi(C_{32}A_2\mathrm{e}^{-\xi\bar{z}}+A_3\mathrm{e}^{-s\bar{z}})。 \tag{29}$$

其中，$q=\sqrt{\xi^2+D_3}$，$C_{21}=\dfrac{D_2}{D_3}$，$C_{31}=\xi[\bar{\lambda}^{\mathrm{S}}+\bar{\mu}^{\mathrm{S}}-C_{21}\cdot(1+\dfrac{\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0D_1n^{\mathrm{L}}}{\mathrm{i}\bar{S}_{\mathrm{v}}})]/\ (\bar{\mu}^{\mathrm{S}}D_3+\bar{\rho}^{\mathrm{S}}a_0^2+\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0^2D_1)$，$C_{32}=-\xi\left(1+\dfrac{\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0D_1n^{\mathrm{L}}}{\mathrm{i}\bar{S}_{\mathrm{v}}}\right)/\bar{\rho}^{\mathrm{S}}a_0^2+\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0^2D_1$，$C_{41}=\dfrac{\xi C_{31}-1}{q}$，$s=\sqrt{\xi^2-\dfrac{\bar{\rho}^{\mathrm{S}}a_0^2+\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0^2D_1}{\bar{\mu}^{\mathrm{S}}}}$，$\mathrm{Re}(q)$，$\mathrm{Re}(s)$ 均大于零。A_1，A_2，A_3 为待定系数，由桩基础与饱和地基相互作用体系的边界条件确定。

由于将桩底土视为半空间处理，并忽略上覆土层的覆盖效应，则此饱和黏弹性半空间满足如下无量纲边界条件：

半空间表面($\bar{z}=L/r_0$)在桩径范围外的正应力为零，即

$$\bar{\sigma}_z\left(\bar{r},\frac{L}{r_0}\right)=0 \qquad (1<\bar{r}<\infty) \quad ; \tag{30}$$

半空间表面切应力为零，即

$$\bar{\tau}_{zr}(\bar{r},\frac{L}{r_0})=0 \qquad (0\leqslant\bar{r}<\infty) \quad ; \tag{31}$$

半空间表面透水，即

$$\bar{P}\left(\bar{r},\frac{L}{r_0}\right)=0 \qquad (0\leqslant\bar{r}<\infty) \quad ; \tag{32}$$

桩底位置处土体的竖向位移与桩基的相等，即

$$\bar{W}_{\mathrm{S}}\left(\bar{r},\frac{L}{r_0}\right)=\frac{W_0}{r_0} \qquad (0\leqslant\bar{r}\leqslant1) \quad , \tag{33}$$

其中，W_0 表示桩基底端竖向位移幅值。

将上述边界条件进行相应的 Hankel 变换，并在式（30）～（32）中令 $\bar{z}=\dfrac{L}{r_0}$，则可求得以 $\tilde{\bar{\sigma}}_z^0\left(\xi,\dfrac{L}{r_0}\right)$ 表示的 A_1，A_2，A_3 分别为

$$A_1=\frac{\tilde{\bar{\sigma}}_z^0\left(\xi,\dfrac{L}{r_0}\right)\mathrm{e}^{\frac{qL}{r_0}}}{\bar{\lambda}^{\mathrm{S}}-2\bar{\mu}^{\mathrm{S}}qC_{41}-2\bar{\mu}^{\mathrm{S}}\xi D_4+2\bar{\mu}^{\mathrm{S}}\xi C_{32}C_{21}} \quad , \tag{34}$$

$$A_2=-C_{21}A_1\mathrm{e}^{\frac{L}{r_0}(\xi-q)} \quad , \tag{35}$$

$$A_3=D_4A_1\mathrm{e}^{\frac{L}{r_0}(s-q)} \quad , \tag{36}$$

式中，$D_4=s\dfrac{2\xi C_{32}C_{21}-\xi C_{41}-qC_{31}}{s^2+\xi^2}$。

将所得系数 A_1，A_2，A_3 代入 $\tilde{\bar{W}}_{\mathrm{S}}^0$ 的表达式（26），并令 $\bar{z}=\dfrac{L}{r_0}$ 可得

$$\begin{aligned}\tilde{\bar{W}}_{\mathrm{S}}^0\left(\xi,\frac{L}{r_0}\right)&=C_{41}A_1\mathrm{e}^{-\frac{qL}{r_0}}+C_{32}A_2\mathrm{e}^{-\frac{\xi L}{r_0}}+\frac{\xi}{s}A_3\mathrm{e}^{-\frac{sL}{r_0}}\\&=f(\xi)\tilde{\bar{\sigma}}_z^0\left(\xi,\frac{L}{r_0}\right) \quad ,\end{aligned} \tag{37}$$

$$f(\xi)=\frac{C_{41}-C_{32}C_{21}+\dfrac{\xi}{s}D_4}{\bar{\lambda}^{\mathrm{S}}-2\bar{\mu}^{\mathrm{S}}qC_{41}-2\bar{\mu}^{\mathrm{S}}\xi D_4+2\bar{\mu}^{\mathrm{S}}\xi C_{32}C_{21}}。 \tag{38}$$

对式（37）进行零阶 Hankel 逆变换可得

$$\begin{aligned}\bar{W}_{\mathrm{S}}\left(\bar{r},\frac{L}{r_0}\right)&=\int_0^{\infty}\xi\tilde{\bar{W}}_{\mathrm{S}}^0\left(\xi,\frac{L}{r_0}\right)\mathrm{J}_0(\xi\bar{r})\,\mathrm{d}\xi\\&=\int_0^{\infty}\xi f(\xi)\tilde{\bar{\sigma}}_z^0\left(\xi,\frac{L}{r_0}\right)\mathrm{J}_0(\xi\bar{r})\,\mathrm{d}\xi \quad 。\end{aligned} \tag{39}$$

由于

$$\bar{\sigma}_z\left(\bar{r},\frac{L}{r_0}\right)=\int_0^{\infty}\xi\tilde{\bar{\sigma}}_z^0\left(\xi,\frac{L}{r_0}\right)\mathrm{J}_0(\xi\bar{r})\,\mathrm{d}\xi \quad , \tag{40}$$

记 $N(\xi)=\xi\tilde{\bar{\sigma}}_z^0\left(\xi,\dfrac{L}{r_0}\right)$，则由式（30）、（33）可得一组描述饱和黏弹性半空间地基中摩擦桩竖向振动混合边值问题的对偶积分方程为

$$\int_0^{\infty}\xi^{-1}[1+H(\xi)]N(\xi)\mathrm{J}_0(\xi\bar{r})\,\mathrm{d}\xi=\frac{W_0}{r_0L_0} \qquad (0\leqslant\bar{r}\leqslant1) \, , \tag{41}$$

$$\int_0^{\infty}N(\xi)\mathrm{J}_0(\xi\bar{r})\,\mathrm{d}\xi=0 \qquad (1<\bar{r}<\infty) \quad , \tag{42}$$

式中，$L_0=\lim\limits_{\xi\to\infty}\xi f(\xi)=-\dfrac{\bar{\lambda}^{\mathrm{S}}+2\bar{\mu}^{\mathrm{S}}}{2(\bar{\lambda}^{\mathrm{S}}+\bar{\mu}^{\mathrm{S}})}=\nu-1$，$\nu$ 为土骨架泊松比，而 $H(\xi)=\dfrac{\xi f(\xi)}{L_0}-1$。

上式（41）、（42）属于 Tranter[50]型对偶积分方程。采用 Nobel[51]提出的转化方法将其化为第二类 Fredholm 积分方程来求解，令

$$N(\xi)=\frac{2\xi W_0}{r_0\pi L_0}\int_0^1\Phi(x)\cos(\xi x)\,\mathrm{d}x \quad , \tag{43}$$

将式（43）代入式（41）、（42）后，式（42）自动满足，而式（41）可化为

$$\Phi(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1 F(x,y)\Phi(y)\,\mathrm{d}y=1 \quad 。 \tag{44}$$

式中，$F(x,y)$ 为核函数，且

$$F(x,y)=2\int_0^\infty H(\xi)\cos(\xi x)\cos(\xi y)\,\mathrm{d}\xi \quad 。 \tag{45}$$

由动力平衡条件可得该桩基础的底面反力幅值 R_b 为

$$\frac{R_\mathrm{b}}{Gr_0^2}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\bar{r}\bar{\sigma}_z\left(\bar{r},\frac{L}{r_0}\right)\mathrm{d}\bar{r}=2\pi\tilde{\bar{\sigma}}_z\left(0,\frac{L}{r_0}\right)。 \tag{46}$$

再联立式（43）得

$$R_\mathrm{b}=Gr_0W_0\frac{4}{1-\nu}\int_0^1\Phi(x)\,\mathrm{d}x=Gr_0W_0f_\mathrm{v} \quad , \tag{47}$$

其中，$f_\mathrm{v}=\dfrac{4}{1-\nu}\displaystyle\int_0^1\Phi(x)\,\mathrm{d}x$ 表示桩基底部土体的复刚度。基于文献[31，32]中虚土桩法的思想，若在桩周土体中任意处取一半径为 r_0 的土柱（其物理参数与土体的一致，但按一维杆件竖向振动处理），则依据前述求解桩底土体复刚度的过程可得到此虚土桩底处土体的复刚度亦为 f_v，故可先将其近似看做桩侧土与桩底土之间的反力系数。而李强等[52]通过研究表明桩侧土与桩底土之间的反力系数对桩顶动力响应影响非常小，可以忽略其变化。但在分析中此反力系数是人为引入且独立的，不能考虑其与桩底土各物理参数之间的联系，显然这与实际不符。因此，介于这些因素，本文将在后文分析中采用上述所得复刚度 f_v 建立桩侧土与桩底土之间的连续性条件。

1.2 摩擦桩桩侧反力推导求解

饱和土–桩动力相互作用体系在稳态振动条件下还满足如下无量纲边界条件：

无穷远处土体径向位移、切应力为零，即

$$\bar{U}_\mathrm{S}(\infty,\bar{z})=0\,,\quad \bar{\tau}_{rz}(\infty,\bar{z})=0 \quad ; \tag{48}$$

饱和地基自由表面上土体正应力为零，即

$$\bar{\sigma}_z(\bar{r},0)=0 \quad ; \tag{49}$$

桩周土层与桩底土层在交界面位置内力连续，即

$$\pi\bar{E}\frac{\partial\bar{W}_\mathrm{S}}{\partial\bar{z}}\bigg|_{\bar{z}=\frac{L}{r_0}}=f_\mathrm{v}\bar{W}_\mathrm{S}\left(\bar{r},\frac{L}{r_0}\right) \quad ; \tag{50}$$

桩土接触面处孔液不渗透，即

$$\bar{U}_\mathrm{L}(1,\bar{z})=0 \quad ; \tag{51}$$

桩土接触面处土体径向位移为零，即

$$\bar{U}_\mathrm{S}(1,\bar{z})=0 \quad ; \tag{52}$$

桩土在接触面处完全黏结，即

$$\bar{W}_\mathrm{S}(1,\bar{z})=\bar{W}_\mathrm{P}(\bar{z}) \quad 。 \tag{53}$$

为方便表达，令 $k_1=\bar{\lambda}^\mathrm{S}+2\bar{\mu}^\mathrm{S}$，$k_2=1+\dfrac{D_1\bar{\rho}^\mathrm{L}a_0n^\mathrm{L}}{\mathrm{i}\bar{S}_\mathrm{v}}$，$k_3=\bar{\rho}^\mathrm{S}a_0^2+\bar{\rho}^\mathrm{L}a_0^2D_1$，则式（16）可简化为

$$k_1\nabla^2\Theta-k_2\nabla^2\bar{P}+k_3\Theta=0 \quad 。 \tag{54}$$

将式（17）、（54）表示成矩阵形式，有

$$\begin{bmatrix}k_1\nabla^2+k_3 & -k_2\nabla^2\\ D_2 & -\nabla^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Theta\\ \bar{P}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad 。 \tag{55}$$

要使方程（55）有非零解，则其算子行列式必须等于零，即

$$\nabla^4+\frac{k_3-k_2D_2}{k_1}\nabla^2=0 \quad 。 \tag{56}$$

式（56）可分解为

$$\nabla^2(\nabla^2-\beta_1^2)=0 \quad , \tag{57}$$

其中，$\beta_1^2=\dfrac{k_2D_2-k_3}{k_1}$。

根据微分算子分解理论[53]，令 $\Theta=\Theta_1+\Theta_2$，且 Θ_1，Θ_2 分别满足下式：

$$\left.\begin{aligned}&(\nabla^2-\beta_1^2)\Theta_1=0,\\ &\nabla^2\Theta_2=0。\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

设 $\Theta_1=R(\bar{r})S(\bar{z})$，将其代入式（58）中第一式可推得

$$\frac{1}{R(\bar{r})}\frac{\mathrm{d}^2R(\bar{r})}{\mathrm{d}\bar{r}^2}+\frac{1}{R(\bar{r})}\frac{1}{\bar{r}}\frac{\mathrm{d}R(\bar{r})}{\mathrm{d}\bar{r}}+\frac{1}{S(\bar{z})}\frac{\mathrm{d}^2S(\bar{z})}{\mathrm{d}\bar{z}^2}-\beta_1^2=0。 \tag{59}$$

方程（59）的解为

$$R(\bar{r})=C_1\mathrm{K}_0(g_2\bar{r})+C_2\mathrm{I}_0(g_2\bar{r}) \quad , \tag{60}$$

$$S(\bar{z})=A_1\mathrm{e}^{g_1\bar{z}}+A_2\mathrm{e}^{-g_1\bar{z}} \quad , \tag{61}$$

式中，$g_1^2+g_2^2=\beta_1^2$，$\mathrm{Re}(g_1)$，$\mathrm{Re}(g_2)$ 均大于零。

则

$$\Theta_1=(A_1\mathrm{e}^{g_1\bar{z}}+A_2\mathrm{e}^{-g_1\bar{z}})\cdot\left[C_1\mathrm{K}_0(g_2\bar{r})+C_2\mathrm{I}_0(g_2\bar{r})\right], \tag{62}$$

同理可推得

$$\Theta_2=(A_3\mathrm{e}^{g_3\bar{z}}+A_4\mathrm{e}^{-g_3\bar{z}})\cdot\left[C_3\mathrm{K}_0(g_4\bar{r})+C_4\mathrm{I}_0(g_4\bar{r})\right]。 \tag{63}$$

式中 $\mathrm{I}_0(g_2\bar{r})$，$\mathrm{I}_0(g_4\bar{r})$，$\mathrm{K}_0(g_4\bar{r})$ 分别为第一类、第二类零阶变型 Bessel 函数。A_1，A_2，A_3，A_4，C_1，C_2，C_3，C_4 为待定系数。且 $g_3^2+g_4^2=0$，$\mathrm{Re}(g_3)$，$\mathrm{Re}(g_4)$ 均大于零。

则

$$\Theta=(A_1\mathrm{e}^{g_1\bar{z}}+A_2\mathrm{e}^{-g_1\bar{z}})\left[C_1\mathrm{K}_0(g_2\bar{r})+C_2\mathrm{I}_0(g_2\bar{r})\right]+(A_3\mathrm{e}^{g_3\bar{z}}+A_4\mathrm{e}^{-g_3\bar{z}})\left[C_3\mathrm{K}_0(g_4\bar{r})+C_4\mathrm{I}_0(g_4\bar{r})\right], \tag{64}$$

同理可推得

$$\bar{P}=(A_5\mathrm{e}^{g_1\bar{z}}+A_6\mathrm{e}^{-g_1\bar{z}})\left[C_5\mathrm{K}_0(g_2\bar{r})+C_6\mathrm{I}_0(g_2\bar{r})\right]+$$

$$(A_7\mathrm{e}^{g_3\bar{z}}+A_8\mathrm{e}^{-g_3\bar{z}})\left[C_7\mathrm{K}_0(g_4\bar{r})+C_8\mathrm{I}_0(g_4\bar{r})\right],\quad(65)$$

式中，A_5，A_6，A_7，A_8，C_5，C_6，C_7，C_8 为待定系数。

由桩土体系边界条件式（48）可推得

$C_2=C_4=C_6=C_8=0$，$A_5+A_6=0$，$A_7+A_8=0$。

将上述系数代入式（64）、（65）中整理可得

$$\Theta=(B_1\mathrm{e}^{g_1\bar{z}}+B_2\mathrm{e}^{-g_1\bar{z}})\mathrm{K}_0(g_2\bar{r})+(B_3\mathrm{e}^{g_3\bar{z}}+B_4\mathrm{e}^{-g_3\bar{z}})\mathrm{K}_0(g_4\bar{r}),\quad(66)$$

$$\bar{P}=B_5(\mathrm{e}^{g_1\bar{z}}-\mathrm{e}^{-g_1\bar{z}})\mathrm{K}_0(g_2\bar{r})+B_6(\mathrm{e}^{g_3\bar{z}}-\mathrm{e}^{-g_3\bar{z}})\mathrm{K}_0(g_4\bar{r}),\quad(67)$$

其中，$C_1A_1=B_1$，$C_1A_2=B_2$，$C_3A_3=B_3$，$C_3A_4=B_4$，$C_5A_6=B_5$，$C_7A_7=B_6$。

将式（66）、（67）代入式（17）、（54）可以推得 $B_3=B_4=0$，$B_1=-B_2=\dfrac{\beta_1^2}{D_2}B_5$，代入已知系数整理式（66）、（67）后可得

$$\Theta=\frac{\beta_1^2}{D_2}B_5(\mathrm{e}^{g_1\bar{z}}-\mathrm{e}^{-g_1\bar{z}})\mathrm{K}_0(g_2\bar{r})\quad,\quad(68)$$

$$\bar{P}=B_5(\mathrm{e}^{g_1\bar{z}}-\mathrm{e}^{-g_1\bar{z}})\mathrm{K}_0(g_2\bar{r})+B_6(\mathrm{e}^{g_3\bar{z}}-\mathrm{e}^{-g_3\bar{z}})\mathrm{K}_0(g_4\bar{r})。\quad(69)$$

将式（9）、（10）改写为

$$\bar{\mu}^{\mathrm{S}}\nabla^2\bar{U}_{\mathrm{S}}+(\bar{\rho}^{\mathrm{S}}a_0^2+\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0^2D_1)\bar{U}_{\mathrm{S}}-\frac{\bar{\mu}^{\mathrm{S}}}{\bar{r}^2}\bar{U}_{\mathrm{S}}=\left(1+\frac{\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0D_1n^{\mathrm{L}}}{\mathrm{i}\bar{S}_{\mathrm{v}}}\right)\frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{r}}-(\bar{\lambda}^{\mathrm{S}}+\bar{\mu}^{\mathrm{S}})\frac{\partial\Theta}{\partial\bar{r}},\quad(70)$$

$$\bar{\mu}^{\mathrm{S}}\nabla^2\bar{W}_{\mathrm{S}}+(\bar{\rho}^{\mathrm{S}}a_0^2+\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0^2D_1)\bar{W}_{\mathrm{S}}=\left(1+\frac{\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0D_1n^{\mathrm{L}}}{\mathrm{i}\bar{S}_{\mathrm{v}}}\right)\frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{z}}-(\bar{\lambda}^{\mathrm{S}}+\bar{\mu}^{\mathrm{S}})\frac{\partial\Theta}{\partial\bar{z}}\quad。\quad(71)$$

方程（70）、（71）分别为关于 $\bar{U}_{\mathrm{S}}$ 和 $\bar{W}_{\mathrm{S}}$ 的非齐次方程，此类方程的解为其齐次方程的解再加上其特解。式（70）的齐次方程为

$$\bar{\mu}^{\mathrm{S}}\nabla^2\bar{U}_{\mathrm{S}}^1+(\bar{\rho}^{\mathrm{S}}a_0^2+\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0^2D_1)\bar{U}_{\mathrm{S}}^1-\frac{\bar{\mu}^{\mathrm{S}}}{\bar{r}^2}\bar{U}_{\mathrm{S}}^1=0。\quad(72)$$

令 $\beta_2^2=-\dfrac{\bar{\rho}^{\mathrm{S}}a_0^2+\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0^2D_1}{\bar{\mu}^{\mathrm{S}}}$，则

$$\nabla^2\bar{U}_{\mathrm{S}}^1-(\beta_2^2+\frac{1}{\bar{r}^2})\bar{U}_{\mathrm{S}}^1=0\quad。\quad(73)$$

此方程的解为

$$\bar{U}_{\mathrm{S}}^1=(d_1\mathrm{e}^{g_5\bar{z}}+d_2\mathrm{e}^{-g_5\bar{z}})\left[d_3\mathrm{K}_1(g_6\bar{r})+d_4\mathrm{I}_1(g_6\bar{r})\right]\quad,\quad(74)$$

式中，$g_5^2+g_6^2=\beta_2^2$，$\mathrm{Re}(g_5)$，$\mathrm{Re}(g_6)$ 均大于零。

由桩土体系边界条件式（48）可知 $d_4=0$，则

$$\bar{U}_{\mathrm{S}}^1=(d_5\mathrm{e}^{g_5\bar{z}}+d_6\mathrm{e}^{-g_5\bar{z}})\mathrm{K}_1(g_6\bar{r})\quad,\quad(75)$$

其中，$d_5=d_1d_3$，$d_6=d_2d_3$。

将 Θ，$\bar{P}$ 的表达式（68）、（69）代入式（70）中整理后可得

$$\bar{\mu}^{\mathrm{S}}\nabla^2\bar{U}_{\mathrm{S}}+(\bar{\rho}^{\mathrm{S}}a_0^2+\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0^2D_1)\bar{U}_{\mathrm{S}}-\frac{\bar{\mu}^{\mathrm{S}}}{\bar{r}^2}\bar{U}_{\mathrm{S}}=\left(1+\frac{\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0D_1n^{\mathrm{L}}}{\mathrm{i}\bar{S}_{\mathrm{v}}}\right)[-B_5g_2(\mathrm{e}^{g_1\bar{z}}-\mathrm{e}^{-g_1\bar{z}})\mathrm{K}_1(g_2\bar{r})-B_6g_4(\mathrm{e}^{g_3\bar{z}}-\mathrm{e}^{-g_3\bar{z}})\mathrm{K}_1(g_4\bar{r})]+(\bar{\lambda}^{\mathrm{S}}+\bar{\mu}^{\mathrm{S}})\frac{\beta_1^2}{D_2}B_5g_2(\mathrm{e}^{g_1\bar{z}}-\mathrm{e}^{-g_1\bar{z}})\mathrm{K}_1(g_2\bar{r})\quad。\quad(76)$$

由于 $\mathrm{K}_1(g_2\bar{r})$ 与 $\mathrm{K}_1(g_4\bar{r})$ 线性无关，故可设此方程的特解形式为

$$\bar{U}_{\mathrm{S}}^2=d_7(\mathrm{e}^{g_1\bar{z}}-\mathrm{e}^{-g_1\bar{z}})\mathrm{K}_1(g_2\bar{r})+d_8(\mathrm{e}^{g_3\bar{z}}-\mathrm{e}^{-g_3\bar{z}})\mathrm{K}_1(g_4\bar{r})。\quad(77)$$

将特解式（77）代入方程（76）中可推得

$$d_7=\frac{\left[(\bar{\lambda}^{\mathrm{S}}+\bar{\mu}^{\mathrm{S}})\dfrac{\beta_1^2}{D_2}-\left(1+\dfrac{\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0D_1n^{\mathrm{L}}}{\mathrm{i}\bar{S}_{\mathrm{v}}}\right)\right]g_2B_5}{\bar{\mu}^{\mathrm{S}}\beta_1^2+\bar{\rho}^{\mathrm{S}}a_0^2+\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0^2D_1}\quad,\quad(78)$$

$$d_8=-\frac{\left(1+\dfrac{\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0D_1n^{\mathrm{L}}}{\mathrm{i}\bar{S}_{\mathrm{v}}}\right)g_4B_6}{\bar{\rho}^{\mathrm{S}}a_0^2+\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0^2D_1}\quad。\quad(79)$$

则方程（70）的解为

$$\bar{U}_{\mathrm{S}}=\bar{U}_{\mathrm{S}}^1+\bar{U}_{\mathrm{S}}^2=(d_5\mathrm{e}^{g_5\bar{z}}+d_6\mathrm{e}^{-g_5\bar{z}})\mathrm{K}_1(g_6\bar{r})+d_7(\mathrm{e}^{g_1\bar{z}}-\mathrm{e}^{-g_1\bar{z}})\mathrm{K}_1(g_2\bar{r})+d_8(\mathrm{e}^{g_3\bar{z}}-\mathrm{e}^{-g_3\bar{z}})\mathrm{K}_1(g_4\bar{r})。\quad(80)$$

同理，方程（71）的齐次方程为

$$\bar{\mu}^{\mathrm{S}}\nabla^2\bar{W}_{\mathrm{S}}^1+(\bar{\rho}^{\mathrm{S}}a_0^2+\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0^2D_1)\bar{W}_{\mathrm{S}}^1=0,\quad(81)$$

令 $\beta_2^2=-\dfrac{\bar{\rho}^{\mathrm{S}}a_0^2+\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0^2D_1}{\bar{\mu}^{\mathrm{S}}}$，则有

$$\nabla^2\bar{W}_{\mathrm{S}}^1-\beta_2^2\bar{W}_{\mathrm{S}}^1=0\quad。\quad(82)$$

方程（82）的解为

$$\bar{W}_{\mathrm{S}}^1=(b_1\mathrm{e}^{g_7\bar{z}}+b_2\mathrm{e}^{-g_7\bar{z}})\left[b_3\mathrm{K}_0(g_8\bar{r})+b_4\mathrm{I}_0(g_8\bar{r})\right],\quad(83)$$

式中 $g_7^2+g_8^2=\beta_2^2$，$\mathrm{Re}(g_7)$，$\mathrm{Re}(g_8)$ 均大于零。b_1，b_2，b_3，b_4 为待定系数。

由桩土体系边界条件式（48）可知 $b_4=0$，令 $b_5=b_1b_3$，$b_6=b_2b_3$，则有

$$\bar{W}_{\mathrm{S}}^1=(b_5\mathrm{e}^{g_7\bar{z}}+b_6\mathrm{e}^{-g_7\bar{z}})\mathrm{K}_0(g_8\bar{r})\quad。\quad(84)$$

将 Θ，$\bar{P}$ 的表达式（68）、（69）代入式（71）中可得

$$\bar{\mu}^{\mathrm{S}}\nabla^2\bar{W}_{\mathrm{S}}+(\bar{\rho}^{\mathrm{S}}a_0^2+\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0^2D_1)\bar{W}_{\mathrm{S}}=\left(1+\frac{\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0D_1n^{\mathrm{L}}}{\mathrm{i}\bar{S}_{\mathrm{v}}}\right)[B_5g_1(\mathrm{e}^{g_1\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_1\bar{z}})\mathrm{K}_0(g_2\bar{r})+B_6g_3(\mathrm{e}^{g_3\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_3\bar{z}})\mathrm{K}_0(g_4\bar{r})]-(\bar{\lambda}^{\mathrm{S}}+\bar{\mu}^{\mathrm{S}})\frac{\beta_1^2}{D_2}B_5g_1(\mathrm{e}^{g_1\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_1\bar{z}})\mathrm{K}_0(g_2\bar{r})\quad。\quad(85)$$

同理可设其特解形式为

$$\bar{W}_{\mathrm{S}}^2=b_7(\mathrm{e}^{g_1\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_1\bar{z}})\mathrm{K}_0(g_2\bar{r})+b_8(\mathrm{e}^{g_3\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_3\bar{z}})\mathrm{K}_0(g_4\bar{r})。\quad(86)$$

将特解式（86）代入方程（85）中可推得

$$b_7=\frac{\left[(1+\frac{\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0D_1n^{\mathrm{L}}}{\mathrm{i}\bar{S}_{\mathrm{v}}})-(\bar{\lambda}^{\mathrm{S}}+\bar{\mu}^{\mathrm{S}})\frac{\beta_1^2}{D_2}\right]g_1B_5}{\bar{\mu}^{\mathrm{S}}\beta_1^2+\bar{\rho}^{\mathrm{S}}a_0^2+\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0^2D_1}\text{，}\quad(87)$$

$$b_8=\frac{(1+\frac{\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0D_1n^{\mathrm{L}}}{i\bar{S}_{\mathrm{v}}})g_3B_6}{\bar{\rho}^{\mathrm{S}}a_0^2+\bar{\rho}^{\mathrm{L}}a_0^2D_1}\quad。\quad(88)$$

则方程（71）的解为

$$\begin{aligned}\bar{W}_{\mathrm{S}}&=\bar{W}_{\mathrm{S}}^1+\bar{W}_{\mathrm{S}}^2\\&=(b_5\mathrm{e}^{g_7\bar{z}}+b_6\mathrm{e}^{-g_7\bar{z}})\mathrm{K}_0(g_8\bar{r})+b_7(\mathrm{e}^{g_1\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_1\bar{z}})\cdot\\&\quad\mathrm{K}_0(g_2\bar{r})+b_8(\mathrm{e}^{g_3\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_3\bar{z}})\mathrm{K}_0(g_4\bar{r})\quad。\end{aligned}\quad(89)$$

联系到 $\Theta=\frac{\partial\bar{U}_{\mathrm{S}}}{\partial\bar{r}}+\frac{\bar{U}_{\mathrm{S}}}{\bar{r}}+\frac{\partial\bar{W}_{\mathrm{S}}}{\partial\bar{z}}$，将 $\bar{U}_{\mathrm{S}}$，$\bar{W}_{\mathrm{S}}$ 代入整理后可推得 $g_6=g_8$，$g_5=g_7$，$g_7b_5=g_6d_5$，$g_6d_6=-g_7b_6$，$g_3b_8=g_4d_8$，$g_1b_7-g_2d_7=\frac{\beta_1^2}{D_2}B_5$。

联立桩土体系边界条件式（49）整理上述参数关系可得 $b_5=b_6$，$d_5=-d_6$，则

$$\begin{aligned}\bar{U}_{\mathrm{S}}&=d_5(\mathrm{e}^{g_5\bar{z}}-\mathrm{e}^{-g_5\bar{z}})\mathrm{K}_1(g_6\bar{r})+d_7(\mathrm{e}^{g_1\bar{z}}-\mathrm{e}^{-g_1\bar{z}})\cdot\\&\quad\mathrm{K}_1(g_2\bar{r})+d_8(\mathrm{e}^{g_3\bar{z}}-\mathrm{e}^{-g_3\bar{z}})\mathrm{K}_1(g_4\bar{r})\quad,\end{aligned}\quad(90)$$

$$\begin{aligned}\bar{W}_{\mathrm{S}}&=b_5(\mathrm{e}^{g_5\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_5\bar{z}})\mathrm{K}_0(g_6\bar{r})+b_7(\mathrm{e}^{g_1\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_1\bar{z}})\cdot\\&\quad\mathrm{K}_0(g_2\bar{r})+b_8(\mathrm{e}^{g_3\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_3\bar{z}})\mathrm{K}_0(g_4\bar{r})\quad。\end{aligned}\quad(91)$$

将式（69）、（90）、（91）代入式（14）、（15）中整理后可得

$$\begin{aligned}\bar{U}_{\mathrm{L}}&=D_1[d_5(\mathrm{e}^{g_5\bar{z}}-\mathrm{e}^{-g_5\bar{z}})\mathrm{K}_1(g_6\bar{r})+(\frac{n^{\mathrm{L}}g_2B_5}{\mathrm{i}a_0\bar{S}_{\mathrm{v}}}+d_7)(\mathrm{e}^{g_1\bar{z}}-\\&\quad\mathrm{e}^{-g_1\bar{z}})\cdot\mathrm{K}_1(g_2\bar{r})+(\frac{n^{\mathrm{L}}g_4B_6}{\mathrm{i}a_0\bar{S}_{\mathrm{v}}}+d_8)(\mathrm{e}^{g_3\bar{z}}-\mathrm{e}^{-g_3\bar{z}})\mathrm{K}_1(g_4\bar{r})]\text{，}\end{aligned}\quad(92)$$

$$\begin{aligned}\bar{W}_{\mathrm{L}}&=D_1[b_5(\mathrm{e}^{g_5\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_5\bar{z}})\mathrm{K}_0(g_6\bar{r})+(b_7-\frac{n^{\mathrm{L}}g_1B_5}{\mathrm{i}a_0\bar{S}_{\mathrm{v}}})(\mathrm{e}^{g_1\bar{z}}+\\&\quad\mathrm{e}^{-g_1\bar{z}})\mathrm{K}_0(g_2\bar{r})+(b_8-\frac{n^{\mathrm{L}}g_3B_6}{\mathrm{i}a_0\bar{S}_{\mathrm{v}}})(\mathrm{e}^{g_3\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_3\bar{z}})\mathrm{K}_0(g_4\bar{r})]\text{。}\end{aligned}\quad(93)$$

将式（91）代入桩土体系边界条件式（50）中可推得

$$\left.\begin{aligned}g_1(\mathrm{e}^{\frac{g_1L}{r_0}}-\mathrm{e}^{-\frac{g_1L}{r_0}})&=\frac{f_{\mathrm{v}}}{\pi\bar{E}}(\mathrm{e}^{\frac{g_1L}{r_0}}+\mathrm{e}^{-\frac{g_1L}{r_0}}),\\g_3(\mathrm{e}^{\frac{g_3L}{r_0}}-\mathrm{e}^{-\frac{g_3L}{r_0}})&=\frac{f_{\mathrm{v}}}{\pi\bar{E}}(\mathrm{e}^{\frac{g_3L}{r_0}}+\mathrm{e}^{-\frac{g_3L}{r_0}}),\\g_5(\mathrm{e}^{\frac{g_5L}{r_0}}-\mathrm{e}^{-\frac{g_5L}{r_0}})&=\frac{f_{\mathrm{v}}}{\pi\bar{E}}(\mathrm{e}^{\frac{g_5L}{r_0}}+\mathrm{e}^{-\frac{g_5L}{r_0}})\text{。}\end{aligned}\right\}\quad(94)$$

为方便表述，引入统一符号 g_n，则

$$g_n=g_1=g_3=g_5=g_7\quad(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)\text{，}\quad(95)$$

将式（90）、（92）代入到桩土体系边界条件式（51）、（52）中整理可得

$$d_5\mathrm{K}_1(g_6)+d_7\mathrm{K}_1(g_2)+d_8\mathrm{K}_1(g_4)=0\quad,\quad(96)$$

$$\begin{aligned}&d_5\mathrm{K}_1(g_6)+\left(d_7+\frac{n^{\mathrm{L}}g_2B_5}{\mathrm{i}a_0\bar{S}_{\mathrm{v}}}\right)\mathrm{K}_1(g_2)+\\&\left(d_8+\frac{n^{\mathrm{L}}g_4B_6}{\mathrm{i}a_0\bar{S}_{\mathrm{v}}}\right)\mathrm{K}_1(g_4)=0\quad。\end{aligned}\quad(97)$$

联立式（96）、（97）可推得

$$B_6=-\frac{g_2\mathrm{K}_1(g_2)B_5}{g_4\mathrm{K}_1(g_4)}\quad,\quad(98)$$

$$d_5=-\left[\frac{(\bar{\lambda}^{\mathrm{S}}+\bar{\mu}^{\mathrm{S}})\frac{\beta_1^2}{D_2}-k_2}{\bar{\mu}^{\mathrm{S}}\beta_1^2+k_3}+\frac{k_2}{k_3}\right]\frac{g_2\mathrm{K}_1(g_2)B_5}{\mathrm{K}_1(g_6)}\text{。}\quad(99)$$

桩土接触面处土体剪应力为

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{zr}\big|_{\bar{r}=1}&=\left[\bar{\mu}^{\mathrm{S}}\left(\frac{\partial\bar{U}_{\mathrm{S}}}{\partial\bar{z}}+\frac{\partial\bar{W}_{\mathrm{S}}}{\partial\bar{r}}\right)\Big|_{\bar{r}=1}\right]\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\\&=\bar{\mu}^{\mathrm{S}}[(d_5g_5-b_5g_6)\mathrm{K}_1(g_6)(\mathrm{e}^{g_5\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_5\bar{z}})+\\&\quad(d_7g_1-b_7g_2)\mathrm{K}_1(g_2)(\mathrm{e}^{g_1\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_1\bar{z}})+\\&\quad(d_8g_3-b_8g_4)\mathrm{K}_1(g_4)(\mathrm{e}^{g_3\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_3\bar{z}})]\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\text{。}\end{aligned}\quad(100)$$

在桩土接触面处，土层对桩基的作用力 f_{s} 为剪应力 $\bar{\tau}_{rz}\big|_{\bar{r}=1}$ 沿桩周的积分，即

$$f_{\mathrm{s}}=F_{\mathrm{s}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=2\pi r_0\tau_{rz}\big|_{r=r_0}\quad,\quad(101)$$

将其无量纲化为

$$\frac{f_{\mathrm{s}}}{Gr_0}=\bar{F}_{\mathrm{s}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=2\pi\bar{\tau}_{rz}\big|_{\bar{r}=1}\quad。\quad(102)$$

1.3 摩擦桩桩顶竖向动力阻抗推导求解

假定匀质等截面弹性圆桩埋置在饱和两相匀质黏弹性半空间地基中，桩长为 L，半径为 r_0，密度为 ρ_{p}，弹性模量为 E_{P}。桩顶位置作用振幅为 P_0 的竖向谐和荷载 $p(t)=P_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，则桩基竖向振动动力控制方程为

$$E_{\mathrm{p}}\pi r_0^2\frac{\partial^2w_{\mathrm{p}}(t)}{\partial z^2}+f_{\mathrm{s}}=\rho_{\mathrm{p}}\pi r_0^2\frac{\partial^2w_{\mathrm{p}}(t)}{\partial t^2}\quad。\quad(103)$$

在稳态振动条件下，$w_{\mathrm{p}}(t)=W_{\mathrm{P}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，$f_{\mathrm{s}}=F_{\mathrm{s}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$。令 $\bar{W}_{\mathrm{P}}=\frac{W_{\mathrm{P}}}{r_0}$，$\bar{E}_{\mathrm{P}}=\frac{E_{\mathrm{P}}}{G}$，$\bar{\rho}_{\mathrm{p}}=\frac{\rho_{\mathrm{p}}}{\rho}$，$a_0=\sqrt{\frac{\rho}{G}}r_0\omega$，$\bar{P}_0=\frac{P_0}{Gr_0^2}$，同时结合桩基边界条件可得

$$\pi\bar{E}_{\mathrm{P}}\frac{\mathrm{d}\bar{W}_{\mathrm{P}}}{\mathrm{d}\bar{z}}\bigg|_{\bar{z}=\frac{L}{r_0}}=f_{\mathrm{v}}\bar{W}_{\mathrm{P}}\left(\frac{L}{r_0}\right)\quad,\quad(104)$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{W}_{\mathrm{P}}}{\mathrm{d}\bar{z}}\Big|_{\bar{z}=0}=\frac{\bar{P}_0}{\bar{E}_{\mathrm{P}}\pi}\quad,\quad(105)$$

$$\bar{E}_{\mathrm{P}}\pi\frac{\partial^2\bar{W}_{\mathrm{P}}}{\partial\bar{z}^2}+\bar{\rho}_{\mathrm{p}}\pi a_0^2\bar{W}_{\mathrm{P}}=-\bar{F}_{\mathrm{s}}\quad。\quad(106)$$

式（106）进一步可表示为

$$\frac{\partial^2\bar{W}_{\mathrm{P}}}{\partial\bar{z}^2}+\frac{\bar{\rho}_{\mathrm{p}}}{\bar{E}_{\mathrm{P}}}a_0^2\bar{W}_{\mathrm{P}}=-\frac{2}{\bar{E}_{\mathrm{P}}}\frac{\bar{\tau}_{rz}\big|_{\bar{r}=1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}\quad。\quad(107)$$

方程（107）为非齐次二阶常微分方程，其齐次方程的通解为

$$\overline{W}_{\mathrm{P}}^{1}=a_1\cos(\lambda\bar{z})+a_2\sin(\lambda\bar{z}) \quad , \tag{108}$$

式中，$\lambda=\sqrt{\dfrac{\overline{\rho}_{\mathrm{P}}}{\overline{E}_{\mathrm{P}}}}a_0$，$a_1$，$a_2$ 为待定系数。

方程（107）的特解形式可写为

$$\overline{W}_{\mathrm{P}}^{2}=Q\frac{\overline{\tau}_{rz}\big|_{\bar{r}=1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}} \quad , \tag{109}$$

式中，Q 为待定未知系数。

将剪应力 $\dfrac{\overline{\tau}_{rz}\big|_{\bar{r}=1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}$ 写成级数形式，有

$$\frac{\overline{\tau}_{rz}\big|_{\bar{r}=1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}=\sum_{n=1}^{\infty}Y_{1n}B_{5n}(\mathrm{e}^{g_n\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_n\bar{z}}) \quad , \tag{110}$$

式中，

$$Y_{1n}=\overline{\mu}^{\mathrm{S}}\left[\frac{g_n^2-g_{6n}^2}{g_n}k_5+(2k_4+\frac{2k_2}{k_3})g_n\right]g_{2n}\mathrm{K}_1(g_{2n}) \quad ,$$

$g_{2n}=g_2$，$g_{6n}=g_6$，$k_4=\dfrac{(\overline{\lambda}^{\mathrm{S}}+\overline{\mu}^{\mathrm{S}})\dfrac{\beta_1^2}{D_2}-k_2}{\overline{\mu}^{\mathrm{S}}\beta_1^2+k_3}$，$k_5=-(k_4+\dfrac{k_2}{k_3})$。

则特解式（109）可相应地表示为

$$\overline{W}_{\mathrm{P}}^{2}=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n(\mathrm{e}^{g_n\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_n\bar{z}}) \quad 。 \tag{111}$$

将式（111）代入方程（107）中整理后可推得

$$Q_n=\frac{-2Y_{1n}B_{5n}}{\overline{E}_{\mathrm{P}}g_n^2+\overline{\rho}_{\mathrm{P}}a_0^2} \quad 。 \tag{112}$$

则方程（107）的解为

$$\begin{aligned}\overline{W}_{\mathrm{P}}&=\overline{W}_{\mathrm{P}}^{1}+\overline{W}_{\mathrm{P}}^{2}\\&=a_1\cos(\lambda\bar{z})+a_2\sin(\lambda\bar{z})+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2Y_{1n}B_{5n}(\mathrm{e}^{g_n\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_n\bar{z}})}{\overline{E}_{\mathrm{P}}g_n^2+\overline{\rho}_{\mathrm{P}}a_0^2}\text{。}\end{aligned} \tag{113}$$

将桩土接触位置处土体竖向位移 $\overline{W}_{\mathrm{S}}(1,\ \bar{z})$ 写成级数形式有

$$\overline{W}_{\mathrm{S}}(1,\bar{z})=\sum_{n=1}^{\infty}Y_{2n}B_{5n}(\mathrm{e}^{g_n\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_n\bar{z}}) \quad 。 \tag{114}$$

式中，$Y_{2n}=\dfrac{g_{2n}g_{6n}k_5\mathrm{K}_1(g_{2n})\mathrm{K}_0(g_{6n})}{g_n\mathrm{K}_1(g_{6n})}-k_4g_n\mathrm{K}_0(g_{2n})-\dfrac{k_2g_ng_{2n}\mathrm{K}_1(g_{2n})\mathrm{K}_0(g_{4n})}{k_3g_{4n}\mathrm{K}_1(g_{4n})}$，$g_{4n}=g_4$。

将式（113）、（114）代入桩土体系边界条件式（53）中整理可得

$$a_1\cos(\lambda\bar{z})+a_2\sin(\lambda\bar{z})+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2Y_{1n}B_{5n}(\mathrm{e}^{g_n\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_n\bar{z}})}{\overline{E}_{\mathrm{P}}g_n^2+\overline{\rho}_{\mathrm{P}}a_0^2}=\sum_{n=1}^{\infty}Y_{2n}B_{5n}(\mathrm{e}^{g_n\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_n\bar{z}}) \quad 。 \tag{115}$$

由于函数 $(\mathrm{e}^{g_n\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_n\bar{z}})$ 在区间 $\left[0,\dfrac{L}{r_0}\right]$ 上具有正交性质，故将等式（115）两端同时乘以 $(\mathrm{e}^{g_m\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_m\bar{z}})$，然后在区间 $\left[0,\ \dfrac{L}{r_0}\right]$ 上积分，整理后可推得未知参数 B_{5n} 的表达式为

$$B_{5n}=X_{1n}a_1+X_{2n}a_2 \quad , \tag{116}$$

式中，

$$X_{1n}=\frac{\int_0^{\frac{L}{r_0}}\cos(\lambda\bar{z})(\mathrm{e}^{g_n\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_n\bar{z}})\mathrm{d}\bar{z}}{(Y_{2n}+\dfrac{2Y_{1n}}{\overline{E}_{\mathrm{P}}g_n^2+\overline{\rho}_{\mathrm{P}}a_0^2})(\dfrac{2L}{r_0}+\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2g_nL}{r_0}}-\mathrm{e}^{-\frac{2g_nL}{r_0}}}{2g_n})},$$

$$X_{2n}=\frac{\int_0^{\frac{L}{r_0}}\sin(\lambda\bar{z})(\mathrm{e}^{g_n\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_n\bar{z}})\mathrm{d}\bar{z}}{\left(Y_{2n}+\dfrac{2Y_{1n}}{\overline{E}_{\mathrm{P}}g_n^2+\overline{\rho}_{\mathrm{P}}a_0^2}\right)\left(\dfrac{2L}{r_0}+\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2g_nL}{r_0}}-\mathrm{e}^{-\frac{2g_nL}{r_0}}}{2g_n}\right)},$$

则方程（113）可写为

$$\begin{aligned}\overline{W}_{\mathrm{P}}=&a_1\left[\cos(\lambda\bar{z})+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2Y_{1n}X_{1n}(\mathrm{e}^{g_n\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_n\bar{z}})}{\overline{E}_{\mathrm{P}}g_n^2+\overline{\rho}_{\mathrm{P}}a_0^2}\right]+\\&a_2\left[\sin(\lambda\bar{z})+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2Y_{1n}X_{2n}(\mathrm{e}^{g_n\bar{z}}+\mathrm{e}^{-g_n\bar{z}})}{\overline{E}_{\mathrm{P}}g_n^2+\overline{\rho}_{\mathrm{P}}a_0^2}\right]\text{。}\end{aligned} \tag{117}$$

将式（117）代入到桩基边界条件式（104）、（105）中整理可得

$$\left.\begin{aligned}a_2&=\frac{\overline{P}_0}{\lambda\pi\overline{E}_{\mathrm{P}}}\ ,\\a_1&=\frac{a_2\left(\dfrac{f_{\mathrm{v}}X_6}{\pi\overline{E}_{\mathrm{P}}}-X_4\right)}{X_3-\dfrac{f_{\mathrm{v}}X_5}{\pi\overline{E}_{\mathrm{P}}}}\ \text{。}\end{aligned}\right\} \tag{118}$$

式中，$X_3=-\lambda\sin\left(\dfrac{\lambda L}{r_0}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{-2Y_{1n}X_{1n}g_n(\mathrm{e}^{\frac{g_nL}{r_0}}-\mathrm{e}^{-\frac{g_nL}{r_0}})}{\overline{E}_{\mathrm{P}}g_n^2+\overline{\rho}_{\mathrm{P}}a_0^2}$，$X_4=\lambda\cos\left(\dfrac{\lambda L}{r_0}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{-2Y_{1n}X_{2n}g_n(\mathrm{e}^{\frac{g_nL}{r_0}}-\mathrm{e}^{-\frac{g_nL}{r_0}})}{\overline{E}_{\mathrm{P}}g_n^2+\overline{\rho}_{\mathrm{P}}a_0^2}$，$X_5=\cos\left(\dfrac{\lambda L}{r_0}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{-2Y_{1n}X_{1n}(\mathrm{e}^{\frac{g_nL}{r_0}}+\mathrm{e}^{-\frac{g_nL}{r_0}})}{\overline{E}_{\mathrm{P}}g_n^2+\overline{\rho}_{\mathrm{P}}a_0^2}$，$X_6=\sin\left(\dfrac{\lambda L}{r_0}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{-2Y_{1n}X_{2n}(\mathrm{e}^{\frac{g_nL}{r_0}}+\mathrm{e}^{-\frac{g_nL}{r_0}})}{\overline{E}_{\mathrm{P}}g_n^2+\overline{\rho}_{\mathrm{P}}a_0^2}$。

至此，各方程的解中所含待定系数均已确定。

桩身任意一点的正应力可表示为

$$N(z)=E_{\mathrm{P}}\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{P}}}{\mathrm{d}z}=E_{\mathrm{P}}\frac{\mathrm{d}\overline{W}_{\mathrm{P}}}{\mathrm{d}\overline{z}}$$

$$=E_{\mathrm{P}}a_1\left[-\lambda\sin(\lambda\overline{z})+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2Y_{1n}X_{1n}g_n(\mathrm{e}^{g_n\overline{z}}-\mathrm{e}^{-g_n\overline{z}})}{\overline{E}_{\mathrm{P}}g_n^2+\overline{\rho}_{\mathrm{p}}a_0^2}\right]+$$

$$E_{\mathrm{P}}a_2\left[\lambda\cos(\lambda\overline{z})+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2Y_{1n}X_{2n}g_n(\mathrm{e}^{g_n\overline{z}}-\mathrm{e}^{-g_n\overline{z}})}{\overline{E}_{\mathrm{P}}g_n^2+\overline{\rho}_{\mathrm{p}}a_0^2}\right]。\quad(119)$$

则桩顶竖向动力阻抗为

$$K_{\mathrm{d}}(a_0)=\frac{\pi r_0^2N(0)}{W_{\mathrm{P}}(0)}=\frac{\pi r_0^2N(0)}{r_0\overline{W}_{\mathrm{P}}(0)}=\frac{\pi r_0E_{\mathrm{P}}\lambda a_2}{a_1X_7+a_2X_8}，\quad(120)$$

式中，$X_7=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4Y_{1n}X_{1n}}{\overline{E}_{\mathrm{P}}g_n^2+\overline{\rho}_{\mathrm{p}}a_0^2}$，$X_8=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4Y_{1n}X_{2n}}{\overline{E}_{\mathrm{P}}g_n^2+\overline{\rho}_{\mathrm{p}}a_0^2}$。

定义无量纲桩顶竖向动力阻抗为

$$\overline{K}_{\mathrm{d}}(a_0)=\frac{K_{\mathrm{d}}(a_0)}{Gr_0}=\frac{\pi\overline{E}_{\mathrm{P}}\lambda a_2}{a_1X_7+a_2X_8}\quad。\quad(121)$$

若令 $\overline{K}_{\mathrm{d}}=K_{\mathrm{v}}+\mathrm{i}C_{\mathrm{v}}$，则 $K_{\mathrm{v}}=\mathrm{real}(\overline{K}_{\mathrm{d}})$，表示桩顶实际动刚度；$C_{\mathrm{v}}=\mathrm{imag}(\overline{K}_{\mathrm{d}})$，表示桩顶振动辐射阻尼以及孔液和土骨架相对运动时产生的阻尼。

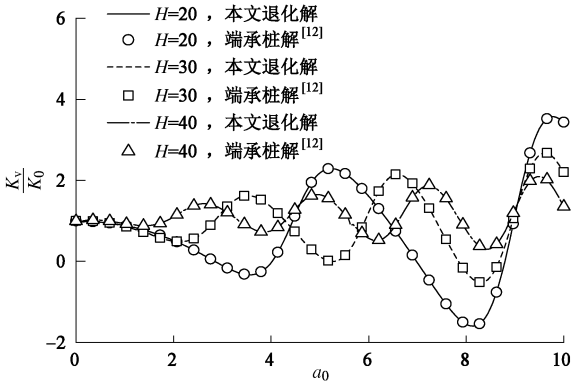
2 数值算例分析

算例基于图 1 所示力学模型与坐标系统，采用前述推导求解的饱和黏弹性半空间地基中摩擦桩的竖向动力阻抗模型，具体土层参数取值为：土体剪切模量 $G=20$ MPa，泊松比 $\nu=0.2$，土体孔隙率 $n^{\mathrm{L}}=0.4$，土体渗透系数 $k^{\mathrm{L}}=9\times10^{-7}$ m/s，土体密度 $\rho^{\mathrm{S}}=1800$ kg/m^3，孔液密度 $\rho^{\mathrm{L}}=1000$ kg/m^3。桩基弹性模量 $E_{\mathrm{P}}=20$ GPa，密度 $\rho_{\mathrm{p}}=2500$ kg/m^3。为便于对比分析，各图中的桩顶动刚度随激振频率变化曲线均做了归一化处理。

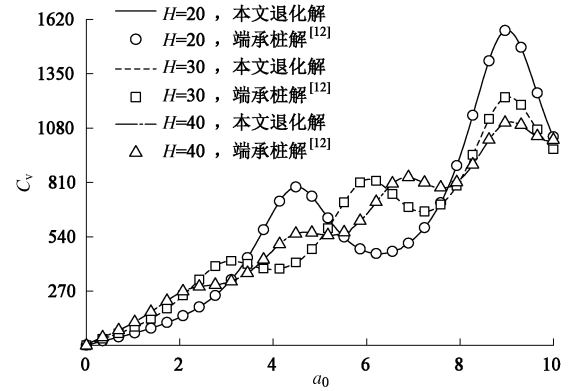
2.1 解的验证与比较

为验证本文所推导饱和黏弹性半空间地基中摩擦桩竖向动力阻抗模型的正确性，令 $f_{\mathrm{v}}\to\infty$ 将本文结果退化为桩底为刚性基岩支承时的解与文献[12]中的相应端承桩解进行比较分析，如图 2 所示。从图中可以看出，在不同桩长径比($H=L/r_0$)时，本文与文献[12]中对应计算结果的动力阻抗曲线吻合较好，从而在一定程度上反映了本文所推导计算模型的合理性与正确性。

图 3 所示为本文摩擦桩桩顶动力阻抗随激振频率的变化曲线与文献[12]端承桩相应曲线的对比情况。从图 3 中不难看出，饱和黏弹性半空间中摩擦桩桩顶动力阻抗亦随激振频率呈波动状变化，存在显著的共振现象。但由于考虑了桩与桩底土的动力相互作用，摩擦桩桩顶动力阻抗的变化规律与端承桩的相比存在显著差异。具体地，摩擦桩桩顶动力阻抗共振频率明显小于端承桩的；其中刚度共振峰值比端承桩的大很多，而阻尼的则比其小得多。



(a) 归一化动刚度

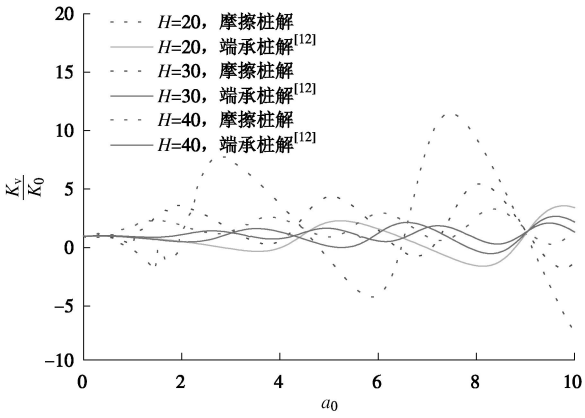


(b) 振动阻尼

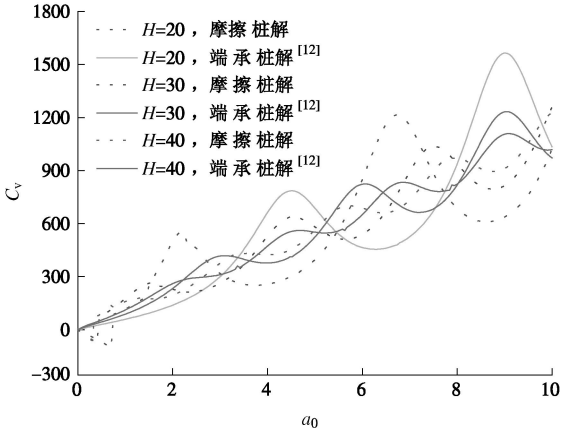
图 2 桩顶退化动力阻抗随激振频率变化曲线对比情况

Fig. 2 Comparison of curves of degenerative dynamic impedance of pile cap versus excitation frequency

图 4 所示为本文考虑桩底土层波动效应的摩擦桩解与李强等[52]未考虑此效应的相应解对比情况。为方便对比，图中还令 $\overline{S}_{\mathrm{v}}\to0$ 和 $\overline{\rho}^{\mathrm{L}}\to0$ 将本文解退化为单相介质解与李强相应退化解进行比较。从图 4 中可见，对于单相介质而言，本文考虑桩底土层波动效应的退化解与李强等[52]不考虑此效应的退化解仅在较高频率阶段有明显差异，由此也可从另一侧面反映本



(a) 归一化动刚度

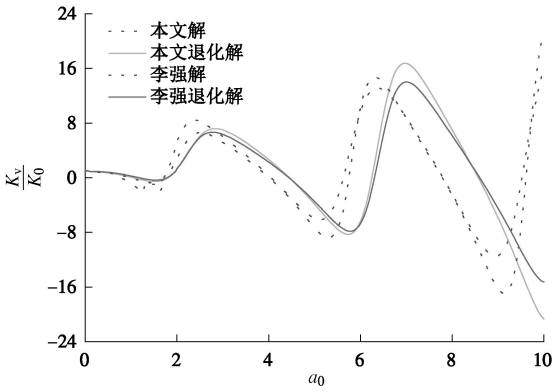


（b）振动阻尼

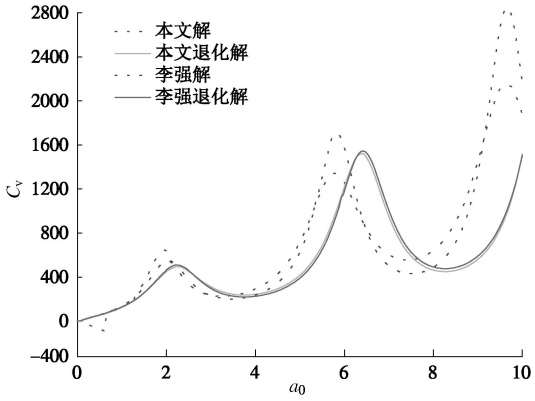
图 3 本文摩擦桩解与端承桩解[12]对比情况

Fig. 3 Comparison of solutions of floating piles in present paper and end bearing piles[12]

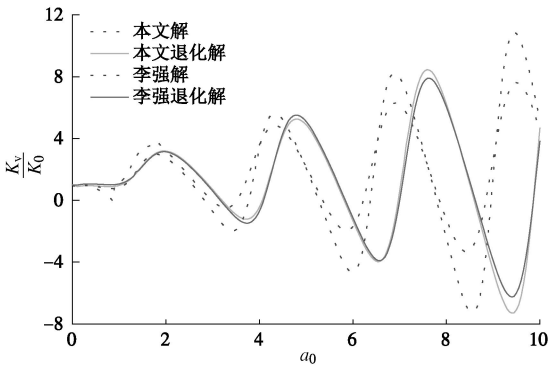
文推导的合理性。而对于饱和土而言，二者结果差异显著。具体表现为：对于其共振频率，在桩长较短的情况下，本文结果比起李强等[52]结果明显偏小；而当桩长较长时，桩底土层波动效应对此基本没有影响。特别地，对于其共振峰值，在低频阶段，本文结果比李强结果明显要大，在高频阶段，则显著小于李强结果。显然，对于饱和土中桩基振动问题，桩底土层波动效应影响显著，不容忽视。



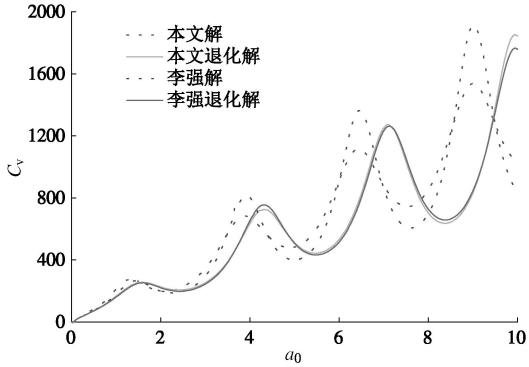
（a）归一化动刚度，H=20



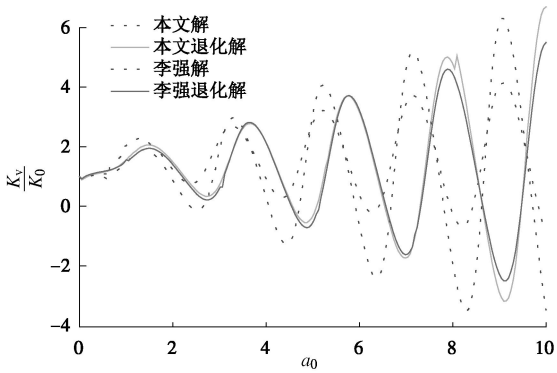
（b）振动阻尼，H=20



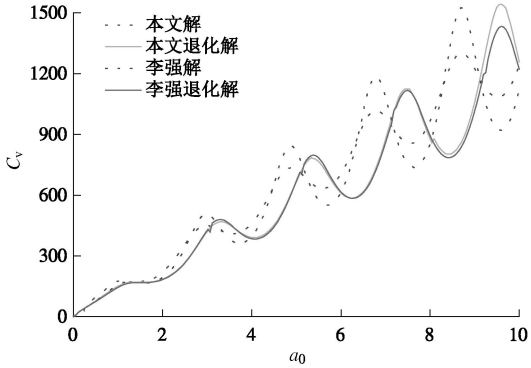
（c）归一化动刚度，H=30



（d）振动阻尼，H=30



（e）归一化动刚度，H=40



（f）振动阻尼，H=40

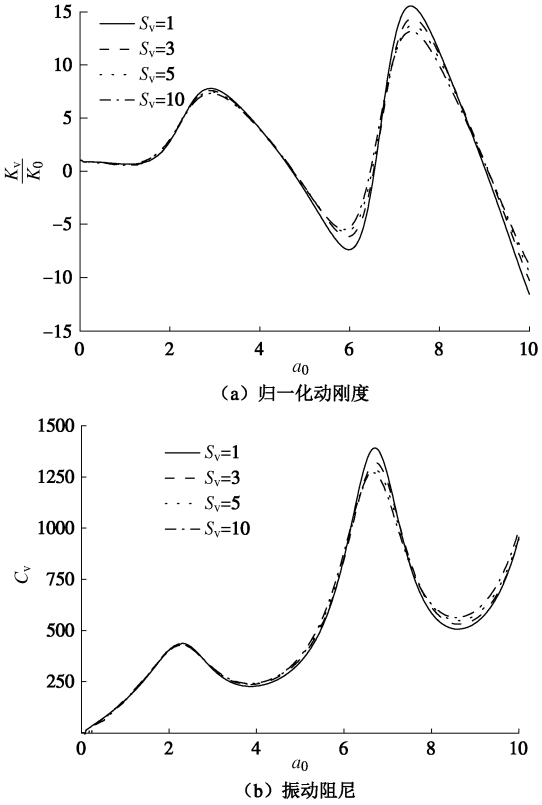
图 4 本文摩擦桩解与李强解[52]对比情况

Fig. 4 Comparison of solutions of floating piles in present paper and Li's[52]

2.2　桩顶动力阻抗的影响因素分析

图 5 所示为不同液固耦合系数对应的桩顶动力阻

抗随激振频率曲线变化情况。从图 5 中可见，桩顶动力阻抗随激振频率关系曲线均呈波动状变化，反映了饱和土桩振动系统在谐和荷载作用下存在共振现象，且激振频率越大，此波动变异性越大。液固耦合系数的变化仅在高频激振阶段对桩顶动力阻抗共振峰值有显著影响，具体表现为同一激振频率对应的桩顶动力阻抗共振峰值随着液固耦合系数的增大而减小，相应减小幅度亦随之逐渐减小，当液固耦合系数较大时，其变化对桩顶动力阻抗基本上没有影响。显然这是由于液固耦合系数较大时，地基土中孔液运动受限，孔压来不及消散的结果。



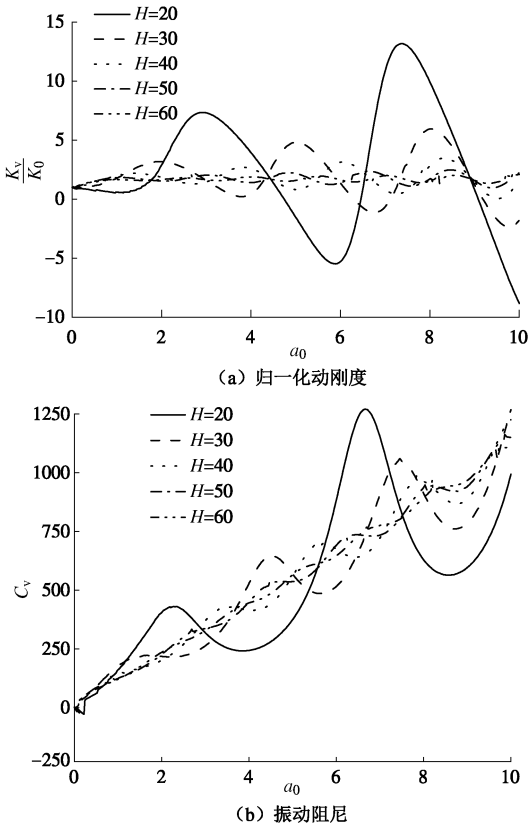
（a）归一化动刚度

（b）振动阻尼

图 5 不同液固耦合系数时的桩顶动力阻抗与激振频率关系曲线

Fig. 5 Curves of dynamic impedance of pile cap with excitation frequency corresponding to different liquid-solid coupled coefficients

图 6 所示为不同桩长径比对应的桩顶动力阻抗随激振频率曲线变化情况。由图 6 可见，随着桩长径比的增大，桩顶动力阻抗的共振频率和共振峰值均显著减小。但当桩长增加到一定程度时，其变化对桩顶动力阻抗的影响已很小。显然，桩基存在一临界桩长，超过此桩长，桩顶动力阻抗对其变化的响应很小。在相关工程实践中可通过适当增加桩长来减弱桩基随激振荷载的共振现象，从而改善饱和土桩振动系统的动力特性。



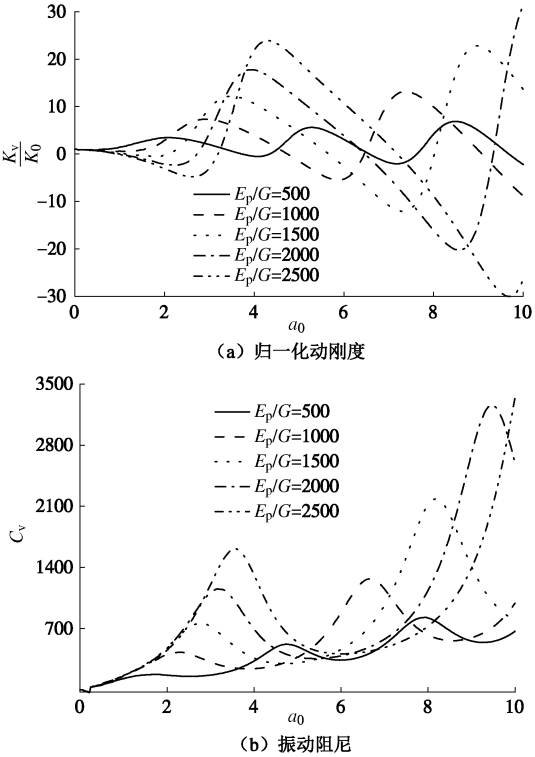
（a）归一化动刚度

（b）振动阻尼

图 6 不同桩长径比时的桩顶动力阻抗与激振频率关系曲线

Fig. 6 Curves of dynamic impedance of pile cap with excitation frequency corresponding to different length-radius ratios of pile

图 7 所示为不同桩土模量比对应的桩顶动力阻抗随激振频率曲线变化情况。不难看出，桩土相对刚度



（a）归一化动刚度

（b）振动阻尼

图 7 不同桩土模量比时的桩顶动力阻抗与激振频率关系曲线

Fig. 7 Curves of dynamic impedance of pile cap with excitation frequency corresponding to different modulus ratios of pile-soil

的变化对桩顶动力阻抗影响显著。随着桩土模量比的增大，桩顶动力阻抗的共振频率和相应共振峰值均显著增大。显而易见，在饱和地基中柔性摩擦桩较刚性摩擦桩具有更好的抗振性能，不易出现显著的共振现象。

图 8 所示为不同土体黏滞阻尼系数对应的桩顶动力阻抗随激振频率曲线变化情况。从图 8 中可见，土体黏滞阻尼系数不影响桩顶动力阻抗随激振频率的曲线变化规律，仅对桩顶动力阻抗共振峰值有明显影响。具体表现为随着土体黏滞阻尼系数的增大，桩顶动力阻抗共振峰值呈减小趋势，且相应减小幅度亦随之减小。当土体黏滞阻尼系数较大时，同一激振频率对应的桩顶动力阻抗已基本上不受其变化的影响。

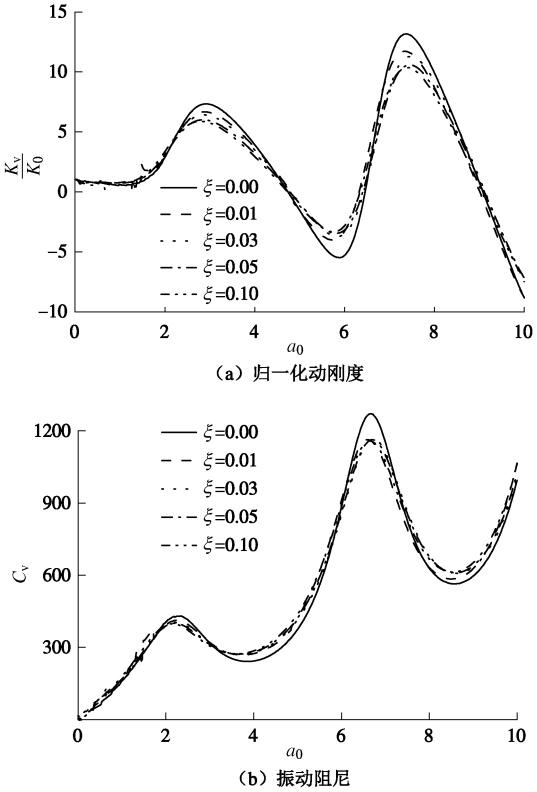


图 8 不同土体黏滞阻尼系数时的桩顶动力阻抗与激振频率关系曲线

Fig. 8 Curves of dynamic impedance of pile cap with excitation frequency corresponding to different viscous damping coefficients of soil

3 结　　论

本文基于 Boer 多孔介质动力控制方程组，考虑桩底土层波动效应，采用 Hankel 积分变换和微分算子分解理论求解相关方程得到桩底、桩侧反力，进而建立饱和土中桩基竖向振动偏微分方程，结合桩土接触面混合边值条件推导得出了饱和黏弹性半空间地基中摩擦桩桩顶竖向动力阻抗解析表达式。并在此基础上进一步通过数值算例对比分析探讨了液固耦合系数、桩长径比、桩土模量比、地基土黏滞阻尼系数这些重要因素对所得桩顶动力阻抗的影响规律，得到了以下 4 点结论。

（1）通过对所得解析解分别退化为桩底为刚性基岩支承情况和单相介质情况与已有研究的对比分析，一定程度上证明了所提出摩擦桩振动模型的合理性。本文解可视为单相介质中摩擦桩振动和饱和土中端承桩振动的扩展，且对所得解进行相应的参数退化可方便地分析不同情况下的桩土动力相互作用问题。

（2）与已有对端承桩的研究结果相比，饱和黏弹性半空间中摩擦桩桩顶动力阻抗亦随激振频率呈波动状变化，存在显著的共振现象。但由于考虑了桩与桩底土的动力相互作用，摩擦桩桩顶动力阻抗的变化规律与端承桩的相比存在显著差异。具体而言，摩擦桩桩顶动力阻抗共振频率明显小于端承桩的。其中刚度共振峰值比端承桩的大很多，而阻尼的则比其小得多。

（3）桩底土层的波动效应对饱和半空间中摩擦桩的竖向振动具有显著影响。不考虑此效应将会在低频阶段低估共振峰值，而在高频阶段则高估共振峰值。在进行饱和土中摩擦桩的抗振设计时，桩底土层的波动效应不容忽视。

（4）桩长径比的增大和桩土模量比的减小对摩擦桩桩顶动力阻抗的影响规律与对端承桩的类似，均减小其共振频率和共振峰值，且存在临界桩长的概念。液固耦合系数和土体黏滞阻尼系数的增大对桩顶动力阻抗的共振峰值起减小作用，且前者的影响仅在高频阶段较为明显。然此二者的影响程度是有限的，当其增大到一定程度时，桩顶动力阻抗已基本上无变化。相较于端承桩[12]，由于考虑了桩底土体的作用摩擦桩桩顶动力阻抗对液固耦合系数和土体黏滞阻尼系数在影响范围内的变化要更为敏感。

参考文献：

[1] JIN B, ZHOU D, ZHONG Z. Lateral dynamic compliance of pile embedded in poroelastic half space[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2001, **21**: 519－525.

[2] LU J F, JENG D S, NIE W D. Dynamic response of a pile embedded in a porous medium subjected to plane SH waves[J]. Computers and Geotechnics, 2006, **33**: 404－418.

[3] CHEN G, CAI Y Q, LIU F Y, et al. Dynamic response of a pile in a transversely isotropic saturated soil to transient tensional loading[J]. Computers and Geotechnics, 2007, **34**(8): 1－5.

[4] 陆建飞. 频域内半空间饱和土中水平受荷桩的动力分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, **21**(4): 577－581. (LU Jian-fei. Dynamic frequency domain analysis on laterally loaded pile in saturated soil[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2002, **21**(4): 577－581. (in Chinese))

[5] 陆建飞, 聂卫东. 饱和土中单桩在瑞利波作用下的动力响应[J]. 岩土工程学报, 2008, **30**(2): 225－231. (LU Jian-fei, NIE Wei-dong. Dynamic response of single pile embedded in half-space saturated soil subjected to Rayleigh waves[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, **30**(2): 225－231. (in Chinese))

[6] 杨 军, 宋二祥, 陈肇元. 桩在饱和土中水平振动的辐射阻尼简化算法[J]. 岩土力学, 2002, **23**(2): 179－183. (YANG Jun, SONG Er-xiang, CHEN Zhao-yuan. Simple radiation damping model for horizontally vibrating pile in saturated soil[J]. Rock and Soil Mechanics, 2002, **23**(2): 179－183. (in Chinese))

[7] 张智卿, 王奎华, 谢康和. 饱和土层中桩的扭转振动响应分析[J]. 浙江大学学报, 2006, **40**(7): 1211－1218. (ZHANG Zhi-qing, WANG Kui-hua, XIE Kang-he. Study on torsional vibration of pile embedded in saturated soil[J]. Journal of Zhejiang University, 2006, **40**(7): 1211－1218. (in Chinese))

[8] 李 强, 王奎华, 谢康和. 饱和土中端承桩纵向振动特性研究[J]. 力学学报, 2004, **36**(4): 435－442. (LI Qiang, WANG Kui-hua, XIE Kang-he. Vertical vibration of an end bearing pile embedded in saturated soil[J]. Acta Mechanica Sinica, 2004, **36**(4): 435－442. (in Chinese))

[9] 李 强, 王奎华, 谢康和. 饱和土中大直径嵌岩桩纵向振动特性研究[J]. 振动工程学报, 2005, **18**(4): 500－505. (LI Qiang, WANG Kui-hua, XIE Kang-he. Dynamic response for vertical vibration of large diameter pile in saturated soil[J]. Journal of Vibration Engineering, 2005, **18**(4): 500－505. (in Chinese))

[10] 李 强. 饱和土中端承桩非完全黏结下的竖向振动特性[J]. 水利学报, 2007, **38**(3): 349－354. (LI Qiang. Vertical vibration of piles embedded in saturated soil considering the imperfect contact[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2007, **38**(3): 349－354. (in Chinese))

[11] 尚守平, 余 俊, 王海东, 等. 饱和土中桩水平振动分析[J]. 岩土工程学报, 2007, **29**(11): 1696－1702. (SHANG Shou-ping, YU Jun, WANG Hai-dong, et al. Horizontal vibration of piles in saturated soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, **29**(11): 1696－1702. (in Chinese))

[12] 刘林超, 杨 骁. 基于多孔介质理论的饱和土-桩纵向耦合振动研究[J]. 土木工程学报, 2009, **42**(9): 89－95. (LIU Lin-chao, YANG Xiao. Study of vertical coupled vibrations of piles in saturated soils using porous medium theory[J]. China Civil Engineering Journal, 2009, **42**(9): 89－95. (in Chinese))

[13] 刘林超, 苏子平. 层状饱和土中单桩纵向振动分析[J]. 公路交通科技, 2010, **27**(12): 5－9. (LIU Lin-chao, SU Zi-ping. Analysis of vertical vibration of single pile in layered saturated soil[J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2010, **27**(12): 5－9. (in Chinese))

[14] 刘林超, 闫启方. 饱和土中管桩的纵向振动特性[J]. 水力学报, 2011, **42**(3): 366－378. (LIU Lin-chao, YAN Qi-fang. Vertical vibration characteristics of pipe pile in saturated soil[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2011, **42**(3): 366－378. (in Chinese))

[15] 杨 骁, 唐 洁. 成层饱和土中考虑横向惯性的单桩纵向振动[J]. 岩土力学, 2013, **34**(6): 1560－1566. (YANG Xiao, TANG Jie. Vertical vibration of single pile with transversal inertia effect in stratified saturated soil[J]. Rock and Soil Mechanics, 2013, **34**(6): 1560－1566. (in Chinese))

[16] 杨 骁, 刘 慧, 蔡雪琼. 端承黏弹性桩纵向振动的轴对称解析解[J]. 固体力学学报, 2012, **33**(4): 423－430. (YANG Xiao, LIU Hui, CAI Xue-qiong. Axisymmetrical analytical solution for vertical vibration of end-bearing viscoelastic pile[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2012, **33**(4): 423－430. (in Chinese))

[17] 杨 骁, 蔡雪琼. 考虑横向效应饱和黏弹性土层中桩的纵向振动[J]. 岩土力学, 2011, **32**(6): 1857－1863. (YANG Xiao, CAI Xue-qiong. Vertical vibration of pile in saturated viscoelastic soil layer considering transversal effects[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, **32**(6): 1857－1863. (in Chinese))

[18] 王小岗. 横观各向同性饱和土中柱面载荷的动力 Green 函数[J]. 力学学报, 2010, **42**(5): 909－918. (WANG Xiao-gang. Dynamic Green's function for internal barrel loads in transversely isotropic saturated soils[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2010, **42**(5): 909－918. (in Chinese))

[19] 闫启方, 刘林超. 基于多孔介质理论的饱和土中单桩的扭转复刚度研究[J]. 岩土工程学报, 2010, **32**(9): 1460－1463. (YAN Qi-fang, LIU Lin-chao. Torsional complex stiffness of single pile in saturated soil based on theory of porous medium[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering,

2010, **32**(9): 1460－1463. (in Chinese))

[20] 闫启方, 刘林超. 考虑波动效应的 SH 简谐地震波作用下单桩水平振动研究[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(8): 1483－1487. (YAN Qi-fang, LIU Lin-chao. Lateral vibration of a single pile under SH harmonic seismic waves considering three-dimensional wave effect[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(8): 1483－1487. (in Chinese))

[21] 秦世伟, 莫　泷, 史蕙质. 轴力作用下液化土中端承桩的水平振动特性[J]. 岩土力学, 2013, **34**(4): 987－995. (QIN Shi-wei, MO Long, SHI Hui-zhi. Characteristics of horizontal vibration of end-bearing piles in liquefied soils under axial force[J]. Rock and Soil Mechanics, 2013, **34**(4): 987－995. (in Chinese))

[22] 王建华, 陆建飞, 王卫东, 等. 移动荷载作用下饱和土中单桩的动力响应[J]. 岩土力学, 2007, **28**: 693－697. (WANG Jian-hua, LU Jian-fei, WANG Wei-dong, et al. Dynamic response of a single pile embedded in a poroelastic soil to moving loads[J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, **28**: 693－697. (in Chinese))

[23] 王国才, 丁翠红, 王　哲, 等. 层状地基中单桩扭转振动特性分析[J]. 计算力学学报, 2009, **26**(5): 715－721. (WANG Guo-cai, DING Cui-hong, WANG Zhe, et al. Study on the torsional oscillations of single pile embedded in layered foundation[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2009, **26**(5): 715－721. (in Chinese))

[24] 陈　刚, 蔡袁强, 徐长节. 双层饱和弹性土中埋置弹性桩的扭转振动[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2008, **40**(12): 2029－2034. (CHEN Gang, CAI Yuan-qiang, XU Chang-jie. Torsional vibration of elastic pile embedded in a two-layer poroelastic medium[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2008, **40**(12): 2029－2034. (in Chinese))

[25] 李　强, 王奎华, 谢康和. 饱和土桩纵向振动引起土层复阻抗分析研究[J]. 岩土工程学报, 2004, **26**(5): 679－683. (LI Qiang, WANG Kui-hua, XIE Kang-he. Study on resistance factor of saturated soil caused by longitudinal vibration of pile[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, **26**(5): 679－683. (in Chinese))

[26] 李　强, 郑　辉, 王奎华. 饱和土中摩擦桩竖向振动解析解及应用[J]. 工程力学, 2011, **28**(1): 157－170. (LI Qiang, ZHENG Hui, WANG Kui-hua. Analytical solution and its application of vertical vibration of a friction pile in saturated soil[J]. Engineering Mechanics, 2011, **28**(1): 157－170. (in Chinese))

[27] 王桂敏, 李　强, 王奎华. 单层饱和土中桩竖向振动简化模型及其解析解[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, **25**(2): 4233－4240. (WANG Gui-min, LI Qiang, WANG Kui-hua. Simplified model for vertical vibration of pile in single-layer saturated soil and its analytical solution[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, **25**(2): 4233－4240. (in Chinese))

[28] 丁伯阳, 童晓刚, 陈　军, 等. 排水状态下饱和土中基桩动力特性分析[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(1): 85－95. (DING Bo-yang, TONG Xiao-gang, CHEN Jun, et al. Dynamic properties of a single pile in saturated soil under drainage[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(1): 85－95. (in Chinese))

[29] 靳建明, 张智卿, 王奎华, 等. 任意形式荷载作用下饱和土中桩的扭转振动特性研究[J]. 振动与冲击, 2010, **29**(7): 50－54. (JIN Jian-ming, ZHANG Zhi-qing, WANG Kui-hua, et al. Dynamic torsional response of a pile embedded in porous-saturated soil under arbitrary transient loading[J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, **29**(7): 50－54. (in Chinese))

[30] 程泽海, 李　强, 郑　辉, 等. 桩侧扰动分区饱和土中桩竖向振动特性研究[J]. 计算力学学报, 2011, **28**(4): 553－559. (CHENG Ze-hai, LI Qiang, ZHENG Hui, et al. Vertical vibration of pile in saturated soil considering the disturbed radial zone by pile driving[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2011, **28**(4): 553－559. (in Chinese))

[31] 吴文兵. 基于虚土桩法的桩土纵向耦合振动理论及应用研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2012. (WU Wen-bing. Vertical vibration theory of pile-soil system based on fictitious soil pile method and its application[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2012. (in Chinese))

[32] 王　宁. 改进的虚土桩法及其在非等截面桩纵向振动中的应用研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2013. (WANG Ning. Investigation of improved fictitious soil pile method and its application in longitudinal vibration problems of piles with nonconstant cross sections[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2013. (in Chinese))

[33] 胡秀青. 饱和地基中埋置基础的动力振动特性研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2009. (HU Xiu-qing. Study on the dynamic vibrations of embedded foundation in poroelastic soil[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2009. (in Chinese))

[34] EDELMAN I, WILMANSKI K. Asymptotic analysis of surface waves at vacuum/porous medium and liquid/porous

medium interfaces[J]. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2002, **14**: 25 – 44.

[35] BOER D R. Contemporary progress in porous media theory[J]. Applied Mechanics Reviews, 2000, **53**(12): 323 – 370.

[36] BOER D R. Compressible and incompressible porous media-a new approach[R]. GH Essen: Report MECH92/1, FB 10/Mechanik, University at-GH Essen, 1992.

[37] BOER D R. Highlights in the historical development of the porous media theory: toward a consistent macroscopic theory[J]. Applied Mechanics Reviews, 1996, **49**(4): 201 – 262.

[38] BOER D R, EHLERS W. Uplift, friction and capillarity-three fundamental effects for liquid-saturated porous solids[J]. International Journal of Solids and Structures, 1990, **26**: 43 – 57.

[39] BOER D R, EHLERS W, LIU Z F. One-dimensional transient wave propagation in fluid saturated porous media[J]. Archive of Applied Mechanics, 1993, **63**(1): 59 – 72.

[40] BOER D R, LIU Z F. Plane waves in a semi-infinite fluid saturated porous medium[J]. Transport in Porous Media, 1994, **16**(2): 147 – 173.

[41] BOER D R, LIU Z F. Propagation of acceleration waves in incompressible liquid-saturated porous solids[J]. Transport in Porous Media, 1996, **21**(2): 163 – 173.

[42] BOER D R, LIU Z F. Growth and decay of acceleration waves in incompressible saturated porous elastic solids[J]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1996, **76**(6): 341 – 347.

[43] 刘占芳, 李德源, 严 波. 饱和多孔介质中的非均匀平面波[J]. 岩土力学, 1999, **20**(4): 31 – 35. (LIU Zhan-fang, LI De-yuan, YAN Bo. Inhomogeneous plane waves in a saturated porous medium[J]. Rock and Soil Mechanics, 1999, **20**(4): 31 – 35. (in Chinese))

[44] 杨 骁, 车京兰. 饱和黏弹性多孔介质中的平面波及能量耗散[J]. 力学学报, 2005, **37**(5): 579 – 585. (YANG Xiao, CHE Jing-lan. Plane waves and their energy dissipations in a saturated viscoelastic porous medium[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2005, **37**(5): 579 – 585. (in Chinese))

[45] 张 燕, 杨 骁. 不可压饱和黏弹性多孔介质中的 Rayleigh 波[J]. 上海大学学报, 2007, **13**(1): 62 – 67. (ZHANG Yan, YANG Xiao. Rayleigh wave in an incompressible saturated viscoelastic porous medium[J]. Journal of Shanghai University, 2007, **13**(1): 62 – 67. (in Chinese))

[46] 郑云英, 杨 骁. 流体饱和标准线性黏弹性多孔介质中的平面波[J]. 固体力学学报, 2005, **26**(2): 203 – 206. (ZHENG Yun-ying, YANG Xiao. Plane waves in liquid-saturated viscoelastic porous medium[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2005, **26**(2): 203 – 206. (in Chinese))

[47] NOVAK M, BEREDUGO Y. Vertical vibration of embedded footings[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1972, **98**(12): 1291 – 1310.

[48] BARANOV V A. On the calculation of excited vibrations of an embedded foundation(in Russian)[J]. Polytechnical Institute of Riga: Voprosy Dynamiki: Prochnocti, 1967, **14**(5): 195 – 207.

[49] SNEDDON, IAN H. The use of integral transforms[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1972.

[50] TRANTER C J. On some dual integral equations occurring in potential problems with axial symmetry[J]. Quartly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1950, **3**: 411 – 419.

[51] NOBEL B. The solution of Bessel-function dual integral equations by a multiplying-factor method[J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1963, **59**: 351 – 362.

[52] 李 强, 王奎华. 饱和土中桩竖向耦合振动理论与应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2010: 1 – 147. (LI Qiang, WANG Kui-hua. The theory on vertical coupled vibration of pile in saturated soil and its application[M]. Beijing: China WaterPower Press, 2010: 1 – 147. (in Chinese))

[53] SENJUNTICHAI T, RAJAPAKSE R K N D. Transient response of a circular cavity in a poroelastic medium[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1993, **17**: 357 – 383.