

DOI: 10.11779/CJGE201502013

考虑级配效应的粒状材料本构模拟

刘映晶^{1, 2, 3}, 王建华¹, 尹振宇^{1, 2*}, 李 罡^{2, 4}, 夏小和¹

(1. 上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院土木工程系, 上海 200240; 2. 南特中央理工大学土木与力学学院, 法国 南特 44300;
3. 上海市隧道工程轨道交通设计研究院, 上海 200235; 4. 济南轨道交通集团有限公司, 山东 济南 250101)

摘 要: 粒状材料被广泛应用于岩土工程中, 其颗粒级配变化特性会影响材料的力学性能特别是承载力特性。为了更好地描述级配对粒状材料力学性能的影响, 基于弹塑性力学和临界状态土力学, 将依赖颗粒级配的临界状态线引入到一个简单的本构模型中。应用此模型来模拟不同粒状材料 (DEM 理想球体、人工材料玻璃球和天然砂土 Hostun 砂) 的三轴排水/不排水实验。结果表明: 此模型仅采用一组级配相关的临界状态参数就可以统一描述不同颗粒级配粒状材料的力学响应。

关键词: 颗粒级配; 粒状材料; 本构模型; 临界状态

中图分类号: TU43 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000 - 4548(2015)02 - 0299 - 07

作者简介: 刘映晶 (1985 -), 男, 广东汕头人, 博士, 主要从事土体本构关系及地下工程等方面的研究。E-mail: liuyj301@gmail.com。

Constitutive modeling for granular materials considering grading effect

LIU Ying-jing^{1, 2, 3}, WANG Jian-hua¹, YIN Zhen-yu^{1, 2}, LI Gang^{2, 4}, XIA Xiao-he¹

(1. Department of Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China; 2. Research Institute in Civil and Mechanical Engineering, UMR CNRS, 6183, Ecole Centrale Nantes, Nantes 44300, France; 3. Shanghai Tunnel Engineering & Rail Transit Design and Research Institute, Shanghai 200235, China; 4. Jinan Rail Transit Group Co., Ltd., Jinan 250101, China)

Abstract: The granular materials are widely used in geotechnical engineering, whose grading changing feature will affect their mechanical behavior obviously, especially the bearing capacity. In order to well describe the influence of grain-size distribution on the mechanical behavior of granular materials, a simple constitutive model taking into account the grading-dependent critical state line is developed within the framework of elasto-plasticity and the critical state theory. The model is used to simulate the drained and undrained triaxial compression tests on different types of granular materials (DEM ideal sphere, artificial material glass ball and natural material Hostun sand). It is found that only one group of grading-dependent critical state parameters is needed for describing the mechanical response of granular materials with different gradings.

Key words: grain-size distribution; granular material; constitutive model; critical state

0 引 言

粒状土材料广泛应用于岩土工程中, 比如堆石大坝、砂性地基等, 往往涉及到级配变动引起的工程问题。室内研究和工程实践表明粒状材料在荷载作用下破碎引起的级配变化, 对粒状土材料的力学性质会产生明显影响^[1-4]。

室内实验研究发现加载过程中材料颗粒破碎导致的颗粒级配变化会引起试样体积收缩和峰值强度的降低^[5-6]。随着颗粒级配的拓宽, 砂土的不均匀系数 C_u 逐步增大, 相应的临界状态线 (CSL) 在 $e - p'$ 平面上逐渐降低^[7-8]。李罡等^[9]采用 3 种不同粒状材料 (理想 DEM 球体、玻璃球和 Hostun 砂), 详细研究了不同粒状材料在不破碎情况下当前级配对材料排水力学

特性的影响, 特别是对材料临界状态线的影响。他们指出粒状材料的力学性能是级配相关性的: 随着不均匀系数 C_u 的增大, 临界状态线在 $e - p'$ 平面上逐步降低, 临界状态参数参照孔隙率 e_{ref} 和斜率 λ 以及不均匀系数 C_u 存在幂相关变化规律。这些结论对岩土工程中的粒状土材料问题都是非常重要的。因此本文尝试将这些规律考虑进本构模型使其得到更好的运用。

当前, 许多用于粒状材料特别是砂土材料的本构

基金项目: 国家自然科学基金项目 (41372285, 41272317, 41172251); 高等学校博士学科点专项科研基金项目 (20110073120012); 中法联合基金项目 (RISMOGEO)

收稿日期: 2014 - 02 - 26

*通讯作者

模型^[10-14]都是基于临界状态土力学框架,极少本构模型考虑了砂土材料初始颗粒级配的影响,如 Wood 等^[15]基于 2D-DEM 模拟的结果提出了一个考虑颗粒级配影响的本构模型,但缺乏室内试验验证。为了获得粒状材料颗粒级配力学特性的更加一般性运用,本文基于 3 种不同粒状材料(理想材料 DEM 球体、人工材料玻璃球和天然材料 Hostun 砂)的三轴排水/不排水剪切试验结果,提出一个简单的级配相关应变硬化弹塑性本构模型描述粒状材料级配变化的力学特性。

1 本构模型

1.1 模量定义

弹性应变增量可以采用以下弹性法则进行:

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_v^e &= \frac{dp}{K}, \\ d\varepsilon_d^e &= \frac{dq}{3G}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, G 和 K 是次弹性剪切模量和体积模量^[12, 16-17]:

$$G = G_0 \frac{(2.97 - e)^2}{(1 + e)} (p' p_a)^{0.5}, \quad (2)$$

$$K = K_0 \frac{(2.97 - e)^2}{(1 + e)} (p' p_a)^{0.5}. \quad (3)$$

其中, G_0 和 K_0 均为弹性参数, p_a 是用作参考压力的大气压强。

K_0 由一个各向同性压缩三轴试验校核得到,而 G_0 可以由一个三轴排水剪切试验应力应变曲线的初始斜率校核得到。通过泊松比常量 ν , G_0 也可以通过下式计算得到:

$$G_0 = \frac{3K_0(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)}. \quad (4)$$

1.2 屈服及硬化准则

类似许多砂土本构模型^[18-19], 本文模型采用的剪切屈服面的形状在 $q - p'$ 平面上是线性的, 表达如下:

$$f_s = \eta - H, \quad (5)$$

式中, $\eta = q/p'$, H 是硬化变量,

$$H = \frac{M_p \varepsilon_d^p}{G_p + \varepsilon_d^p}, \quad (6)$$

其中, G_p 是用于控制双曲线关系 $\eta - \varepsilon_d^p$ 的初始斜率, 可以通过拟合较小应变范围下排水三轴试验的偏应力应变曲线来获得; M_p 为表观应力比, 对于三轴压缩试验, 表观应力比 $M_p = 6 \sin \phi_p / (3 - \sin \phi_p)$, 其中 ϕ_p 为表观摩擦角。

1.3 流动准则

为了考虑剪切过程中粒状土材料的剪胀剪缩特性, 本文采用一个 Roscoe 型的剪胀方程:

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_d^p} = D(M_{pt} - \eta). \quad (7)$$

式中, D 是剪胀参数, 可以从排水实验中体积应变的变化来拟合得到。 M_{pt} 是砂土相变线^[20]或者特征线^[21]的斜率, 可以通过下式确定:

$$e_c \tan \phi_{pt} = e \tan \phi_c, \quad (8)$$

$$M_{pt} = 6 \sin \phi_{pt} / (3 - \sin \phi_{pt}). \quad (9)$$

其中, e_c 是临界状态孔隙比, ϕ_c 为临界状态摩擦角, ϕ_{pt} 为相变状态摩擦角。

1.4 临界状态线

自从 Roscoe 等^[22]提出临界状态概念后, 临界状态理论被广泛运用于岩土本构模型中。达到临界状态的两个条件是材料达到临界状态应力比和临界状态孔隙比。通常临界状态孔隙比是作为岩土材料松密程度的参照。Been 等^[23]将状态参数定义为当前孔隙比与相同压力下的临界孔隙比之差; Biarez 等^[24]则将材料的松密程度定义成另一种形式 e_c/e , 本文采用后者结合相应的临界状态方程表达如下:

$$e_c = e_{ref} - \lambda \left(\frac{p'}{p_a} \right)^\xi, \quad (10)$$

式中, e 是当前孔隙比, e_c 是当前平均有效应力 p' 对应的临界状态孔隙比。 e_{ref} 确定了临界状态线的位置, λ 决定了临界状态线的斜率, 而 ξ 是材料常数。因此, 对于给定的粒状材料, 其临界状态线可以由参数 e_{ref} 和 λ 确定, 而 p_a 和 ξ 是常数(本研究中 $p_a = 101.3 \text{ kPa}$, $\xi = 0.9$ ^[25])。

根据 Biarez 等的研究结果^[24], 材料表观摩擦角 ϕ_p 与材料的临界状态摩擦角 ϕ_c (对于三轴压缩试验, 临界应力比 $M_c = 6 \sin \phi_c / (3 - \sin \phi_c)$) 和材料的密实状态 e_c/e 有关联:

$$e \tan \phi_p = e_c \tan \phi_c. \quad (11)$$

M_p 是通过临界状态应力比 M_c 和密实状态 e/e_c 获得的。式 (11) 意味着对于松散颗粒体系的表观摩擦角 ϕ_p 小于临界状态摩擦角 ϕ_c , 并且在达到临界状态时等于临界状态摩擦角; 另一方面, 对于密实颗粒体系, 表观摩擦角 ϕ_p 大于临界状态摩擦角 ϕ_c , 材料内部的自锁程度很高。

1.5 临界状态线的级配效应

采用图 1 所示颗粒级配曲线配置了 3 种不同材料 (DEM 理想球体、玻璃球和 Hostun 砂) 的三轴试样, 并进行了传统三轴排水和不排水剪切试验。试验中, 在最高围压 400 kPa 下加载后测得玻璃球试样的破碎指标 B_g ^[26] 几乎为 0%, 而 Hostun 砂试样的 B_g 低于 1.2%, 这个破碎程度的影响几乎可以忽略。

基于 3 种材料的三轴排水/不排水剪切试验结果, 将剪切达到临界状态/静止状态时的实验结果绘制到 q

- p' 平面和 $e - p'$ 平面, 进一步确定不同排水条件下粒状材料的临界状态线, 如图 2 所示。数值试验和室内实验结果均表明, 同一级配颗粒材料的临界状态线在排水和不排水条件下是一致的。不同颗粒级配粒状材料在 $q - p'$ 平面上的临界状态线是线性的; 而在 $e - p'$ 平面上临界状态线则是颗粒级配相关性的, 其位置随着粒状材料颗粒级配的拓宽(不均匀系数的增加)而下移。

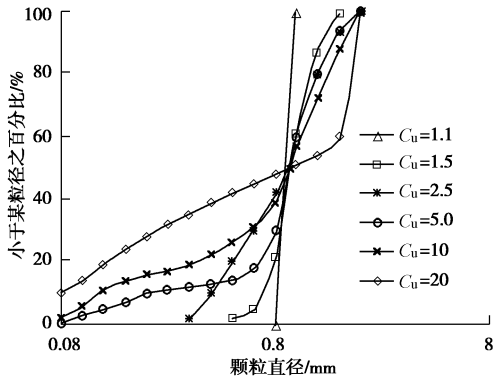


图 1 颗粒级配曲线

Fig. 1 Grain-size distribution

为了更好地运用这一个关系, 将临界状态参数参考孔隙比 e_{ref} 和斜率 λ 与材料颗粒级配指标 C_u 通过一个简单的指数函数来描述如下:

$$f = a_{e_0, \lambda_0} + b_{e_0, \lambda_0} \cdot \exp(-c_{e_0, \lambda_0} \cdot C_u) \quad (12)$$

式中, f 代表 e_{ref} 或者 λ 。 a_{e_0} , b_{e_0} , c_{e_0} , a , b 和 c 分别是拟合参数。

其拟合曲线如图 3 所示, 参考孔隙比 e_{ref} 和斜率 λ 随着粒状材料不均匀系数 C_u 的提高而降低, 临界状态参数呈现出级配相关性。而对于不均匀系数较大的室内玻璃球试验和 Hostun 砂试验结果可以发现, 在其不均匀系数 $C_u > 10$ 以后, 临界状态参数趋于稳定。证实了 Biarez 等^[7]提出的临界孔隙比与不均匀系数 C_u 几乎呈指数下降, 直到 $C_u = 10$ 后临界孔隙比趋于稳定。

由此可见, 粒状材料的临界状态线的位置在较小颗粒级配系数的情况下(例如 $C_u = 1.0 \sim 10.0$)是级配相关性的, 而对于颗粒级配演化到一定程度(不均匀系数 $C_u > 10.0$)的粒状材料, 其临界状态线趋于稳定。据此规律, 将式(12)引进本构模型以考虑粒状材料颗粒级配演化对材料临界状态线的影响。

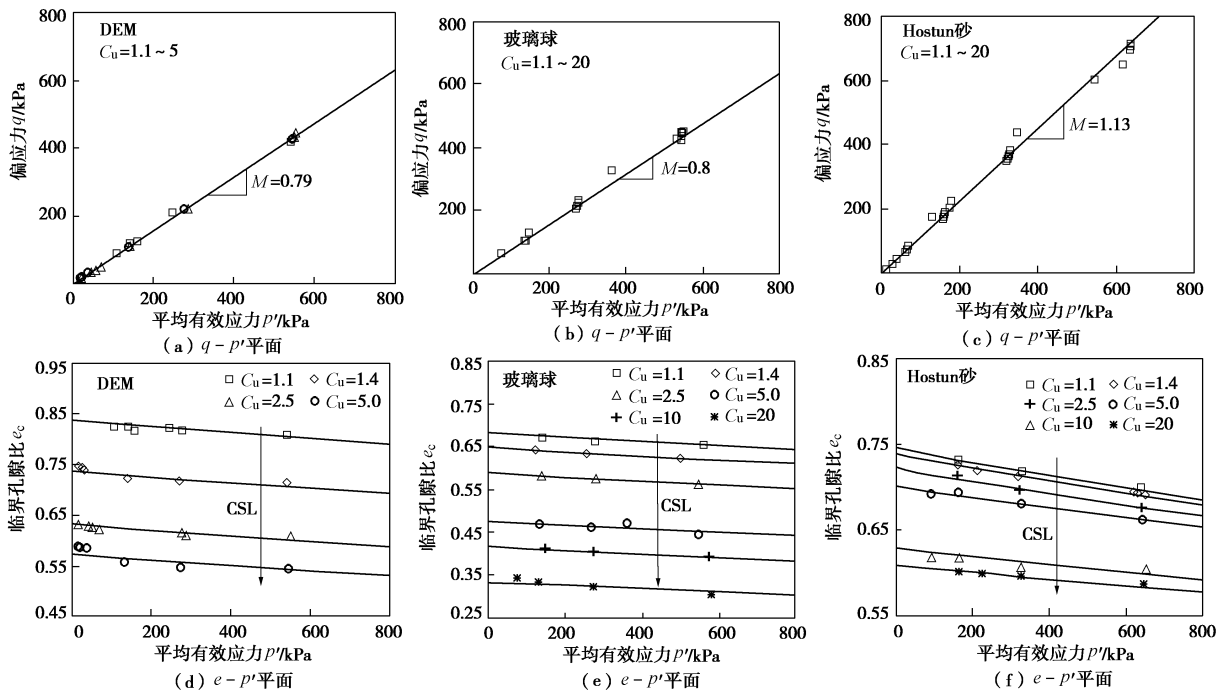
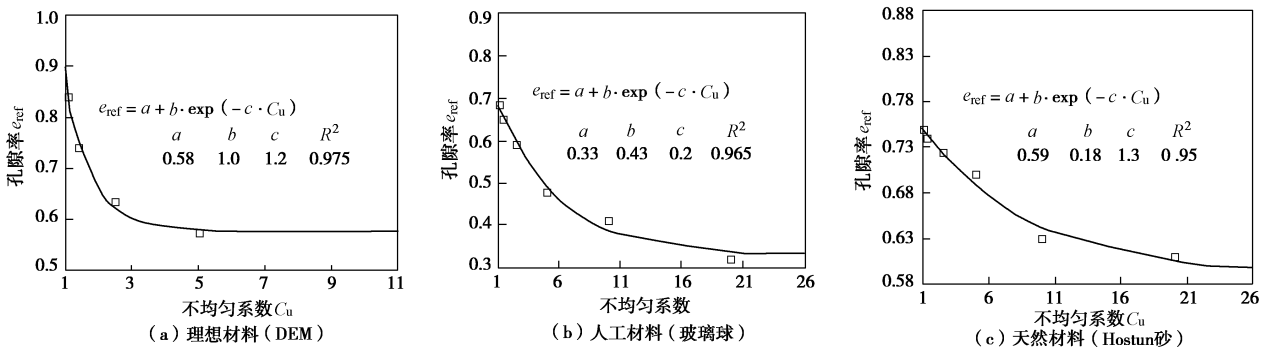


图 2 3 种材料的临界状态线

Fig. 2 Critical state lines of three kinds of materials



(a) 理想材料 (DEM)

(b) 人工材料 (玻璃球)

(c) 天然材料 (Hostun砂)

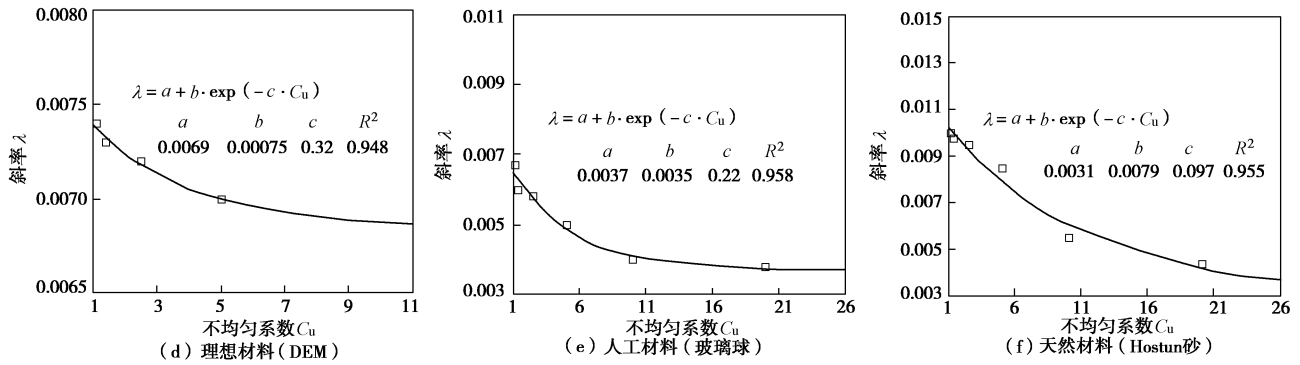


图3 临界状态系数随不均匀系数变化规律

Fig. 3 Relationship between critical state parameters and coefficient of uniformity C_u

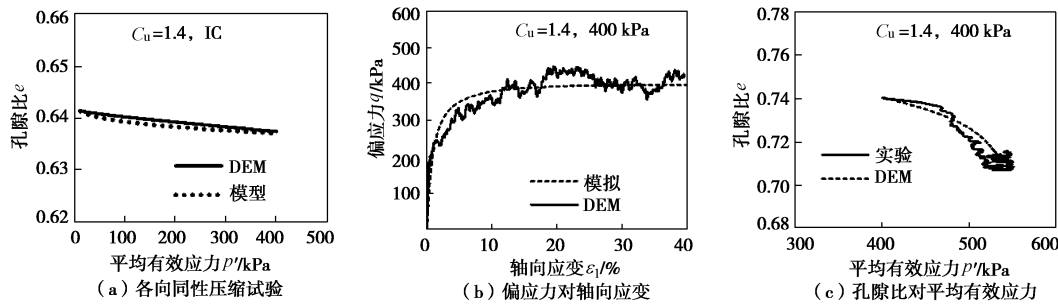


图4 DEM 试样的排水压缩试验的模型参数校核

Fig. 4 Calibration of model parameters of drained compression tests on DEM specimens

表1 模型参数值

Table 1 Values of model parameters

参数	临界摩擦角 $\phi_u / (^\circ)$	弹性 G_0	K_0	塑性硬化 G_p	剪胀性 D	级配效应(e_{ref})			级配效应(λ)		
						a_{e0}	b_{e0}	c_{e0}	$a_{\lambda 0}$	$b_{\lambda 0}$	$c_{\lambda 0}$
DEM	20.5	75	100	0.004	1	0.58	1.0	1.2	0.0068	0.0008	0.3200
玻璃球	20.7	64	85	0.004	1	0.33	0.43	0.2	0.0037	0.0035	0.2100
Hostun 砂	28.4	34	45	0.004	1	0.33	0.43	0.2	0.3300	0.4300	0.2000

1.6 模型参数的确定

本文提出的本构模型需要校核 11 个参数。这些材料参数大部分可以直接从标准室内试验得到。对于每种材料，本模型所需要的参数只需要进行一个初始各向同性压缩后排水或者不排水剪切至试样破坏的三轴试验就可确定。具体确定流程如下：

- (1) K_0 由一个各向同性压缩三轴试验校核得到；由于本文没有进行小应变试验， G_0 按照式 (4) 取值，泊松比常量 ν 假定为 0.2。
- (2) G_p 通过拟合三轴试验的 $q - \epsilon_a$ 曲线的初始斜率得到 (如 $\epsilon_a < 2\%$)。
- (3) ϕ_c 由三轴试验的最终应力比确定。
- (4) a_{e0} , b_{e0} , c_{e0} , $a_{\lambda 0}$, $b_{\lambda 0}$ 和 $c_{\lambda 0}$ 分别是使用式 (12) 拟合的参数，这些参数将级配效应考虑进本构模型中。

图 4 举例展示了采用本文模型校核 400 kPa 围压下 DEM 试样的排水剪切响应，其它材料均可采用相同方法校核得到相应的模型参数，见表 1。

2 试验验证

采用上述本构模型及其参数，对本研究所涉及的 3 种不同材料的排水/不排水力学响应进行模拟，以展示本模型在预测粒状材料三轴剪切特性的能力。

图 5 给出了采用本文模型预测 DEM 数值排水剪切试验的结果。模型很好的捕捉了不同围压下不同颗粒级配 ($C_u=1.4\sim 5$) 理想球形材料体的排水力学响应。模型充分重现了粒状材料的剪胀剪缩力学特性：如不同初始孔隙比 ($e_0=0.741, 0.725, 0.664$) 的 $C_u=1.4$ 试样在相同围压下加载表现出不同的剪胀减缩特性；而不均匀系数 $C_u=5.0$ 的粒状材料在剪切过程中几乎都是剪缩特性。不同级配下理想粒状材料剪切到大应变情况下 ($>25\%$)，材料的力学状态均能到达临界状态，出现常剪偏应力和常孔隙比状态。粒状材料三轴排水剪切下的这些力学特性，该本构模型都能一一反映出来。

图 6 给出了本构模型预测不同粒状材料的三轴不

排水剪切力学特性。图 6 (a) ~6 (c) 为 3 种粒状材料的应力应变响应曲线；图 6 (d) ~6 (f) 给出了 3 种材料剪切过程的应力路径。DEM 试样在 100 kPa 的围压下进行不排水剪切，其偏应力水平在加载初期逐渐上升，达到峰值后迅速下降，到达所谓的相变状态^[24]后偏应力继续爬升直到达到临界状态。在相同围压下，

3 个不同颗粒级配的 DEM 试样表现出不同的抗剪强度，是级配相关性的。同样地，粒状材料的抗剪强度随着颗粒级配的拓宽而下降的规律可以在 400 kPa 围压下的玻璃球剪切试验和 100 kPa 围压下的 Hostun 砂剪切试验中发现，表现为偏应力水平随着材料不均匀

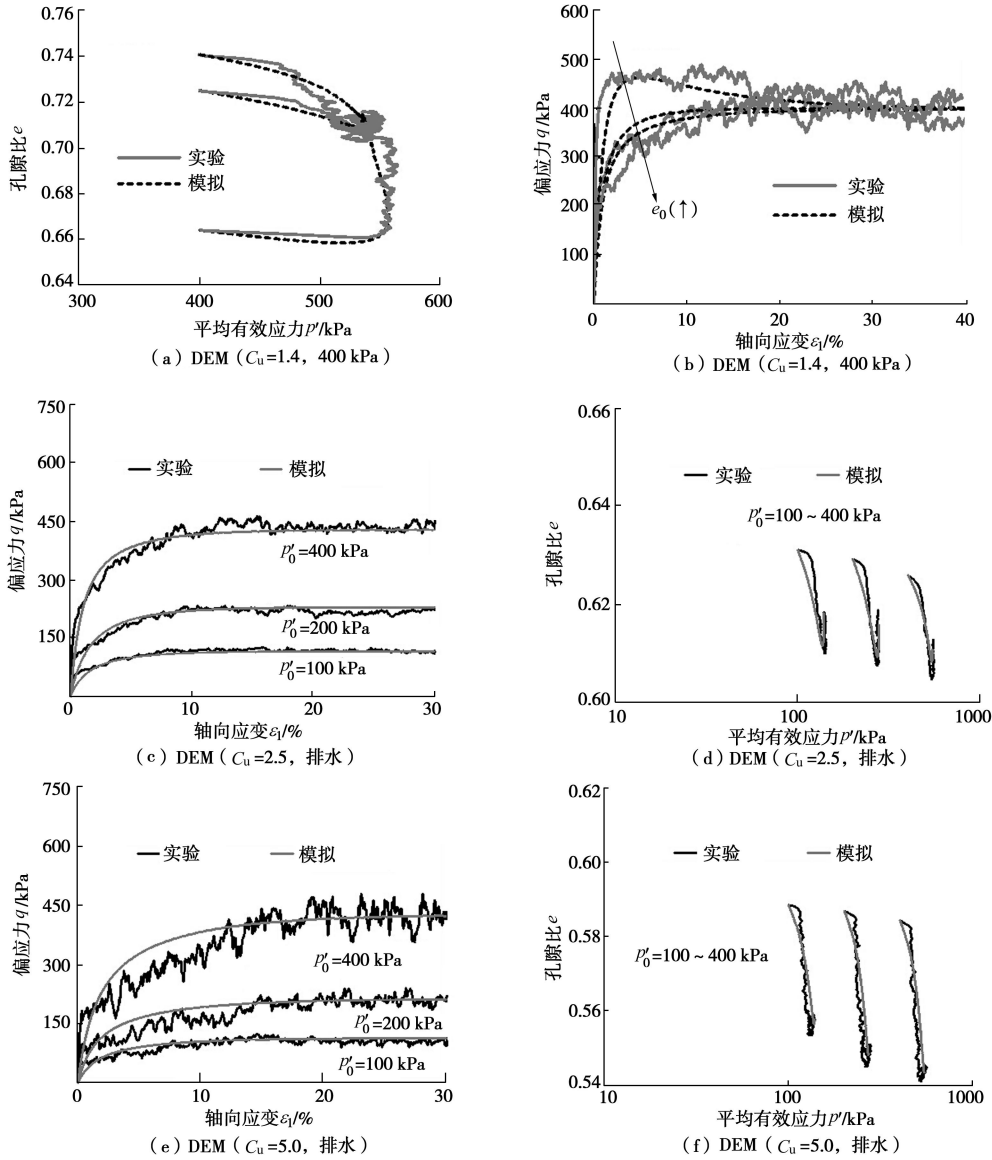


图 5 模型模拟不同颗粒级配 DEM 试样的三轴排水压缩剪切实验结果

Fig. 5 Model simulations of drained triaxial compression tests on DEM specimens with different gradings

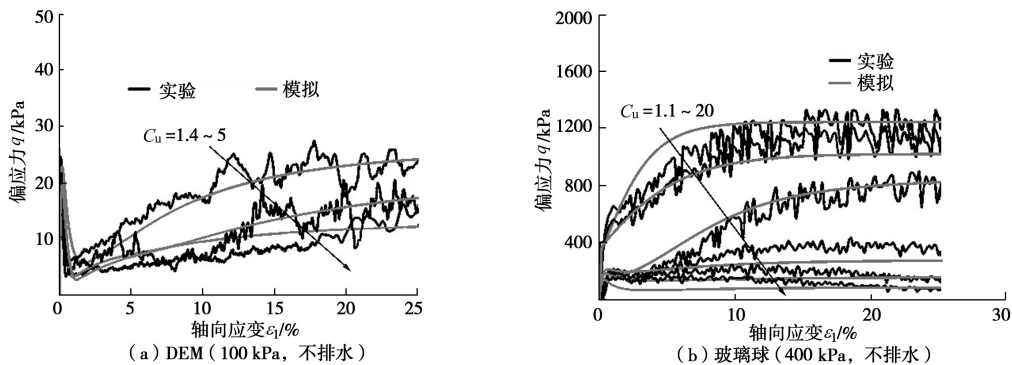


图 6 排水剪切力学特性。图 6 (a) ~6 (c) 为 3 种粒状材料的应力应变响应曲线；图 6 (d) ~6 (f) 给出了 3 种材料剪切过程的应力路径。DEM 试样在 100 kPa 的围压下进行不排水剪切，其偏应力水平在加载初期逐渐上升，达到峰值后迅速下降，到达所谓的相变状态^[24]后偏应力继续爬升直到达到临界状态。在相同围压下，

3 个不同颗粒级配的 DEM 试样表现出不同的抗剪强度，是级配相关性的。同样地，粒状材料的抗剪强度随着颗粒级配的拓宽而下降的规律可以在 400 kPa 围压下的玻璃球剪切试验和 100 kPa 围压下的 Hostun 砂剪切试验中发现，表现为偏应力水平随着材料不均匀

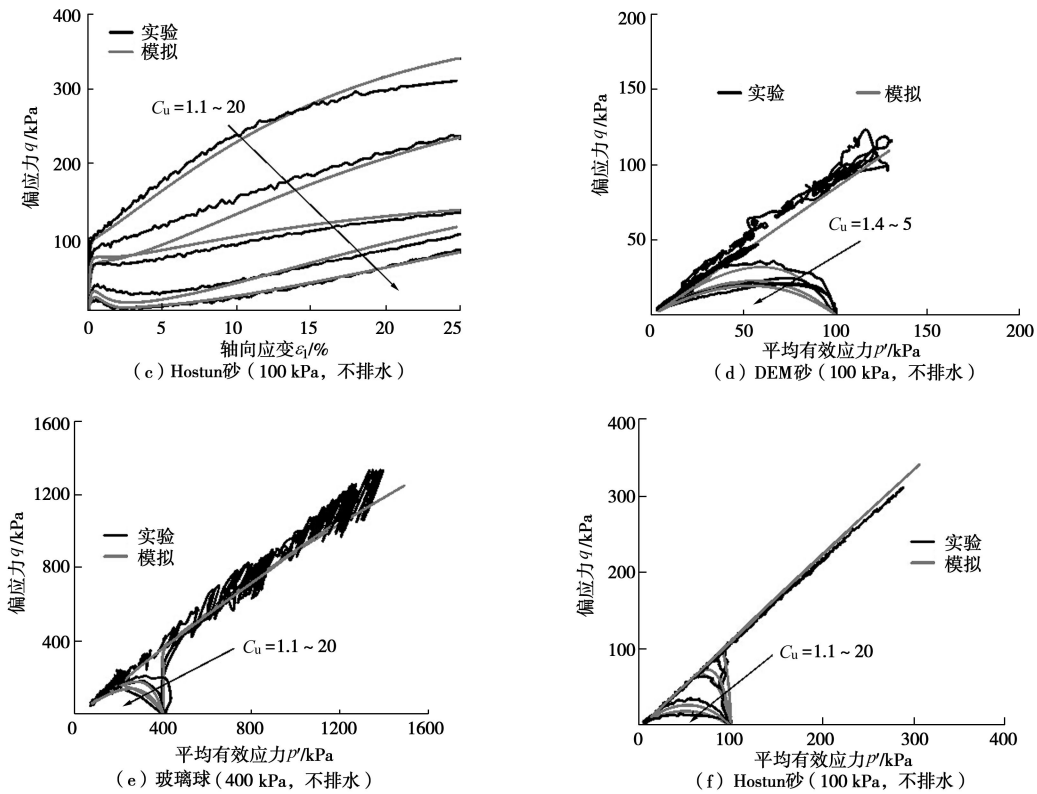


图6 模型模拟不同材料的三轴不排水压缩剪切试验

Fig. 6 Model simulations of undrained triaxial compression tests on different materials

系数 C_u 的升高而降低。由图中可见，本文提出的本构模型能够很好的预测不同材料的不排水剪切特性，并且模拟出其抗剪强度随材料颗粒级配变化的特性和材料在临界状态下的力学特性。

总而言之，本文提出的本构模型具有较强的预测能力，采用一组参数可以模拟不同颗粒级配下粒状材料的三轴排水和不排水剪切应力应变响应以及级配相关的临界状态特性。

3 结 语

本文基于3种不同材料（理想材料、人工材料和天然材料）的数值和室内三轴排水/不排水试验结果，得到了颗粒级配对粒状材料的应力应变特性和临界状态力学特性的影响。建立了颗粒级配指标不均匀系数 C_u 与粒状材料临界状态参数的对应关系。

基于临界状态土力学理论，将粒状材料级配相关临界状态力学特性引进本构模型。该模型形式较为简单，仅采用一组级配相关的临界状态参数就可以描述不同颗粒级配粒状材料的力学响应。模型很好的描述了粒状材料成功预测了粒状材料级配相关的排水和不排水抗剪特性以及临界状态特性。相同围压下粒状材料偏应力水平随着材料不均匀系数 C_u 的升高而降低。模型模拟结果与数值试验、室内试验的结果较为吻合。

参考文献:

- [1] INDRARATNA B, WIJewardena L S S, BALASUBRAMANIAM A S. Large-scale triaxial testing of grey wacke rockfill[J]. Géotechnique, 1993, 43(1): 37 - 51.
- [2] GHANBARI A, SADEGHPOUR A H, MOHAMADZADEH H, et al. An experimental study on the behavior of rockfill materials using large scale tests[J]. Electronic Journal of Geotechnical Engineering, 2008, 13: 1 - 16.
- [3] 张家铭, 蒋国盛, 汪 稔. 颗粒破碎及剪胀对钙质砂抗剪强度影响研究[J]. 岩土力学, 2009, 30(7): 2043 - 2048. (ZHANG Jia-ming, JIANG Guo-sheng, WANG Ren. Research on influences of particle breakage and dilatancy on shear strength of calcareous sands[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(7): 2043 - 2048. (in Chinese))
- [4] 尹振宇, 许 强, 胡 伟. 考虑颗粒破碎效应的粒状材料本构研究: 进展及发展[J]. 岩土工程学报, 2012, 34(12): 2170 - 2180. (YIN Zhen-yu, XU Qiang, HU Wei. Constitutive relations for granular materials considering particle crushing: review and development[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, 34(12): 2170 - 2180. (in Chinese))
- [5] COOP M R. The mechanics of uncemented carbonate sands[J].

- Géotechnique, 1990, **40**(4): 607 - 626.
- [6] VERDUGO R, DE LA Hoz K. Strength and stiffness of coarse granular soils[M]// Soil Stress-Strain Behavior: Measurement, Modeling and Analysis. Berlin: Springer Netherlands, 2007: 243 - 252.
- [7] BIAREZ J, HICHER P Y. Influence de la granulométrie et de son evolution par ruptures de grains sur le comportement mécanique de matériaux granulaires[J]. Revue Française de Génie Civil, 1997, **1**(4): 607 - 631. (BIAREZ J, HICHER P Y. Influence of evolution of gradation induced by particle rupture on the mechanical behavior of granular material. French Journal of Civil Engineering, 1997, **1**(4): 607 - 631. (in French))
- [8] DAOUADJI A, HICHER P Y, RAHMA A. An elastoplastic model for granular materials taking into account grain breakage[J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2001, **20**(1): 113 - 137.
- [9] 李 罡, 刘映晶, 尹振宇, 等. 粒状材料临界状态的颗粒级配效应[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(3): 452 - 457. (LI Gang, LIU Ying-jing, YIN Zhen-yu, et. al. Grading effect on critical state behavior of granular materials[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(3): 452 - 457. (in Chinese))
- [10] 栾茂田, 刘 鹏, 王忠涛. 考虑剪切中主应力方向的砂土本构模型[J]. 水利学报, 2013, **44**(4): 470 - 477. (LUAN Mao-tian, LIU Peng, WANG Zhong-tao. Constitutive model of sand considering shearing orientation of principal stress[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2013, **44**(4): 470 - 477. (in Chinese))
- [11] 罗 刚, 张建民. 考虑物理状态变化的砂土本构模型[J]. 水利学报, 2004, **35**(7): 26 - 31. (LUO Gang, ZHANG Jian-min. Constitutive model for sand considering the variation of its physical state[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2004, **35**(7): 26 - 31. (in Chinese))
- [12] LI X S, DAFALIAS Y F. Anisotropic critical state theory: role of fabric[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2011, **138**(3): 263 - 275.
- [13] 黄茂松, 李学丰, 贾苍琴. 基于材料状态相关临界状态理论的砂土双屈服面模型[J]. 岩土工程学报, 2010, **32**(11): 1764 - 1771. (HUANG Mao-song, LI Xue-feng, JIA Cang-qin. A double yield surface constitutive model for sand based on state-dependent critical state theory[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, **32**(11): 1764 - 1771. (in Chinese))
- [14] 张卫华, 赵成刚, 傅 方. 饱和砂土相变状态界面本构模型[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(5): 930 - 939. (ZHANG Wei-hua, ZHAO Cheng-gang, FU Fang. Bounding-surface constitutive model for saturated sands based on phase transformation state[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(5): 930 - 939. (in Chinese))
- [15] WOOD D M, MAEDA K, NUKUDANI E. Modelling mechanical consequences of erosion[J]. Géotechnique, 2010, **60**(6): 447 - 457.
- [16] RICHART F E, HALL J R, WOODS R D. Vibrations of soils and foundations[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1970.
- [17] LI X S, DAFALIAS Y F. Dilatancy for cohesionless soils[J]. Géotechnique, 2000, **50**(4): 449 - 460.
- [18] VERMEER P A. A double hardening model for sand[J]. Géotechnique, 1978, **28**(4): 413 - 433.
- [19] HU W, YIN Z Y, DANO C, et al. A constitutive model for granular materials considering grain breakage[J]. Science China Technological Sciences, 2011, **54**(8): 2188 - 2196.
- [20] ISHIHARA K. Liquefaction and flow failure during earthquakes[J]. Géotechnique, 1993, **43**(3): 351 - 451..
- [21] LUONG M P. Stress-strain aspects of cohesionless soils under cyclic and transient loading[C]// Proc Int Symp on Soils under Cyclic and Transient Loading. Rotterdam: A A Balkema, 1980: 315 - 324.
- [22] ROSCOE K H, SCHOFIELD A N, WROTH C P. On the yielding of soils[J]. Géotechnique, 1958, **8**(1): 22 - 53.
- [23] BEEN K, JEFFERIES M G, HACHEY J. The critical state of sands[J]. Géotechnique, 1991, **41**(3): 365 - 381.
- [24] BIAREZ J, HICHER P Y. Elementary mechanics of soil behaviour: saturated remoulded soils[M]. Rotterdam: A A Balkema, 1994.
- [25] YAN W M, DONG J. Effect of particle grading on the response of an idealized granular assemblage[J]. International Journal of Geomechanics, 2011, **11**(4): 276 - 285.
- [26] HARDIN B O. Crushing of soil particles[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1985, **111**(10): 1177 - 1192.